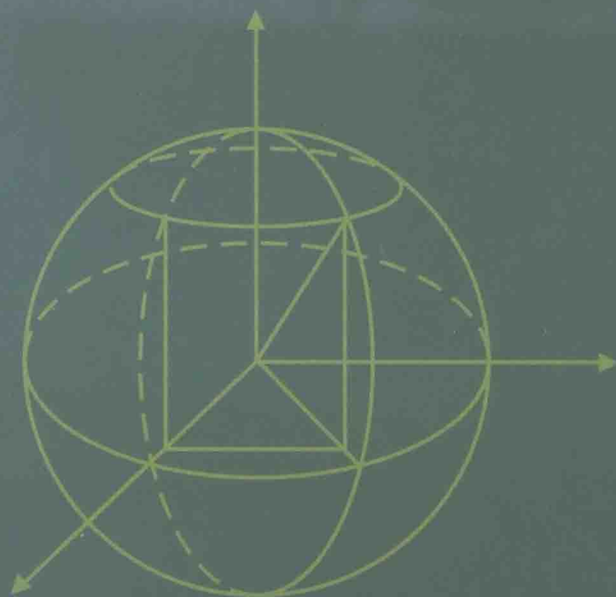
数学物理方法与复数特殊函数

张承宗　著



中国宇航出版社

数学物理方法与复数特殊函数

本书以数学物理方程解析求解为背景，系统介绍了求解直角坐标、斜交坐标系和极坐标、圆柱坐标、球坐标下数学物理方程的基本方法，阐述了直角坐标系、斜交坐标系下求解数学物理方程的复数级数法，首次提出了求解柱（极）坐标、球坐标下各向异性数学物理方程的复数柱多项式与复数柱函数、复数中心轴对称函数、变形复数柱多项式、复数柱体函数、变形复数球柱多项式与变形复数球柱函数、复数球柱函数、变形复数柱面函数、复数柱面函数、复数球多项式与复数球面函数、参数复数球多项式与参数复数球面函数、连带复数球多项式与连带复数球面函数、参数连带复数球多项式与参数连带复数球面函数、复数球谐函数等系列复数特殊函数；提出并证明了复数柱函数展开定理、复数柱体函数展开定理、复数球柱函数展开定理、复数柱面函数展开定理和复数球面函数展开法, 连带复数球面函数展开法, 参数连带复数球面函数展开法；提出了数学物理方法中解的实数化原理;应用系列复数特殊函数对各向异性热传导等相关数学物理问题进行了理论求解和计算，在对新提出系列复数特殊函数进行初步分析的基础上，阐述了系列复数特殊函数与经典贝塞尔函数、实数幂级数和勒让德函数的关系。书中给出了理论分析、数值计算结果。

本书可作为数学、物理和工程领域相关科研教学人员与研究生、本科生参考。

ISBN 978-7-5159-0849-6



定价：128.00元

数学物理方法与复数特殊函数



数学物理方法与复数特殊函数

张承宗　著



中国宇航出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

数学物理方法与复数特殊函数 / 张承宗著. -- 北京：中国宇航出版社，2014.12

ISBN 978-7-5159-0849-6

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①数学物理方法②复数-特殊函数 Ⅳ. ①O411.1 ②O174.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 292153 号

责任编辑 曹晓勇　　装帧设计 文道思

出版发行 中国宇航出版社

社 址 北京市阜成路 8 号　邮 编 100830

(010)68768548

网 址 www.caphbook.com

发行部 (010)68371900　(010)88530478(传真)

(010)68768541　(010)68767294(传真)

零售店 读者服务部　北京宇航文苑

(010)68371105　(010)62529336

承 印 北京画中画印刷有限公司

版 次 2014 年 12 月第 1 版

2014 年 12 月第 1 次印刷

规 格 787×1092

开 本 1/16

印 张 22.25

字 数 570 千字

书 号 ISBN 978-7-5159-0849-6

定 价 128.00 元

内容简介

本书以数学物理方程解析求解为背景，系统介绍了求解直角坐标、斜交坐标系和极坐标、圆柱坐标、球坐标下数学物理方程的基本方法，阐述了直角坐标系、斜交坐标系下求解数学物理方程的复数级数法（复数分离变量法），提出并研究分析了求解柱（极）坐标、球坐标下各向异性数学物理方程的复数柱多项式与复数柱函数、复数柱对称函数、变形复数柱多项式、复数柱体函数、复数球柱多项式、变形复数球柱多项式、B型柱多项式、C型复数柱多项式、复数一般各向异性柱多项式与变形复数球柱函数、复数球柱函数、变形复数柱面函数、复数柱面函数、复数球多项式与复数球面函数、参数复数球多项式与参数复数球面函数、连带复数球多项式与连带复数球面函数、参数连带复数球多项式与参数连带复数球面函数等系列复数特殊函数；提出了 Z_{ip} 方程，变形 Z_{ip} 方程，球 Z_{ip} 方程，变形球 Z_{ip} 方程，各向异性柱对称方程，B型各向异性柱方程，C型各向异性柱方程，一般各向异性柱方程等；提出并证明了复数柱函数展开定理、复数柱体函数展开定理、复数球柱函数展开定理、复数柱面函数展开定理等；提出了复数球面函数展开法，连带复数球面函数展开法，参数连带复数球面函数展开法等；提出了数学物理方法中解的实数化原理；应用系列复数特殊函数完成了对各向异性热传导偏微分方程在二维、三维和稳态、非稳态状态下圆形域、柱体和球面域内相关数学物理问题的求解，理论分析证明和数值计算均表明相关工作是成功。此外，针对柱坐标下的数学物理方法提出了系列复数柱函数变换，并求解了各向异性波动方程。作者发现：经典贝塞尔函数系列、勒让德函数、实数幂级数、汉克尔变换等是本书提出了系列复数特殊函数、变换特例，在处理各向同性相关数学物理问题时，经典贝塞尔函数、实数幂级数和勒让德函数、汉克尔变换等与作者新提出的系列复数特殊函数、函数变换是一致的，新的系列复数特殊函数、函数变换是更广义的方法，可以处理更为一般的各向异性数学物理问题和偏微分方程。

本书可作为数学、物理和工程领域相关科研教学人员与研究生、本科生参考。

前　言

微积分发明以后，物理问题成为数学发展的一个重要的驱动力。18 世纪数学和物理结合部主要是常微分方程。19 世纪以后，法国数学家傅立叶在热传导研究时提出的傅立叶级数方法拉开了偏微分方程发展的序幕，后续发展的贝塞尔函数、勒让德函数等经典理论丰富了偏微分方程求解方法，偏微分方程和物理紧密联系起来，以至偏微分方程很多场合下常被称为数学物理方程。爱因斯坦这样评价了偏微分方程意义：偏微分方程在进入理论物理学时是婢女，但逐渐成为了主妇。20 世纪以来科学技术进步，背后有着偏微分方程驱动因素，偏微分方程学科已发展成为人类知识体系中主要支撑之一。

20 世纪 50 年代以后，以复合材料为代表的各向异性材料得到了广泛的应用。各向异性材料的广泛应用，给偏微分方程带来了新课题。复合材料各向异性等新物理特点反映到偏微分方程，使偏微分控制方程出现了函数关于空间坐标的奇次交叉偏导数，这使 19 世纪发展的基于实数分离变量法的偏微分方程求解体系遇到了困难。这样可解析求解的各向异性物理和工程问题极其有限，而这些问题对于实际工程设计很重要。对理论和工程应用极为重要的工程物理问题无法解析处理，使得对有关问题的认识存在空白，或不够深入，甚至错误的，如在结构工程设计中规避复合材料各向异性问题，而这恰是复合材料的优点。所幸的是当代计算机技术及以有限元为代表的数值法飞速发展相对掩盖了偏微分方程解析求解严重滞后的缺陷。从偏微分方程学科发展来看，目前可以解析求解的偏微分方程只是相对简单的方程，一般线性偏微分方程解析求解方法需要发展完善。从偏微分方程的物理背景来看，或许可以发展一种“各向异性数学物理”的学科。无论是发展数学理论，还是推动相关工程技术进步，发展偏微分方程（数学物理方程）求解理论，是迫切的。

本书作者在 1990 年开始致力于各向异性力学偏微分方程解析求解工作，起初研究各向异性矩形平板弯曲偏微分方程解析求解，应用一种后来被称为复数级数方法的复变函数方法解析计算各向异性矩形板弯曲，后续把这种复数级数展开法推广用于常系数线性偏微分方程控制的圆形域、矩形域、斜形域相关力学问题，取得一些解析解和结果，作者也欣喜地注意到国内一些学者也开始陆续应用这种复数级数方法处理相关力学问题。现在看来，复数级数方法也是一种广义的分离变量法，本书也将复数技术方法称为复数分离变量法，以求和

现有数学物理方法体系统一起来。相对于直角坐标系下偏微分方程求解，极（柱）坐标、球坐标下线性偏微分方程求解，由于要遇到变系数问题，求解则麻烦起来。偏微分方程的变系数问题处理原先多采用幂级数方法求解，以往幂级数方法大都是采用实数幂级数方法，这对处理各向同性数学物理问题是足够适用的，以实数幂级数方法为基础，发展了勒让德级数、贝塞尔函数等特殊函数方法。但对于各向异性数学物理问题来说，存在两个坐标交叉函数项，实数形式的幂级数函数就难以处理此类方程了。作者从 2008 年开始试尝着沿用复变函数原理，结合贝塞尔、勒让德函数展开思路和分离变量法基本原理，引入了一些复数特殊函数，对极（柱）坐标、球坐标下相应偏微分方程求解进行初步研究。研究表明，综合采取分离变量法、级数展开和复变函数方法处理柱坐标、极坐标和球坐标下一般偏微分方程的思路是可行的。按照这种思想，作者提出了求解柱（极）坐标、球坐标下各向异性数学物理方程的复数柱多项式与复数柱函数、复数柱对称函数、变形复数柱多项式、复数柱体函数、复数球柱多项式、变形复数球柱多项式、B 型柱多项式、C 型复数柱多项式、复数一般各向异性柱多项式与变形复数球柱函数、复数球柱函数、变形复数柱面函数、复数柱面函数、复数球多项式与复数球面函数、参数复数球多项式与参数复数球面函数、缔合复数球多项式与缔合复数球面函数等系列复数特殊函数；提出了 Z_{ip} 方程，变形 Z_{ip} 方程，球 Z_{ip} 方程，变形球 Z_{ip} 方程，各向异性柱对称方程，B 型各向异性柱方程，C 型各向异性柱方程，一般各向异性柱方程等新方程；提出并证明了复数柱函数展开定理、复数柱体函数展开定理、复数球柱函数展开定理、复数柱面函数展开定理等；提出了复数球面函数展开法，缔合复数球面函数展开法等；提出了数学物理方法中解的实数化原理；应用系列复数特殊函数完成了对各向异性热传导偏微分方程在二维、三维和稳态、非稳态状态下圆形域、柱面域、柱体和球面域内相关数学物理问题的求解，理论分析证明和数值计算均表明相关工作是成功的。作者又并针对各向异性波动方程进行求解。此外，作者针对柱坐标下的数学物理方法提出了系列复数柱函数变换。作者发现：经典贝塞尔函数系列、勒让德函数、实数幂级数、汉克尔变换等是本书提出了系列复数特殊函数、函数变换的特例，在处理各向同性相关数学物理问题时，经典贝塞尔函数、实数幂级数和勒让德函数、汉克尔变换等与作者新提出的系列复数特殊函数、函数变换是一致的，数学物理方法发展是有继承性的。新的系列复数特殊函数是更广义的方法，可以处理更为一般的各向异性数学物理问题和偏微分方程。

偏微分方程和特殊函数大都具有鲜明的物理背景。从现在回顾偏微分方程

和特殊函数发展历程，当前的经典偏微分方程求解方法，实际都是基于各向同性的物理学背景。发展偏微分方程复数求解体系方法，对基于各向异性物理学背景的一般线性偏微分方程求解，构建各向异性物理背景的一般偏微分方程和特殊函数知识体系，应该是偏微分方程和特殊函数发展的一个新方向。2000年以后，空间探测器验证了宇宙微波背景辐射是各向异性的，而不是以前认为的各向同性，这颠覆了人类原先的宇宙知识，各向异性物理学发展方兴未艾，各向异性数学物理方法的突破或是各向异性物理学发展的助推器。偏微分方程和特殊函数的进步不仅是数学领域方面的进步，还可以推进有关物理科学和工程技术进步，从理论方法和技术领域均有重要的现实意义。

作者最早在重庆大学学习工程领域专业，在数学物理领域经常边学习边科研，虽然依托数学力学方法领域学位论文研究相继在国防科技大学、海军工程学院获得硕士、博士学位，还是经常感觉到科学、数学的博大精深。作者依托计算机技术完成了系列复数特殊函数理论推导和相关数学物理问题的数值计算，而数学领域先哲们是用手算实施贝塞尔函数、勒让德函数、实数幂级数方法等诸多领域公式推导和计算，在赞叹数学理论精妙之时，作者也感叹先哲们计算之精确、工作之坚韧。科学发展需要人类智慧，也需要坚韧不拔工作。作者是以工程师角色从事数学物理研究，由于水平有限，而且成书仓促，书中可能有疏漏甚至有错误之处，敬请读者批评指证。

作　者

2014 年 5 月 4 日于北京

标　注

i	$\mathrm{i}^2=-1$，虚数单位
$i,\ j,\ k,\ l,\ m,\ n$	整数（专门定义除外）
α	矩形长宽比或热扩散系数
h,δ	板壳厚度
β	斜形板斜角，或最大热传导方向与一坐标方向夹角。
$x,\ y,\ z$	直角坐标
r,θ,z	柱坐标
r,θ,φ	球坐标
t	时间
q	板壳承载函数或热源函数
ρ	密度
C_p	比热
w	板壳挠度
T	温度
$J_p(x)$	第一类贝塞尔函数
$Y_p(x)$	第二类贝塞尔函数
$Z_{ip}(x)$	第一类复数柱多项式，$p=a+\mathrm{i}b$
$Z_{ip}(x,\theta)$	第一类复数柱函数
$Y_{ip}(x)$	第二类复数柱多项式
$Y_{ip}(x,\theta)$	第二类复数柱函数
$S_{ip_n}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$	复数柱环函数
$H_{ip}^{(1)}(x)$	第一种第三类复数柱多项式
$H_{ip}^{(2)}(x)$	第二种第三类复数柱多项式
$I_p(x)$	第一类变形贝塞尔函数
$K_p(x)$	第二类变形贝塞尔函数
$\hat{Z}_{ip}(x)$	第一类变形复数柱多项式
$K_{ip}(x)$	第二类变形复数柱多项式
$\hat{H}_p^{(1)}(x)$	第一种第三类变形贝塞尔函数
$\hat{H}_p^{(2)}(x)$	第二种第三类变形贝塞尔函数
$\hat{H}_{ip}^{(1)}(x)$	第一种第三类变形复数柱多项式

$\hat{H}_{ip}^{(2)}(x)$	第二种第三类变形修正复数柱多项式
$C_{l,n,k,j}(r,\theta,z)$	复数柱体函数
$j_n(x)$	第一类球贝塞尔函数
$y_n(x)$	第二类球贝塞尔函数
$C_{ip}(x)$	第一类复数球柱多项式
$C_{ip}(x,\theta)$	第一类复数球柱函数
$y_{ip}(x)$	第二类复数球柱多项式
$y_{ip}(x,\theta)$	第二类复数球柱函数
$h_{ip}^{(1)}(x)$	第一种第三类复数球柱函数
$h_{ip}^{(2)}(x)$	第二种第三类复数球柱函数
$i_p(x)$	第一类变形球贝塞尔函数
$k_p(x)$	第二类变形球贝塞尔函数
$\hat{C}_{ip}(x)$	第一类复数球柱多项式
$\hat{C}_{ip}(x,\theta)$	变形复数球柱函数
$k_{ip}(x)$	第二类变形复数球柱多项式
$B_{ip_n}(x)e^{in\theta}$	复数球柱函数
$M_{is}(z,\theta)$	一般复数柱面函数
$\hat{O}_{s_{n,m}}(z)$	第一类参数复数柱面多项式
$\hat{O}_{s_{n,m}}(z,\theta)$	第一类参数复数柱函数
$P_n(x)$	第一类勒让德函数
$Q_n(x)$	第二类勒让德函数
$Z_{is}(x,\varphi)$	复数球面函数
$Z_{s_1}(x),Z_{s_2}(x),Z_{s_3}(x),Z_{s_4}(x)$	分别为第一、二、三、四种球多项式
$\Omega_{m,n}^{(1)}(x)$	第一类复数球多项式
$\Omega_{m,n}^{(2)}(x)$	第二类复数球多项式
$Z_{is}(x,\varphi,\lambda)$	参数复数球面函数
$\Omega_{m,n}^{(1)}(x,\lambda)$	第一种参数复数球多项式
$\Omega_{m,n}^{(2)}(x,\lambda)$	第二种参数复数球多项式
$Z_{s_1}(x,\lambda),Z_{s_2}(x,\lambda),$ $Z_{s_3}(x,\lambda),Z_{s_4}(x,\lambda)$	分别为第一、二、三、四种参数球多项式
$\hat{Z}_{is}(\theta,\varphi)$	缔合复数球面函数
$\hat{\Omega}_{m,n}^{(1)}(x)$	第一类缔合复数球多项式
$\hat{\Omega}_{m,n}^{(2)}(x)$	第二类缔合复数球多项式

$\hat{Z}_{s_1}(x), \hat{Z}_{s_2}(x), \hat{Z}_{s_3}(x), \hat{Z}_{s_4}(x)$　分别为第一、二、三、四种缔合球多项式

$\hat{Z}_{is}(\theta, \varphi, \lambda)$　参数缔合复数球面函数

$\hat{Z}_{s_1}(x,\lambda), \hat{Z}_{s_2}(x,\lambda), \hat{Z}_{s_3}(x,\lambda), \hat{Z}_{s_1}(x,\lambda)$　分别为第一、二、三、四种参数缔合球多项式

$H(\xi) = \int_0^\infty x f(x) \mathrm{J}_\nu(\xi x) \mathrm{d}x$　$f(x)$ 的 ν 阶汉克尔变换

$Z(\alpha) = \int_0^\infty x f(x) [Z_{ip}(\alpha x)]^* dx$　$f(x)$ 的 ip 阶复数柱函数变换

$F_z(\alpha_j) = \int_0^R r f(r) \left[Z_{ip}\left(\alpha_j \frac{r}{R}\right) \right]^* \mathrm{d}r$　$f(r)$ 的有限复数柱函数变换

$H(\alpha) = \int_0^\infty x^2 f(x) [C_{ip-\frac{1}{2}}(\alpha x)]^* \mathrm{d}x$　$f(x)$ 的 $(ip - \frac{1}{2})$ 阶复数球柱函数变换

$H_z(\alpha_j) = \int_0^R r^2 f(r) \left[C_{ip-\frac{1}{2}}\left(\alpha_j \frac{r}{R}\right) \right]^* \mathrm{d}r$　$f(r)$ 的有限复数球柱函数变换

$G(\beta) = \int_0^\infty x f(x) [\hat{Z}_{ip}(\beta x)]^* \mathrm{d}x$　$f(x)$ 的 ip 阶变形复数柱函数变换

$G_z(\beta_j) = \int_0^R r f(r) \left[\hat{Z}_{ip}\left(\beta_j \frac{r}{R}\right) \right]^* \mathrm{d}r$　$f(r)$ 的有限变形复数柱函数变换

$Y(\beta) = \int_0^\infty x^2 f(x) [\hat{C}_{ip-\frac{1}{2}}(\beta x)]^* \mathrm{d}x$　$f(x)$ 的 ip 阶变形复数球柱函数变换

$Y_z(\beta_j) = \int_0^R r^2 f(r) \left[\hat{C}_{ip-\frac{1}{2}}\left(\beta_j \frac{r}{R}\right) \right]^* \mathrm{d}r$　$f(x)$ 的有限变形复数球柱函数变换

$Z(\alpha, n)$　$f(r,\theta)$ 的 $ip \times n$ 阶二重复数柱函数变换

$Q(\alpha, n)$　$f(r,\theta)$ 的 $(ip - \frac{1}{2}) \times n$ 阶二重复数球柱函数变换

$X(\beta, n)$　$f(r,\theta)$ 的 $ip \times n$ 阶二重变形复数柱函数变换

$Y(\beta, n)$　$f(r,\theta)$ 的 $(ip - \frac{1}{2}) \times n$ 阶二重变形复数球柱函数变换

$C(\alpha, n, \omega)$　$f(r,\theta,z)$ 的 $ip \times n \times \omega$ 三重复数柱函数变换

目 录

第1章　绪　论

1.1　引言

在研究自然科学与工程科学中的各种运动和平衡问题时，经常遇到含有未知函数是多元函数及其偏导数（或仅含偏导数）的微分方程，这种方程被称为偏微分方程。数学物理方程是指在分析研究自然科学及工程问题中所建立的偏微分方程（包括积分方程及微分积分方程）。拉普拉斯方程，泊松方程，流体力学中的纳维—斯托克斯方程组，弹性力学中的圣维南方程组，薄板弯曲方程，波动方程，热传导方程等都是经典的数学物理方程。自19世纪开始，伴随着自然科学技术的进步，陆续出现了电磁场理论中的麦克斯韦方程组，量子力学的薛定谔方程，广义相对论中的爱因斯坦方程等重要的数学物理方程。这些方程的建立及处理本身就代表着人类对自然认识的进步，对人类文明发展起着重大的推进作用。从中也可看出，数学物理方程研究的重大现实和理论意义。

研究自然科学和工程问题，第一步应该是将实际问题抽象建立物理模型，物理模型和物理定律在很多情况下紧密联系在一起。第二步就是根据物理模型，运用数学工具建立问题的数学模型。当物理学和工程技术问题遇到和变化率有关的关系式时，数学模型很多情况下就通过推导建立数学物理方程来表示。数学物理方程建立是解决理论技术问题的关键一步，此外还需要根据各类问题自身规律，建立各种附加具体条件，从而构成典型问题的解。第三步是运用已知的数学手段或创新数学手段处理数学物理问题，具体就是求解在附加条件的数学物理方程。实际工作中，每一步研究工作都可能经过反复迭代，并根据实际结果来检验和修正，对物理规律、物理模型和数学处理手段进行不断的创新和完善。这一过程的实施，推动了人们对自然现象认识进一步深刻，对未知的形象进行新的预测。

在上述的三步研究工作之中，第一步、第二步基本属于物理学和工程科学领域。事实上，随着自然科学技术发展，各类数学物理方程的建立许多已成为各门类科学中的重要工作内容，数学主要是作为工具参与其中。有时数学工具的进步对物理学和工程科学的推动是不可缺少的。如微积分的发明，就使得牛顿力学获得了实质的进步。比较而言，第三步研究工作即数学物理方程的求解，数学色彩则要浓厚起来。对于数学物理方程的求解很多情况上是处理解决物理和工程物理的工作一部分。但求解数学物理方程的基本方法即数学物理方法更多意义上属于数学范畴。数学物理方法具有一定的通用性，这成为了本书的重点问题。

早期的科学研究者许多身兼数学家、物理学家和工程师多重角色，在众多物理和工程科学研究中针对不同数学物理方程发展了多种包括特征线方法、分离变量法、格林函数

法、积分变换法及复变函数法等在内的基本数学物理方法，这些求解方法多是解析方法，也就是给出有关方程的准确解，在求解过程中需要高度技巧性。这些基本数学物理方法在处理工程和物理问题中发挥了巨大的作用，也是人类知识体系中重要的组成部分。但由于实际问题的复杂性，运用解析法求解出准确解的数学物理方程还仅限于少数较特殊的情况。更多的数学物理方程由于其自身是非线性方程或方程组，或者定解条件的复杂，其解析求解方法一般很复杂，有些甚至是不可能的。这样数值解法（如有限单元法，有限差分法等），半解析解法（如摄动法，加权残数法等）就出现了，这些数值方法在自然科学和工程问题中发挥了巨大的作用。随着现代科学和技术的进步，新的数学物理方程将会不断涌现，其涉及范围已远远超出了传统的物理学、力学、天文学等领域。即使在传统的物理学、力学、天文学等领域，类似问题的数学物理方程也可能发生了改变，如复合材料的广泛应用，使得各向异性物理特性研究成为现实问题，但各向异性的物理特性反映到力学、热传导等领域数学物理方程上，相关数学物理方程增加了位置函数关于空间坐标的奇次交叉偏导数项，这使得原先在各向同性力学或热传导领域中的数学物理方程解析求解产生了新问题。

如根据直角坐标系下的各向同性热传导稳态问题控制偏微分方程为

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=\frac{q}{k} \tag{1-1}$$

而直角坐标系下的各向异性热传导稳态问题控制偏微分方程为

$$k_{11}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+2k_{12}\frac{\partial^2 T}{\partial x\partial y}+k_{22}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=q \tag{1-2}$$

由于交叉热传导系数 k_{12} 存在带来的 $\frac{\partial^2 T}{\partial x\partial y}$，常规的分离变量法无法求解各向异性热传导偏微分方程。

诸如各向异性在内的众多物理特性对数学物理基本方法提出了新的挑战和新的要求。本书主要介绍了数学物理方程的基本概念，数学物理问题的经典解析求解方法，同时阐述了作者提出的基于复变函数方法的复数分离变量法（复数级数展开方法），并采用复数分离变量法求解了在直角坐标、斜坐标、极坐标、柱坐标、球坐标下的各向异性偏微分方程问题。在求解过程中，作者提出了一些新的特殊函数，在有关章节中进行了阐述。下面简单地介绍数学物理方法的基本知识和概念。

1.2 基本概念

(1) 偏微分方程

未知函数具有多个自变量，含有这种未知函数的一个或多个偏导数的微分方程称为偏微分方程。如自变量只有一个就成为常微分方程。如方程不止一个，就称为偏微分方程组。

$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=\frac{q}{k}$ 就是一个典型的偏微分方程。$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{q}{k}$ 就是一个典型的常微分

方程。

(2) 偏微分方程的原函数和解

任意函数 f 在区域内具有方程中所出现的各阶偏导数，对其区域内所有点出现的各阶偏导数，在区域内所有点都一致满足偏微分方程，这个函数称为该偏微分方程的原函数，也可称为方程的解，或积分。

偏微分方程所包含的最高阶导数的阶数称为方程的阶数；最高阶导数乘幂的次数称为方程的次数。热传导方程为二阶偏微分方程。

直角坐标系下的薄板弯曲控制方程为

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{q}{D} \tag{1-3}$$

上式中 w 为待定函数，自变量为 x，y，D 是板的弯曲刚度。薄板弯曲方程具有 w 关于 x，y 的四阶偏导数，是四阶偏微分方程。

(3) 偏微分方程的阶

出现在方程中的未知函数的偏导数的最高阶数称为偏微分方程的阶，方程 (1-3) 中出现的最高阶是四阶，方程 (1-3) 也称为四阶偏微分方程。在求解弹性力学特殊正交异性壳体弯曲问题时，可以得到如下方程

$$P_1\frac{\partial^8\varphi}{\partial x^8}+P_2\frac{\partial^8\varphi}{\partial x^6\partial y^2}+P_3\frac{\partial^8\varphi}{\partial x^4\partial y^4}+P_4\frac{\partial^8\varphi}{\partial x^2\partial y^6}+P_5\frac{\partial^8\varphi}{\partial y^8}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}=q \tag{1-4}$$

以上壳体方程为八阶偏微分方程。

在采用阿穆巴诸米扬精化理论处理弹性力学正交异性扁壳时，我们可以得到十阶偏微分方程。

如果偏微分方程中，未知函数及它的所有偏导数都是线性的，且方程中的系数都仅依赖于自变量（或者是常数)，那么这样的偏微分方程就称为线性偏微分方程，特别的，如果方程中的系数都是常数，则称为常系数偏微分方程。显然，如果方程中的系数是自变量的函数，则称为变系数偏微分方程。方程中出现未知函数及偏导数不是线性的，则称为非线性偏微分方程。

在常温情况下，热传导系数 k 可以看成是常数，这样 $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=\frac{q}{k}$ 就是常系数偏微分方程。如果温度较高，热传导系数 k 可能为温度 T 的函数，可得如下偏微分方程

$$k(T)\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)=q \tag{1-5}$$

方程 (1-5) 是非线性偏微分方程。

若线性偏微分方程中有某项既不含有因变数又不含有其偏导数，则称方程是非齐次的，否则是齐次的。如对于薄板弯曲偏微分方程

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{q}{D} \tag{1-6}$$

如 q 为 0，薄板弯曲方程为齐次偏微分方程。q 不为 0，薄板弯曲方程为非齐次偏微分

方程。

若偏微分方程对未知函数的最高阶导数来说是线性的，那么就称为拟线性偏微分方程。如方程 $xu_{yy}+yu_{xx}+nu=\sin y$ 就是拟线性偏微分方程。拟线性方程中，由最高阶偏导数所组成的部分称为方程的主部。$xu_{yy}+yu_{xx}$ 为方程主部。如果方程主部的各项系数不含未知函数，则称为半线性偏微分方程。

本书主要研究二阶常系数线性偏微分方程问题，但所涉及的基本数学物理方法不局限于二阶偏微分方程。

1.3　线性偏微分方程基本性质

引入线性偏微分算子

$$L=a_0+\sum_{i=1}^{m}a_i\frac{\partial}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\beta_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\cdots,\tag{1-7}$$

则线性偏微分方程可简写为

$$L[f]=F\tag{1-8}$$

线性偏微分方程有以下性质

1）如 $f=f_1+f_2$，则 $L[f]=L[f_1]+L[f_2]$。

如 $f=cf^*$，则 $L[cf^*]=cL[f^*]$，（c 是常数）。

2）如 u 是齐次方程 $L[f]=0$ 的通解，v 是非齐次方程 $L[f]=F$ 的特解，则 $f=u+v$ 是非齐次方程 $L[f]=F$ 的通解。

3）如 $f_1,f_2,f_3,f_4,\cdots,f_n$ 是 $L[f]=0$ 的特解，则

则 $f^*=c_1f_1+c_2f_2+\cdots+c_nf_n$（$c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是常数）是 $L[f]=0$ 的解。

4）如 $\Gamma=\Gamma(x_1,x_2,\cdots,x_n;a_1,a_2,\cdots,a_l)$ 是 $L[\Gamma]=0$ 的解，则 $f=\iint\cdots\int\Gamma(x_1,x_2,\cdots,x_n;a_1,a_2,\cdots,a_l)\Psi(a_1,a_2,\cdots,a_l)\mathrm{d}a_1\mathrm{d}a_2\cdots\mathrm{d}a_l$ 是 $L[f]=0$ 的解。其中 $a_1,a_2,\cdots,a_l$ 是参变量，$\Psi(a_1,a_2,\cdots,a_l)$ 是任意函数。如 $f=cf^*$，则 $L[cf^*]=cL[f^*]$，（c 是常数）。

1.4　二阶线性偏微分方程

许多物理学、力学和工程技术问题所引出的偏微分方程都是二阶偏微分方程。目前对于二阶偏微分方程研究相对成熟些。对于有双自变量 x，y 的未知函数的二阶线性偏微分方程，可以写成如下形式

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu+f=0\tag{1-9}$$

式中，系数 a_{11},a_{12},a_{22} 都是 x，y 的函数，且 a_{11},a_{12},a_{22} 不同时为零，假设函数 u 及其系数都是二次连续可微的。

通过坐标变换能够把方程（1-9）在某一点化成标准形式，根据

$$(a_{12}^2-a_{11}a_{22})\big|_{(x_0,y_0)}\tag{1-10}$$

为正、为零或为负而定的条件，偏微分方程在这点称为是双曲型、抛物型或椭圆型的。

如果该偏微分方程在一个区域内的任意点均为双曲型的、抛物型的或椭圆型的，那么就称该偏微分方程在这区域内是双曲型、抛物型或椭圆型的。对于两个自变量的偏微分方程，在一给定的区域内总可以找到函数变换将已知方程化成标准形式，但是，就多个自变量的偏微分方程来说，这样的变换一般是较难找到。

引入函数变换

$$\xi = \varphi(x,y), \eta = \psi(x,y) \tag{1-11}$$

根据求导方法可得

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \\
u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \\
u_{xx} &= u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} \\
u_{xy} &= u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy} \\
u_{yy} &= u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}
\end{aligned} \tag{1-12}$$

将上式代入偏微分方程，可得新的二阶偏微分方程

$$A_{11} u_{\xi\xi} + 2A_{12} u_{\xi\eta} + A_{22} u_{\eta\eta} + B_1 u_\xi + B_2 u_\eta + Cu + \bar{f} = 0 \tag{1-13}$$

式中

$$\begin{aligned}
A_{11} &= a_{11} \xi_x^2 + 2a_{12} \xi_x \xi_y + a_{22} \xi_y^2 \\
A_{12} &= a_{11} \xi_x \eta_x + a_{12} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + a_{22} \eta_y \eta_y \\
A_{22} &= a_{11} \eta_x^2 + 2a_{12} \eta_x \eta_y + a_{22} \eta_y^2 \\
B_1 &= a_{11} \xi_{xx} + 2a_{12} \xi_{xy} + a_{22} \xi_{yy} + b_1 \xi_x + b_2 \xi_y \\
B_2 &= a_{11} \eta_{xx} + 2a_{12} \mu_{xy} + a_{22} \eta_{yy} + b_1 \eta_x + b_2 \eta_y \\
C &= c \\
\bar{f} &= f
\end{aligned} \tag{1-14}$$

适当地选取函数 $\xi = \varphi(x,y), \eta = \psi(x,y)$ ，可以使新方程中得以简化。

考虑偏微分方程

$$a_{11} z_x^2 + 2a_{12} z_x z_y + a_{22} z_y^2 = 0 \tag{1-15}$$

求解上式可得二个独立解 $z_1 = \varphi(x,y), z_2 = \psi(x,y)$ 。

令 $\xi = \varphi(x,y), \eta = \psi(x,y)$

即可得

$$A = 0, C = 0 \tag{1-16}$$

一阶二次偏微分方程（1-15）求解可以化为求解以下常微分方程问题

$$a_{11} \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - 2a_{12} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_{22} = 0 \tag{1-17}$$

上述方程可以改写为

$$a_{11} (\mathrm{d}y)^2 - 2a_{12} \mathrm{d}y\mathrm{d}x + a_{22} (\mathrm{d}x)^2 = 0 \tag{1-18}$$

该方程称为偏微分方程特征方程，它的积分曲线 $\varphi(x,y) = c$ 称为线性偏微分方程的

特征线。

方程（1-18）一般可以分解为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \tag{1-19}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \tag{1-20}$$

根据判别式 $\Delta=\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}$ 的三种情况化简：

1）当 $\Delta>0$ 时，方程（1-18）有两族互相独立的解 $\varphi(x,y)=c_1,\psi(x,y)=c_2$ 令 $\xi=\varphi(x,y)_1,\eta=\psi(x,y)$，方程（1-13）化简为

$$u_{\xi\eta}+\beta_1u_\xi+\beta_2u_\eta+\gamma u+\delta=0 \tag{1-21}$$

再引入新变换

$$s=\frac{\xi+\eta}{2},t=\frac{\xi-\eta}{2}$$

方程（1-21）化为

$$u_{ss}-u_{tt}+\bar{\beta}_1u_s+\bar{\beta}_2u_t+\bar{\gamma}u+\bar{\delta}=0 \tag{1-22}$$

方程（1-21）和（1-22）为双曲型方程的标准形式。

2）当 $\Delta=0$ 时，方程（1-18）只有一族的解 $\varphi(x,y)=c$，任取一个与 $\varphi(x,y)$ 独立的函数 $\psi(x,y)$。令 $\xi=\varphi(x,y)_1,\eta=\psi(x,y)$，方程（1-13）化简为

$$u_{\eta\eta}+\frac{B_1}{A_{22}}u_\xi+\frac{B_2}{A_{22}}u_\eta+\frac{C}{A_{22}}u+\frac{\bar{f}}{A_{22}}=0 \tag{1-23}$$

方程（1-23）可重新写为

$$u_{\eta\eta}+G_1u_\xi+G_2u_\eta+G_3u+G_4=0 \tag{1-24}$$

方程（1-24）为抛物型方程的标准形式。

3）当 $\Delta<0$ 时，方程（1-18）有两族互相独立的解

$$\alpha(x,y)+\mathrm{i}\beta(x,y)=c_1,\alpha(x,y)-\mathrm{i}\beta(x,y)=c_2$$

令 $\xi=\alpha(x,y)_1,\eta=\beta(x,y)$，方程（1-13）化简为

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\bar{B}_1u_\xi+\bar{B}_2u_\eta+\bar{C}u+\bar{D}=0 \tag{1-25}$$

方程（1-25）为椭圆形方程的标准形式。

对于变系数的偏微分方程，判别式 Δ 可能会根据坐标情况变化正负值或取为 0，这样给定的偏微分方程可能在区域内改变类型，这种偏微分方程被称为混合型的偏微分方程。当然对于常系数偏微分方程，其类型应该是固定的。

对于常系数的偏微分方程，双曲型方程标准形式为

$$u_{ss}-u_{tt}+\bar{\beta}_1u_s+\bar{\beta}_2u_t+\bar{\gamma}u+\bar{\delta}=0$$

抛物型方程标准形式为

$$u_{\eta\eta}+G_1u_\xi+G_2u_\eta+G_3u+G_4=0$$

椭圆形方程的标准形式为

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\bar{B}_1u_\xi+\bar{B}_2u_\eta+\bar{C}u+\bar{D}=0$$

在分别引入函数变换 $u(s,t)=\exp\left(\dfrac{-\bar{\beta}_1s+\bar{\beta}_1t}{2}\right)\bar{u}(s,t)$，$u(\xi,\eta)=\exp\left(\dfrac{-B_2\xi}{2}+\dfrac{B_2^2-4C}{4B_1}\eta\right)\times\bar{u}(\xi,\eta)$，$u(\xi,\eta)=\exp\left(-\dfrac{\bar{B}_1\xi+\bar{B}_2\eta}{2}\right)\bar{u}(\xi,\eta)$ 的情况下，可以消去所有的一阶偏微分项，方程形式可以得到进一步简化。

通过函数变换，可以化简偏微分方程形式。同时也对偏微分方程区域进行变换，以期获得容易求解的结果。这是求解数学物理问题的基本方法之一，在本书后续内容中，这种方法得到了采用。

对于多自变量 $x_i(i=1,m)$ 函数二阶线性偏微分方程

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu+f=0 \tag{1-26}$$

式中 a_{ij},b_i,c,f 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数。

通过变量代换

$$\xi_k=\xi_k(x_1,x_2,\cdots.,x_n),k=1,2,\cdots,n \tag{1-27}$$

其中 $J=\dfrac{\partial(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\neq0$。

可将方程（1-26）变换为相应的标准型式

$$\sum_{i=1}^{n}u_{x_ix_i}+\sum_{i=1}^{n}B_iu_{x_i}+Cu+F=0 \quad \text{（椭圆型）；}$$

$$\sum_{i=1}^{n=m}u_{x_ix_i}+\sum_{i=1}^{n}B_iu_{x_i}+Cu+F=0 \quad \text{（抛物型）；}$$

$$u_{x_1x_1}-\sum_{i=2}^{n}u_{x_ix_i}+\sum_{i=1}^{n}B_iu_{x_i}+Cu+F=0 \quad \text{（双曲型）；}$$

$$\sum_{i=1}^{m}u_{x_ix_i}-\sum_{i=m+1}^{n}u_{x_ix_i}+\sum_{i=1}^{n}B_iu_{x_i}+Cu+F=0 \quad \text{（超双曲型）}$$

1.5 定解条件和定解问题

对于不同的数学物理问题，可以根据不同问题性质，运用数学手段建立物理模型，然后抽象成数学模型，建立数学物理方程，这种方程称为泛定方程，因为还不能确定具体的物理过程，还需要根据问题特点给出其约束条件，如给定区域热传导问题，需要给出区域边界导热条件，对于非稳态导热问题，需要给出初始热状态。对于板壳力学问题也一样，建立板壳力学控制方程后，也要给出板壳边界约束条件，对于动力学问题，还要给出初始状态位移速度条件。这对一般物理现象是普适的，每一个问题状态都处在特定的条件之下，反映在对它开始考察时的状态（初始条件）以及周围环境对它的影响（边界条件）上，这些条件统称为定解条件。给定了泛定方程和相应定解条件的数学物理问题称为定解

问题。一般定解问题分为三类：

初值问题：只有初始条件而没有边界条件的定解问题称为初值问题或柯西问题。

边值问题：只有边值条件而没有初始条件的定解问题称为边值问题。

边值问题中，直接规定边界上的数值，称为第一类边值条件；规定边界上函数导数（或导数组合，但不含有边界上函数值）的边值条件，称为第二类边值条件；既不规定边界上的函数值，也不直接规定边界上函数导数的数值，而是规定边界上的函数导数和函数值线性组合的边值条件，称为第三类边值条件。

混合问题：既有边界条件又有初始条件的定解问题称为混合问题。

在处理实际问题中，所建立的边界条件、初始条件都是相对的，可以根据实际情况进行简化。有些边界条件简化是出于处理方法的可实施性，如对于基于经典理论的薄板自由边界问题，自由边的弯矩、扭矩和横向剪力均为 0，但经典理论框架下只有给定 2 个边界约束条件，这样对扭矩和横向剪力进行了合并简化成综合剪力，这样每个自由边界给出弯矩和综合剪力 2 个边界条件，这样就具备了求解问题的前提。一般来说，特别是在处理工程问题时，如何将实际边界约束条件，抽象简化为具体边界约束条件，是十分重要的，同时也是不容易的。实际上，这些工作属于各相关物理和工程科学领域的工作。

在混合问题中，边界条件和初始条件之间也存在协调问题。原则上说，控制方程给出了研究区域内的状态控制规律，边界条件给出了边界上有关限制条件，初始条件给出了区域内的初始状态条件，这样在边界上状态控制以边界条件为主，也就是说初始条件在边界上要满足边值条件限制。

1.6 适定性

实际问题归结为定解问题后，一般需要在数学理论方面上研究这一定解问题解的存在性、唯一性和稳定性。一般来说，如果一个定解问题正确地反映客观实际，这个定解问题解就是存在的，且只有一个解，这时就称定解问题的解具有存在惟一性。

对于一个解只是唯一的，还是不够的。在实际问题中，在建立泛定方程时作了一些近似，另一方面，定解条件中参数也由测量得到，难免有误差，如部分系数、参数有微小变化时，其解有较大变化，解是不稳定的，那么相应求解就失去了意义。而实际工作需要的解是应该稳定的。如果该问题解对定解数据是连续依赖的，那么所得解具有稳定性。实际计算中，研究解的稳定性直接方法是微小调整计算参数，观察计算结果的稳定性。

如果一个定解问题存在唯一且稳定的解，这个定解问题就是适定的。值得注意的是，这里没有说是解的形式唯一，但解的数值应该相同。

1.7 叠加原理

本书主要讨论的线性偏微分方程定解问题，此类问题可以采用叠加原理求解。迄今为

止，线性近似仍然是物理学和工程技术中最基本的近似。例如，在牛顿力学中，加速度与外力成正比，质量是常数，与质点运动的速度大小无关，但在相对论理论中，质量和速度相关，在接近光速条件下，质量的速度效应就更加明显。在弹性力学中，在弹性限度内，应力与应变成正比（胡克定律），弹性系数是常数，与应变的大小无关，但在塑性状态下，胡克定律就失效。在热传导现象中，热流密度与温度梯度成正比，导热率是物质常数，与温度高低无关；实践中发现导热率与温度相关，特别是高温状态下。对应地，描述在特定状态（如低速的，应力低的，温度不很高的等）数学物理方程可以是线性偏微分方程，定解条件也是线性的，这种状态下叠加原理是适用的。但对非线性问题来说，非线性方程解不再具有线性叠加性质，求解更加复杂。本书主要讨论线性问题。

1.8 傅立叶级数

傅立叶级数是数学物理方法中重要的技术基础。

1.8.1 单重傅立叶级数

假设 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上可积，三角级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x)$ 为 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上的傅立叶级数，可写为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x) \tag{1-28}$$

其中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x(n=0,1,2,\cdots)$$

如果 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上是偶函数，则有

$$a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x\ (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=0(n=0,1,2,\cdots)$$

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x$$

如果 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上是奇函数，则有

$$b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x\ (n=0,1,2,\cdots)$$

$$a_n=0\ (n=0,1,2,\cdots)$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

傅立叶级数还具有复数形式

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\pi x}{l}} \tag{1-29}$$

其中 $c_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-\frac{\mathrm{i}n\pi x}{l}} \mathrm{d}x (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 。

1.8.2 二重傅立叶级数

假设双重变量函数假设 $f(x, y)$ 在矩形区域 R $[-l \leqslant x \leqslant l, -h \leqslant y \leqslant h]$ 上绝对可积，那么该函数的双重复数形式傅立叶级数为

$$f(x, y) \sim \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} c_{m,n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\left(\frac{mx}{l} + \frac{ny}{h}\right)} \tag{1-30}$$

其中 $c_{m,n} = \frac{1}{4lh}\iint\limits_{R} f(x, y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\left(\frac{mx}{l} + \frac{ny}{h}\right)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 。

实数形式双重傅立叶级数为

$$f(x, y) \sim \sum_{m,n=0}^{\infty} \lambda_{m,n} \Big[a_{m,n} \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi y}{h} + b_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi y}{h} + c_{m,n} \cos \frac{m\pi \mathrm{x}}{l} \sin \frac{n\pi y}{h} + d_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{h} \Big] \tag{1-31}$$

其中

$$\lambda_{m,n} = \begin{cases} \frac{1}{4} (\mathrm{m} = \mathrm{n} = 0) \\ \frac{1}{2} \ (m > 0, n = 0 \text{ 或 } m = 0, n > 0) \\ 1 \ (m > 0, n > 0) \end{cases}$$

$$a_{m,n} = \frac{1}{lh}\iint\limits_{R} f(x, y) \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi y}{h} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$b_{m,n} = \frac{1}{lh}\iint\limits_{R} f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi y}{h} \mathrm{dxd}y$$

$$c_{m,n} = \frac{1}{lh}\iint\limits_{R} f(x, y) \cos \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{h} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$d_{m,n} = \frac{1}{lh}\iint\limits_{R} f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{h} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

二重傅立叶级数展开条件：如果函数 $f(x, y)$ 矩形区域 R 内满足条件：

在 R 上偏导数 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ 处处存在并且有界；在 R 上的每个内点（x_0，

y_0）的某个邻域内，二阶偏导数 $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$ $\left[\text{或}\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}\right]$存在并且连续；那么 $f(x,y)$ 可展开为傅立叶级数。

1.8.3　三重傅立叶级数

假设三重变量函数假设 $f(x,y,z)$ 在矩形柱区域 R $[-l \leqslant x \leqslant l, -h \leqslant y \leqslant h, -w \leqslant z \leqslant w]$ 上绝对可积，那么该函数的三重复数形式傅立叶级数为

$$f(x,y,z) \sim \sum_{m,n,k=-\infty}^{\infty} c_{m,n,k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\left(\frac{mx}{l}+\frac{ny}{h}+\frac{kz}{w}\right)} \tag{1-32}$$

其中

$$c_{m,n,k} = \frac{1}{8lhw} \iiint_R f(x,y,z) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\left(\frac{mx}{l}+\frac{ny}{h}+\frac{kz}{w}\right)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z (m,n,k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

实数形式三重傅立叶级数为

$$f(x,y,z) \sim \sum_{m,n,k=0}^{\infty} \begin{aligned} &\lambda_{m,n,k}\Big[a_{m,n,k}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi y}{h}\cos\frac{k\pi z}{w} + b_{m,n,k}\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi y}{h}\cos\frac{k\pi z}{w} + \\ &c_{m,n,k}\cos\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{h}\cos\frac{k\pi z}{w} + d_{m,n,k}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{h}\cos\frac{k\pi z}{w} + \\ &e_{m,n,k}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi y}{h}\sin\frac{k\pi z}{w} + f_{m,n,k}\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi y}{h}\sin\frac{k\pi z}{w} + \\ &g_{m,n,k}\cos\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{h}\sin\frac{k\pi z}{w} + p_{m,n,k}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{h}\sin\frac{k\pi z}{w}\Big] \end{aligned} \tag{1-33}$$

其中

$$\lambda_{m,n,k} = \begin{cases} \dfrac{1}{8}\ (m = n = k = 0) \\ \dfrac{1}{4}\ (k = 0, m > 0, n = 0 \text{ 或 } k = 0, m = 0, n > 0 \text{ 或 } k > 0, m = 0, n = 0) \\ \dfrac{1}{2}(k > 0, m > 0, n = 0 \text{ 或 } k > 0, m = 0, n > 0 \text{ 或 } k = 0, m > 0, n > 0) \\ 1\ (m > 0, n > 0, k > 0) \end{cases}$$

$$a_{m,n,k} = \frac{1}{lhw}\iiint_R f(x,y,z)\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi y}{h}\cos\frac{k\pi z}{w}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$b_{m,n,k} = \frac{1}{lhw}\iiint_R f(x,y,z)\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi y}{h}\cos\frac{k\pi z}{w}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$c_{m,n,k} = \frac{1}{lhw}\iiint_R f(x,y,z)\cos\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{h}\cos\frac{k\pi z}{w}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$d_{m,n,k} = \frac{1}{lhw}\iiint_R f(x,y,z)\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{h}\cos\frac{k\pi z}{w}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$e_{m,n,k} = \frac{1}{lhw}\iiint_R f(x,y,z)\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi y}{h}\sin\frac{k\pi z}{w}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$f_{m,n,k} = \frac{1}{lhw}\iiint_R f(x,y,z)\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi y}{h}\sin\frac{k\pi z}{w}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$g_{m,n,k} = \frac{1}{lhw}\iiint_R f(x,y,z)\cos\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{h}\sin\frac{k\pi z}{w}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$p_{m,n,k} = \frac{1}{lhw}\iiint_R f(x,y,z)\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{h}\sin\frac{k\pi z}{w}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$(m,n,k = 0,1,2,\cdots)$$

1.9 积分变换

积分变换是常用的数学物理方法之一。积分变换是通过积分，把一个函数变换成另外一个函数

$$T[f(x)] = \int_a^b K(s,x)f(x)\mathrm{d}x = F(s) \tag{1-34}$$

式中 $K(s,x)$ ——已知函数，称为积分变换的核；

$F(s)$ ——象函数；

$f(x)$ ——原函数（或原象函数）。

如果积分限 a 和 b 是有限值，则称 $F(s)$ 是 $f(x)$ 的有限积分变换式。根据积分核 $K(s,x)$ 的不同，可以有多种积分变换，通常包括有傅立叶变换，拉普拉斯变换，梅林变换，汉克尔变换，勒让德变换。

1.9.1 傅立叶积分变换

定义

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{1-35}$$

则

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{1-36}$$

式（1-35）定义的 $F(\omega)$ 称为 $f(t)$ 的傅立叶积分变换（或象函数），记为 $F[f(t)]$。

$$F[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

式（1-36）为傅立叶积分变换的反演公式，$f(t)$ 称为 $F(\omega)$ 的傅立叶积分反变换（或原象函数），记为 $F^{-1}[F(\omega)]$。

傅立叶正弦变换。定义

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t \tag{1-37}$$

则

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}F(\omega)\sin(\omega t)\mathrm{d}\omega \tag{1-38}$$

式（1－37）定义的 $F(\omega)$ 称为 $f(t)$ 的傅立叶正弦变换（或象函数），式（1－38）为傅立叶正弦变换的反演公式。

傅立叶余弦变换。定义

$$F(\omega)=\int_0^{\infty}f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t \tag{1-39}$$

则

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}F(\omega)\cos(\omega t)\mathrm{d}\omega \tag{1-40}$$

式（1－39）定义的 $F(\omega)$ 称为 $f(t)$ 的傅立叶余弦变换（或象函数），式（1－40）为傅立叶余弦变换的反演公式。

傅立叶积分变换的性质

（1）线性关系

设 A ，B 为 两个实数，$F[f_1(t)]=F_1(\omega),F[f_2(t)]=F_2(\omega)$ 则

$$F[Af_1(t)+Bf_2(t)]=AF_1(\omega)+BF_2(\omega)$$

$$F^{-1}[AF_1(\omega)+BF_2(\omega)]=Af_1(t)+Bf_2(t)$$

（2）位移定理

函数 $f(t)$ 沿 t 轴方向位移 t_0 ，对于其傅立叶变换乘以因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}$ ，即

$$F[f(t\mp t_0)]=\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\omega t_0}F[f(t)]$$

（3）微分定理

函数求导后取傅立叶积分变换等于这个函数的傅立叶积分变换乘以 iω，即

$$F[f'(t)]=\mathrm{i}\omega F[f(t)]$$

推论 $F[f^{(n)}(t)]=(\mathrm{i}\omega)^nF[f(t)]$

（4）积分定理

函数积分后取傅立叶积分变换等于这个函数的傅立叶积分变换除以 iω，即

$$F\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{i\omega}F[f(t)]$$

（5）乘积定理

设 $F_1(\omega)=F[f_1(t)],F_2(\omega)=F[f_2(t)]$ ，则

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)f_2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{F_1(\omega)}F_2(\omega)\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{F_2(\omega)}F_1(\omega)\mathrm{d}\omega$$

其中 $\overline{F_1(\omega)},\overline{F_2(\omega)}$ 分别为 $F_1(\omega)$ ，$F_2(\omega)$ 的共轭函数。

（6）卷积定理

对于已知函数 $f_1(t),f_2(t)$ ，则 $\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ 称为函数 $f_1(t),f_2(t)$ 的卷积，记

为函数 $f_1(t) * f_2(t)$，即 $f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) \mathrm{d}\tau$。

卷积定理：设 $F_1(\omega) = F[f_1(t)], F_2(\omega) = F[f_2(t)]$，则 $F[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega) F_2(\omega)$ 或 $F^{-1}[F_1(\omega) F_2(\omega)] = f_1(t) * f_2(t)$。

1.9.2 拉普拉斯变换

定义

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t \tag{1-41}$$

则

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\omega}^{c+i\omega} F(s) \mathrm{e}^{st} \mathrm{d}s \tag{1-42}$$

式（1-41）定义的 $F(s)$ 称为 $f(t)$ 的拉普拉斯变换（或象函数），记为 $L[f(t)]$。

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t$$

式（1-42）为 $F(s)$ 的反演公式，$f(t)$ 称为 $F(s)$ 的拉普拉斯反变换（或原象函数），记为 $L^{-1}[F(s)]$。

拉普拉斯变换的性质

（1）线性关系

设 A，B 为两个实数，$L[f_1(t)] = F_1(s), L[f_2(t)] = F_2(s)$ 则

$$L[Af_1(t) + Bf_2(t)] = AF_1(s) + BF_2(s)$$

（2）位移定理

象原函数位移：对于实数 $t_0 \geqslant 0$，有

$$\int_0^{\infty} f(t-t_0) \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t = F(s) \mathrm{e}^{-st_0}$$

$$\int_0^{\infty} f(t+t_0) \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{st_0} \left[F(s) - \int_0^{t_0} f(t) \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t \right]$$

象函数位移：对于实数 λ，有 $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\lambda t} f(t) \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t = F(s-\lambda)$

（3）微分定理

对象原函数微分

$$L[f'(t)] = sF(s) - f(0^+)$$

$$L[f''(t)] = s^2 F(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$$

$$\cdots$$

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) - \cdots - f^{(n-1)}(0^+)$$

对象函数的微分

$$L[-tf(t)] = F'(s) = -\int_0^{\infty} tf(t) \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t$$

$$L[(-t)^n f(t)] = F^{(n)}(s) = \int_0^\infty (-t)^n f(t) e^{-st} dt$$

(4) 积分定理

对象原函数积分

$$L\left[\int_0^t f(u) du\right] = \int_0^\infty \left[\int_0^t f(u) du\right] e^{-st} dt = \frac{F(s)}{s} = \frac{\int_0^\infty f(t) e^{-st} dt}{s}$$

对象函数积分

$$\int_0^\infty F(s) ds = L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt$$

(5) 乘法定理

设 $F(s) = L[f(t)], G(s) = L[g(t)]$，则

$$\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau\right] e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \cdot \int_0^\infty g(t) e^{-st} dt$$

(6) 周期函数的象函数

对于 $f(t+nT) = f(t), n = 0, 1, 2, \cdots$，则 $\int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T f(t) e^{-st} dt$

1.9.3 梅林变换

定义

$$F(s) = \int_0^\infty f(x) x^{s-1} dx, \ \alpha < \mathrm{Re}(s) < \beta \tag{1-43}$$

则

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} F(s) ds \tag{1-44}$$

式 (1-43) 定义的 $F(s)$ 称为 $f(x)$ 的梅林变换，记为 $M[f;s]$，即 $M[f;s] = \int_0^\infty f(x) x^{s-1} dx$

式 (1-44) 称为梅林反演公式。

梅林变换主要性质如下

(1) 微分定理

如 $F(s) = \int_0^\infty f(x) x^{s-1} dx$ ($\alpha < \mathrm{Im}(s) < \beta$)，则

$$\int_0^\infty \frac{df(x)}{dx} x^{s-1} dx = -(s-1) F(s-1) \qquad [\alpha < \mathrm{Im}(s) < \beta]$$

一般地，$\int_0^\infty \frac{d^n f(x)}{dx^n} x^{s-1} dx = (-1)^n \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-n)} F(s-n)$

(2) 乘幂定理

如 $F(s) = \int_0^\infty f(x) x^{s-1} dx \qquad [\alpha < \mathrm{Im}(s) < \beta]$，则

$$\int_0^{\infty} f(x)x^{\mu}x^{s-1}\mathrm{d}x = F(s+\mu)$$

(3) 卷积定理

如 $F(s) = \int_0^{\infty} f(x)x^{s-1}\mathrm{d}x$，$G(s) = \int_0^{\infty} g(x)x^{s-1}\mathrm{d}x \quad [\alpha < \mathrm{Im}(s) < \beta]$，设

$$h(x) = \int_0^{\infty} y^{\mu} f(xy)g(y)\mathrm{d}y$$

则 $H(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1}\mathrm{d}x \int_0^{\infty} y^{\mu} f(xy)g(y)\mathrm{d}y = F(s)G(\mu - s + 1)$

设

$$k(x) = \int_0^{\infty} y^{\mu} f(x/y)g(y)\mathrm{d}y$$

则 $K(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1}\mathrm{d}x \int_0^{\infty} y^{\mu} f(x/y)g(y)\mathrm{d}y = F(s)G(\mu + s + 1)$

1.9.4 汉克尔变换

定义

$$H(\xi) = \int_0^{\infty} xf(x)\mathrm{J}_{\nu}(\xi x)\mathrm{d}x \tag{1-45}$$

式中 $\mathrm{J}_{\nu}(x)$ 是 ν 阶贝塞尔函数。则 $H(\xi)$ 称为 $f(x)$ 的 ν 阶汉克尔变换，记作 $\chi_{\nu}[f(x)]$，即 $H(\xi) = \chi_{\nu}[f(x)]$。汉克尔变换的反演公式为

$$f(x) = \int_0^{\infty} \xi H(\xi) J_{\nu}(\xi x)\mathrm{d}\xi \tag{1-46}$$

汉克尔变换主要性质如下

1) $\chi_{\nu}[f(Cx)] = \frac{1}{C^2} H\left(\frac{\xi}{C}\right)$ (C 为常数)

2) $\chi_{\nu}[\frac{f(x)}{x}] = \frac{\xi}{2\nu}\{\chi_{\nu-1}[f(x)] + \chi_{\nu+1}[f(x)]\}$

3) $\chi_{\nu}[f''(x) + \frac{1}{x}f'(x) - \frac{\nu^2}{x^2}f(x)] = -\xi^2\chi_{\nu}[f(x)]$

有限汉克尔变换。$f(x)$ 的有限汉克尔变换为

$$\bar{H}(p_i) = \int_0^{a} xf(x)J_{\nu}(p_i x)\mathrm{d}x \tag{1-47}$$

式中 $J_{\nu}(x)$ 是 ν 阶贝塞尔函数，p_i 是方程 $J_{\nu}(p_i a) = 0$ 的一个根。

有限汉克尔变换的反演公式为

$$f(x) = \frac{2}{a^2}\sum_i \bar{H}(p_i)\frac{J_{\nu}(p_i x)}{[J'_{\nu}(p_i a)]^2}$$

式中 $\sum_i$ 是对方程 $J_{\nu}(p_i a) = 0$ 的所有正根求和。

1.9.5 勒让德变换

定义

$$G(n)=\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots) \tag{1-48}$$

式中 $P_n(x)$ 是 n 阶勒让德多项式。则 $G(n)$ 称为 $f(x)$ 的勒让德变换。根据勒让德多项式的正交性可以展开函数。如 $f(\mu)$ 可展成 $f(\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(\mu)$，其中系数

$$a_n=\frac{\int_{-1}^{1}f(\mu)P_n(\mu)\mathrm{d}\mu}{\int_{-1}^{1}[P_n(\mu)]^2\mathrm{d}\mu}=\frac{G(n)}{\int_{-1}^{1}[P_n(\mu)]^2\mathrm{d}\mu}$$

勒让德变换的反演公式为

$$f(\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{G(n)}{\int_{-1}^{1}[P_n(\mu)]^2\mathrm{d}\mu}P_n(\mu) \tag{1-49}$$

1.10 伽马函数

伽马函数是常用的函数。伽马函数对 $x>0$ 定义为

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$

$\Gamma(x)$ 是广义积分，对所有的 $x>0$ 收敛，伽马函数的基本性质

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$

由分部积分法证明此式如下：

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{\infty}t^x\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=-t^xe^{-t}\,|_0^{\infty}+x\int_0^{\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=x\Gamma(x)$$

$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ 可用来简化公式：

$$\begin{aligned}&\Gamma(1+p)[(1+p)(2+p)\cdots(k+p)]\\=&\Gamma(2+p)[(2+p)\cdots(k+p)]\\=&\Gamma(3+p)[\cdots(k+p)]\\=&\cdots\\=&\Gamma(k+p+1)\end{aligned}$$

这在贝塞尔函数简化中可得到应用。

利用积分公式可以容易地求出伽马函数在正整数点上的值：

$$\Gamma(1)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=1$$

由基本性质知

$$\Gamma(1)=1\ \Gamma(2)=1!\ \Gamma(3)=2!\ \Gamma(4)=3!,\cdots$$

依此类推，有

$$\Gamma(n+1)=n!$$

$n=0,1,2,3,\cdots$

规定 0! =1，称伽马函数是广义阶乘函数。

$\Gamma(x)$ 有一个重要的计算结果：$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$。这样

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{15}{8}\sqrt{\pi}$$

虽然只对 $x>0$ 定义了伽马函数，但可以推广它的定义到除去 0，－1，－2，－3，…以外的全体实数上，并且使基本性质仍然成立．将基本性质改写为

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\Gamma(x+1)$$

然后，由伽马函数在 $x+1$ 的值定义它在 x 的值。这就很清楚地把伽马函数的定义推广到不包括－1，－2，－3，…以外的全体负实数上。

第 2 章　直角坐标系下的分离变量法

2.1　概述

分离变量法是求解偏微分方程定解问题的最常用解法。分离变量法就是在偏微分方程和边界条件都是齐次的情况，将待定函数分离为各独立自变量的子函数乘积，然后将各子函数乘积代入偏微分方程，在实现对偏微分方程的分离变量条件下，可得到（一个或多个）含有待定常数（分离变量常数）的齐次常微分方程，按得到常微分方程求解出特解，将相关特解叠加后代入部分定解条件，一般根据未知函数非平凡解的要求，确定本征值，本征函数。再将全部本征函数形式特解叠加得到一般解，再将一般代入边界条件，利用本征函数的正交性求出待定常数。分离变量法适用范围是所研究的偏微分方程能够分离变量，换言之有些方程是不能分离变量的，具体情况具体分析。直角坐标下的偏微分方程求解是相对容易理解，本章主要针对在直角坐标系下偏微分方程进行求解。下面针对一些例子来介绍分离变量法实施程序。

2.2　分离变量法实施过程

2.2.1　两端固定弦的振动问题

考虑长为 l 、两端固定的弦的振动混合问题，控制偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,0<x<l,t>0 \tag{2-1}$$

边界条件为

$$u\,|_{x=0}=0,u\,|_{x=l}=0,\ t\geqslant 0 \tag{2-2}$$

初始条件为

$$u\,|_{t=0}=\varphi(x),\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\varphi(x)\ ,\ 0\leqslant x\leqslant l \tag{2-3}$$

求解过程可分解为下列四步。

第一步：分离变量

设

$$u(x,t)=X(x)T(t) \tag{2-4}$$

将式（2-4）代入方程（2-1），即得

$$X(x)T''(t)=a^2X''(x)T(t)$$

这样可将上式两端除以 $X(x)T(t)$，可得

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \tag{2-5}$$

式（2-5）中，左端只是 t 的函数，右端只是 x 的函数。要求左端和右端相等，就必须共同等于一个既与 x 无关、又与 t 无关的常数 $-\lambda$。上面的结果又可以写成

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \tag{2-6}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \tag{2-7}$$

将式（2-4）代入边界条件，可得

$$X(0)T(t) = 0, X(l)T(t) = 0$$

考虑到 $T(t)$ 不可能为 0，可以得到

$$X(0) = 0, X(l) = 0 \tag{2-8}$$

将式（2-4）代入初始条件（2-3），目前还不会得到有意义的结果，在后面再利用初始条件。这样在式（2-7）和（2-8）基础上这样建立了 $X(x)$ 的边值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, X(l) = 0 \end{cases} \tag{2-9}$$

式（2-9）含有齐次常微分方程、一对齐次边界条件和一个待定常数 λ，这就决定了只有当 λ 取某些特定值时，才有既满足齐次常微分方程、又满足齐次边界条件的非零解 $X(x)$。这样式（2-9）也构成了一个特征值问题，λ 就是特征值，非零的 $X(x)$ 称为特征函数。下面需要求解这个特征值问题。

第二步：求解特征值问题

求解特征值问题（2-9）的关键在于 λ，不同类型的 λ 可导致不同特征函数。

1）当 $\lambda = 0$ 时，方程（2-7）的通解是

$$X(x) = Ax + B$$

代入边界条件（2-8），可得 $A = B = 0$，$\lambda = 0$ 不是特征值。

2）当 $\lambda < 0$ 时，方程（2-7）的通解是

$$X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

代入边界条件（2-8），可得 $A = B = 0$，$\lambda < 0$ 也不是本征值.

3）当 $\lambda > 0$ 时，方程（2-7）的通解是

$$X(x) = A\sin\sqrt{\lambda}\,x + B\cos\sqrt{\lambda}\,x$$

代入边界条件（2-8），就有 $B = 0, A\sin\sqrt{\lambda}l = 0$。$A$ 不能为 0，只能 $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$。这样可得

$$\sqrt{\lambda}l = n\pi, n = 1,2,3,\cdots$$

和

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \tag{2-10}$$

特征函数为

$$X_n(x) = C_n \sin\frac{n\pi x}{l}, n = 1,2,3,\cdots \tag{2-11}$$

其中 C_n 为任意常数，特征值 $\lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$。

第三步：求得一般解析解

将式（2－10）代入方程（2－6），可得

$$T_n(t) = a_n \cos\frac{n\pi at}{l} + b_n \sin\frac{n\pi at}{l}, n = 1,2,3,\cdots \tag{2-12}$$

综合式（2－11）和（2－12）可得

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(A_n \cos\frac{n\pi at}{l} + B_n \sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}, n = 1,2,3,\cdots \tag{2-13}$$

上式中 A_n, B_n 是任意常数。

将式（2－13）全部解叠加起来可以得到

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi at}{l} + B_n \sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{2-14}$$

根据线性偏微分方程可叠加性原理，式（2－14）满足控制方程和边界条件。考虑到初始条件（2－3）还没有引用，也就是还没有满足，那么将式（2－14）代入式（2－3），以满足初始条件，可确定待定常数。

第四步：确定待定系数

将式（2－14）代入初始条件（2－3），可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l} = \varphi(x) \tag{2-15}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi x}{l} B_n \sin\frac{n\pi x}{l} = \varphi(x) \tag{2-16}$$

按照正弦级数正交性，可以求得

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \tag{2-17}$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \tag{2-18}$$

这样完成了两端固定弦的振动问题求解，问题解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\frac{n\pi at}{l}\left(\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\right) + \sin\frac{n\pi at}{l}\left(\frac{2}{n\pi a}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\right)\right]\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{2-19}$$

这个数学物理问题既包括边界条件，又包括初始条件，边界条件是齐次的，初始条件是给定，这样求解中根据齐次性的边界条件确定特征值和特征函数，再根据特征函数的正交性利用给定的初始条件确定待定系数。

2.2.2　矩形域内的各向同性热传导稳态问题

分离变量法可用于求解热传导方程稳态问题。各向同性热传导稳态问题偏微分控制方

程为

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0,0<x<a,0<y<b \tag{2-20}$$

方程（2－20）就是著名的拉普拉斯方程。

边界条件为

$$u\mid_{x=0}=0,\frac{\partial u}{\partial x}\mid_{x=a}=0,\ 0\leqslant y\leqslant b \tag{2-21}$$

$$u\mid_{y=0}=f(x),\frac{\partial u}{\partial y}\mid_{y=b}=0,\ 0\leqslant x\leqslant a \tag{2-22}$$

第一步：分离变量

采用分离变量法求解此问题，设

$$u(x,y)=X(x)Y(y) \tag{2-23}$$

将式（2－23）代入方程（2－20）

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\lambda \tag{2-24}$$

λ 是一个与 x 无关、又与 y 无关的常数。式（2－24）可写为

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \tag{2-25}$$

$$Y''(y)-\lambda Y(y)=0 \tag{2-26}$$

将式（2－23）代入边界条件（2－21），可得

$$X(0)=0,X'(a)=0 \tag{2-27}$$

式（2－25）和（2－27）就构成了一个特征值问题，

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0\\X(0)=0,X'(a)=0\end{cases} \tag{2-28}$$

特征值为 λ 。下面需要求解这个特征值问题。

第二步：求解特征值问题

求解特征值问题（2－28）。不同类型的 λ 可导致不同特征函数，下面分情况讨论：

1）当 $\lambda=0$ 时，方程（2－25）的通解是

$$X(x)=Ax+B \tag{2-29}$$

代入边界条件（2－27），可得 $A=B=0$，$\lambda=0$ 不是特征值。

2）当 $\lambda<0$ 时，方程（2－25）的通解是

$$X(x)=Ae^{\sqrt{-\lambda}x}+Be^{-\sqrt{-\lambda}x} \tag{2-30}$$

代入边界条件（2－27），可得 $A=B=0$，$\lambda<0$ 也不是特征值。

3）当 $\lambda>0$ 时，方程（2－25）的通解是

$$X(x)=A\sin\sqrt{\lambda}x+B\cos\sqrt{\lambda}x \tag{2-31}$$

代入边界条件（2－27），可得 $B=0$，$\cos\sqrt{\lambda}a=0$ 。这样可得

$$\sqrt{\lambda}a=(n+\frac{1}{2})\pi,n=0,1,2,3,\cdots$$

和

$$\lambda = [(n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{a}]^2 \tag{2-32}$$

特征函数为

$$X_n(x) = C_n \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{a}\right], n = 1,2,3,\cdots \tag{2-33}$$

其中 C_n 为任意常数。

第三步：求得一般解析解

分离变量参数 λ（特征值）确定以后，就可以推导一般解析解。将式（2 - 32）代入式（2 - 26）可求出

$$Y_n(y) = C_n \sinh\frac{2n+1}{2a}\pi y + D_n \cosh\frac{2n+1}{2a}\pi y \tag{2-34}$$

综合式（2 - 33）和（2 - 34），就得到了满足控制方程和齐次边界条件的特解

$$u_n(x,y) = \left(C_n \sinh\frac{2n+1}{2a}\pi y + D_n \cosh\frac{2n+1}{2a}\pi y\right) sin\frac{2n+1}{2a}\pi x \tag{2-35}$$

将全部特解叠加起来，得到一般解

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(C_n \sinh\frac{2n+1}{2a}\pi y + D_n \cosh\frac{2n+1}{2a}\pi y\right) sin\frac{2n+1}{2a}\pi x. \tag{2-36}$$

第四步：确定待定系数

将式（2 - 36）代入关于 y 方向的一对边界条件（2 - 22）

$$u\,|_{y=0} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n sin\frac{2n+1}{2a}\pi x = f(x) \tag{2-37}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\,|_{y=b} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2a}\pi\left(C_n \cosh\frac{2n+1}{2a}\pi b + D_n \sinh\frac{2n+1}{2a}\pi b\right) sin\frac{2n+1}{2a}\pi x = 0 \tag{2-38}$$

考虑到特征函数［正弦函数（2 - 33）］的正交性

$$\int_0^a \sin\frac{2n+1}{2a}\pi x \quad \sin\frac{2m+1}{2a}\pi x \mathrm{d}x = \frac{a}{2}\delta_{mn} \tag{2-39}$$

根据式（2 - 38）和（2 - 39）就可以求得

$$D_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{2n+1}{2a}\pi x \mathrm{d}x \tag{2-40}$$

$$C_n \cosh\frac{2n+1}{2a}\pi b + D_n \sinh\frac{2n+1}{2a}\pi b = 0 \tag{2-41}$$

由式（2 - 41）可得

$$c_n = - D_n \tanh\frac{2n+1}{2a}\pi b \tag{2-42}$$

至此，求得了此各向同性热传导稳态问题一般解析解。

这个数学物理问题与 2.2 节引入的问题不同，只包括边界条件，而没有初始条件，在边界条件中，一部分边界条件是齐次的，另一些边界条件是非齐次，求解中根据齐次性的那部分边界条件确定特征值和特征函数，再根据特征函数的正交性利用给定的另一部分初

始条件确定待定系数。这个各向同性稳态热传导问题就属于一种典型的数学物理问题。

2.2.3 二维矩形域内各向同性热传导非稳态问题

考虑矩形各向同性介质的热传导问题，假设矩形介质四周绝热。二维各向同性热传导非稳态问题控制偏微分方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\kappa\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0,0<x<a,0<y<b,t>0 \tag{2-43}$$

边界条件为

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=0,\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=a}=0\ ,\ 0\leqslant y\leqslant b\ ,\ t\geqslant 0 \tag{2-44}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=0,\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=b}=0\ ,\ 0\leqslant x\leqslant a\ ,\ t\geqslant 0 \tag{2-45}$$

初始条件为

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x,y),0\leqslant x\leqslant a\ ,\ 0\leqslant y\leqslant b \tag{2-46}$$

第一步：分离变量

设

$$u(x,y,t)=X(x)Y(y)T(t) \tag{2-47}$$

将式（2-47）代入方程（2-43），可得

$$\frac{X(x)}{X(x)}+\frac{Y(y)}{Y(y)}-\frac{1}{\kappa}\frac{T'(t)}{T(t)}=0 \tag{2-48}$$

此等式成立，意味着式中各项均应为常数，即

$$X''(x)+\mu X(x)=0, \tag{2-49}$$

$$Y''(y)+\nu Y(y)=0, \tag{2-50}$$

$$T'(t)+\lambda\kappa T(t)=0, \tag{2-51}$$

其中 μ,ν,λ 为待定常数，$\mu+\nu=\lambda$ 。

将式（2-47）代入边界条件（2-44），可得

$$X'(0)=0,X'(a)=0 \tag{2-52}$$

将式（2-47）代入边界条件（2-45），可得

$$Y'(0)=0,Y'(b)=0 \tag{2-53}$$

这样式（2-49）和（2-52），式（2-50）和（2-53）分别构成了两个特征值问题。

$$\begin{cases}X''(x)+\mu X(x)=0\\X'(0)=0,X'(a)=0\end{cases} \tag{2-54}$$

$$\begin{cases}Y''(y)+\nu Y(y)=0\\Y'(0)=0,Y'(b)=0\end{cases} \tag{2-55}$$

第二步：求解特征值问题

首先求解方程（2-54）。根据与上节类似的步骤，可得特征值

$$\mu_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, n = 0,1,2,3,\cdots \tag{2-56}$$

特征函数为

$$X_n(x) = \cos\frac{n\pi}{a}x \tag{2-57}$$

同样可以解得特征值问题（2－55）的解为

特征值

$$\nu_m = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2, m = 0,1,2,3,\cdots \tag{2-58}$$

特征函数

$$Y_m(x) = \cos\frac{m\pi}{b}y \tag{2-59}$$

第三步：求得一般解析解

注意 n 和 m 互相独立。根据求得的特征根，结合方程（2－51）可得

$$T_{nm}(t) = A_{nm}\mathrm{e}^{-\lambda_{nm}\kappa t}, n = 0,1,2,\cdots, m = 0,1,2,\cdots \tag{2-60}$$

其中

$$\lambda_{nm} = \mu_n + \upsilon_m = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$$

这样可得解

$$u_{mn}(x,y,t) = X_n(x)Y_m(y)T_{nm}(t) = A_{nm}\cos\frac{n\pi}{a}x\cos\frac{m\pi}{b}y\ \mathrm{e}^{-\lambda_{nm}\kappa t} \tag{2-61}$$

和一般解

$$u(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}A_{nm}\cos\frac{n\pi}{a}x\cos\frac{m\pi}{b}ye^{-\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\right]\kappa t} \tag{2-62}$$

第四步：确定待定系数

将式（2－62）代入初始条件（2－46），有

$$u(x,y,t)\mid_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}A_{nm}\cos\frac{n\pi}{a}x\cos\frac{m\pi}{b}y = \varphi(x,y) \tag{2-63}$$

根据余弦函数正交性可以求解式（2－63），

$$A_{nm} = \frac{4}{ab}\frac{1}{(1+\delta_{n0})(1+\delta_{m0})}\int_0^a\int_0^b\varphi(x,y)\cos\frac{n\pi}{a}x\cos\frac{m\pi}{b}y\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2-64}$$

至此，求得了此各向同性热传导非稳态问题一般解析解。

此各向同性热传导非稳态问题更具特点，该问题控制偏微分方程包括 3 个自变量，既包括边界条件，又包括初始条件，边界条件都是齐次条件，这样根据齐次边界条件求得 2 个特征值问题，确定特征值和特征函数，进而求得一般解析解，再根据特征函数的正交性利用给定的初始条件确定待定系数。这个各向同性非稳态热传导问题属于一种典型的数学物理问题。

在以上几节的讨论中，我们研究的数学物理问题都是控制偏微分方程为齐次，定解条件中有部分齐次边界条件，而初始条件一般不是齐次条件，是给定的。在实际问题中并不

是所有的控制偏微分方程都是齐次的，也有边界条件均不是齐次的情况。但是齐次偏微分方程和齐次边界条件在分离变量法中起到的关键作用，只有方程和边界条件（至少是部分）是齐次的，分离变量才得以实现。要运用分离变量法，就需要对控制偏微分方程进行处理，或者对边界条件进行处理，创造使用分离变量法的条件，当然能做到这些基础是线性偏微分方程的可叠加性。如果方程和边界条件不是齐次的，分离变量法的基本原则仍能适用。本节方法可以讨论非齐次方程的情形。

对于具有非齐次项偏微分方程问题，可以有两种方法处理此种偏微分方程，一种是将边界条件保持齐次，将方程齐次化。另一个是按相应齐次问题特征函数展开，就是寻找一组特征函数$\{X_n(x), n=1,2,3,\cdots\}$，如这组特征函数是完备的，那么就可以将所要求的解及方程非齐次项按此特征函数展开，代入控制偏微分方程及定解条件，求出问题解。

对于非齐次边界条件的处理，也是实际求解中经常遇到的问题。齐次化非齐次边界条件也需要将待求函数分离为两个函数，一个为自行选择的特解函数，它满足非齐次边界条件（不需要一定满足控制偏微分方程），而另一个函数为新待求函数，把这个新待求函数叠加特解函数，并一并代入满足控制偏微分方程和边界条件，这样就得到非齐次控制偏微分方程和齐次化的边界条件，初始条件一般还是非齐次的，这样根据介绍的非齐次项偏微分方程解法，就可以求解出问题最终解。由于需要寻找的特解函数只需要满足边界条件，这样可选择的余地就很大了。当然最理想的情况就是新特解函数既能满足非齐次边界条件，又能满足控制偏微分方程的齐次化，这样新待求函数就比较简单了。

对于分离变量法处理的数学物理问题，需要所研究的偏微分方程可以分离变量，同时定解条件改变后，解就变化了。还可注意到，分离变量法实施过程中，所涉及的函数都是实数形式。所以也可以将本章介绍的分离变量法称为实数分离变量法。实践表明，实数分离变量法大都局限于各向同性数学物理方程，而对于描述各向异性物理问题的各向异性数学物理方程需要发展新的数学物理方法。

第 3 章　直（斜）角坐标系下的偏微分方程复数分离变量法（复数级数方法）

3.1　概述

本书第 2 章介绍了分离变量法。分离变量法是一种重要的数学物理方法，构成了线性偏微分方程和各向同性数学物理方法的基石。但分离变量法适用有一定限制，一是对偏微分方程要求能分离变量，二是需要根据不同定解条件求解偏微分方程，三是对于非齐次偏微分方程和非齐次定解条件处理比较麻烦。对于各向异性数学物理问题，其控制偏微分方程基本不能分离变量，此类数学物理方法解析求解十分困难。由此，数学物理方法需要进步。本书作者在求解各向异性矩形板横向弯曲问题时，采用了直角坐标系下求解各向异性矩形板横向弯曲控制方程边值问题的复数级数形式解思想。研究表明复数级数方法是数学物理问题的一个基本方法，可以用来求解众多数学物理问题。进一步研究表明，复数级数方法实际上是一种广义的分离变量法，只是在复数空间分离变量，过程中所涉及的函数都是复数函数，所以作者将复数级数方法也称为复数分离变量法。本章第一部分主要介绍矩形域下各向异性数学物理方程的复数级数求解方法（复数分离变量法）。本章第二部分主要介绍斜形域下各向异性数学物理方程的复数级数求解方法（复数分离变量法）。本章还提出了数学物理实数化原理。

3.2　直角坐标下偏微分方程复数级数方法实施过程

3.2.1　各向异性矩形板横向弯曲问题

考虑各向异性矩形板横向弯曲问题，板长为 a，板长 b，厚度 h。板在四边边界简单支撑，板面承受横向载荷为 q，$w(x,y)$ 为挠度函数，$D_{ij}(i=1,2;j=1,2,6)$ 为弯曲刚度矩阵单元。

各向异性矩形板板横向弯曲控制方程为

$$D_{11}\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4}+4D_{16}\alpha\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^3\partial \eta}+2(D_{12}+2D_{66})\alpha^2\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2\partial \eta^2}+4D_{26}\alpha^3\frac{\partial^4 W}{\partial \eta^3\partial \xi}+D_{22}\alpha^4\frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4}=P \tag{3-1}$$

本章引入了如下无量纲量

$$\xi=\frac{x}{a}\quad,\eta=\frac{y}{b},\quad \alpha=\frac{a}{b}\quad,W(x,y)=\frac{w(x,y)}{h}\quad,P=\frac{qa^4}{h}$$

各向异性板弯曲问题可归结为求解偏微分方程（3－1）的边界值问题。求解思路如下：直接从控制方程出发，建立偏微分方程的一般解，将求解的一般解带入边界条件，根据正弦级数的正交性建立一组线性方程，从而确定待定常数，具体过程如下：

（1）齐次解及补充解推导

假设方程（3－1）有如下级数解

$$W = \sum_{m} f_m(\eta) e^{im\pi\xi} \tag{3-2}$$

其中 $i^2 = -1$；m 为整数。

将式（3－2）带入方程（3－1），可得

$$\sum\left[D_{11}(m\pi)^4 - 4iD_{16}\alpha(m\pi)^3\frac{df_m}{d\eta} - 2(D_{12}+2D_{66})\alpha^2(m\pi)^2\frac{d^2 f_m}{d\eta^2} + 4iD_{26}\alpha^3(m\pi)\frac{d^3 f_m}{d\eta^3} + D_{22}\alpha^4\frac{d^4 f_m}{d\eta^4}\right] = 0 \tag{3-3}$$

当 $m = 0$，$W = f_1 + f_2(\eta - 0.5) + f_3(\eta - 0.5)^2 + f_4(\eta - 0.5)^3$

当 $m \neq 0$，再假设

$$f_m(\eta) = Ge^{im\pi\eta p} \tag{3-4}$$

上面 m 不等于 0；G 是待定复数常数。p 是特征根。

将式（3－2）和（3－4）带入方程（3－3），导出方程（3－5）

$$D_{11} + 4D_{16}\alpha p + 2(D_{12}+2D_{66})\alpha^2 p^2 + 4D_{26}p^3\alpha^3 + D_{22}\alpha^4 p^4 = 0 \tag{3-5}$$

方程（3－5）为各向异性矩形板弯曲偏微分方程的特征方程。求解上式，对任一 m，对于各向异性矩形板弯曲偏微分方程特征方程（3－5）可得四个特征根

$$p = a_k \pm ib_k \quad (k = 1,2) \tag{3-6}$$

对特定的 m、特征根 $a_k + ib_k$，相应级数项为

$$W_{k1m+} = G_{1km+}e^{im\pi\xi}e^{im\pi(a_k+ib_k)\eta} \tag{3-7}$$

其中 G_{1km+} 是复常数，$G_{1km+} = G_{1km+,r} + iG_{1km+,i}$，$G_{1km+,r}$，$G_{1km+,i}$ 是实数。

对应同一 m、特征根 $a_k - ib_k$，对应级数项为

$$W_{k2m+} = G_{2km+}e^{im\pi\xi}e^{im\pi(a_k-ib_k)\eta} \tag{3-8}$$

其中 G_{2km+} 是复常数，$G_{2km+} = G_{2km+,r} + iG_{2km+,i}$，$G_{2km+,r}$，$G_{2km+,i}$ 是实数。

对应 m 和共轭复根 $a_k \pm ib_k$，对应级数项合写为

$$\begin{aligned} W_{km+} &= W_{k1m+} + W_{k2m+} \\ &= G_{1km+}e^{im\pi\xi}e^{im\pi(a_k+ib_k)\eta} + iG_{2km+}e^{im\pi\xi}e^{im\pi(a_k-ib_k)\eta} \\ &= G_{1km+}\sinh(m\pi b_k\eta)\cos[m\pi(a_k\eta+\xi)] + G_{2km+}\cosh(m\pi b_k\eta)\cos[m\pi(a_k\eta+\xi)] + \\ &\quad G_{3km+}\sinh(m\pi b_k\eta)\sin[m\pi(a_k\eta+\xi)] + G_{4km+}\sinh(m\pi b_k\eta)\sin[m\pi(a_k\eta+\xi)] + \\ &\quad i\{-G_{3km+}\sinh(m\pi b_k\eta)\cos[m\pi(a_k\eta+\xi)] - G_{4km+}\cosh(m\pi b_k\eta)\cos[m\pi(a_k\eta+\xi)] + \\ &\quad G_{1km+}\sinh(m\pi b_k\eta)\sin[m\pi(a_k\eta+\xi)] + G_{2km+}\sinh(m\pi b_k\eta)\sin[m\pi(a_k\eta+\xi)]\} \end{aligned} \tag{3-9}$$

其中 G_{1km+}，G_{2km+}，G_{3km+}，G_{4km+} 是实数，且可从 $G_{1km+,r}$，$G_{1km+,i}$，$G_{2km+,r}$，$G_{2km+,i}$ 变换而来。

对应 $-m$，对应特征根是 $a_k \pm \mathrm{i}b_k$ 。采取相似的步骤，对应 $-\mathrm{m}$ 和 $a_k \pm \mathrm{i}b_k$ ，相应级数项为

$$\begin{aligned}W_{km-} = & -G_{1km-}\sinh(m\pi b_k\eta)\cos[m\pi(a_k\eta+\xi)]+G_{2km-}\cosh(m\pi b_k\eta)\cos[m\pi(a_k\eta+\xi)]+\\ & G_{3km-}\sinh(m\pi b_k\eta)\sin[m\pi(a_k\eta+\xi)]-G_{4km-}\sinh(m\pi b_k\eta)\sin[m\pi(a_k\eta+\xi)]+\\ & i\{-G_{3km-}\sinh(m\pi b_k\eta)\cos[m\pi(a_k\eta+\xi)]-G_{4km-}\cosh(m\pi b_k\eta)\cos[m\pi(a_k\eta+\xi)]+\\ & G_{1km-}\sinh(m\pi b_k\eta)\sin[m\pi(a_k\eta+\xi)]-G_{2km-}\sinh(m\pi b_k\eta)\sin[m\pi(a_k\eta+\xi)]\}\end{aligned} \tag{3-10}$$

其中 G_{1km-}，G_{2km-}，G_{3km-}，G_{4km-} 是实数。

对应 m 和 $-m$，对应级数项合写为

$$W_{km} = W_{km+} + W_{km-} \tag{3-11}$$

考虑到挠度函数是实际物理量，W_{km} 的虚部应是 0。这样，将式（3－9）和（3－10）代入式（3－11），W_{km} 的虚部为 0 条件，可得

$$\begin{aligned}G_{1km+} &= -G_{1km-}\\ G_{2km+} &= G_{2km-}\\ G_{3km+} &= G_{3km-}\\ G_{4km+} &= -G_{4km-}\end{aligned} \tag{3-12}$$

可写为

$$\begin{aligned}W_{km} = & 2G_{1km+}\sinh(m\pi b_k\eta)\cos[m\pi(a_k\eta+\xi)]+2G_{2km+}\cosh(m\pi b_k\eta)\cos[m\pi(a_k\eta+\xi)]+\\ & 2G_{3km+}\sinh(m\pi b_k\eta)\sin[m\pi(a_k\eta+\xi)]+2G_{4km+}\sinh(m\pi b_k\eta)\sin[m\pi(a_k\eta+\xi)]\end{aligned} \tag{3-13}$$

鉴于 m 很大时，$\sinh(m\pi b_k\eta)$ 与 $\cosh(m\pi b_k\eta)$ 逐渐接近，基本解函数也逐渐趋于线性相关。由此引入变换矩阵。

$$\begin{aligned}G_{1km+} &= 0.5\left[\frac{G_{3km}\cos(m\pi a_k)+G_{1km}\sin(m\pi a_k)}{\sinh(m\pi b_k)}\cos(m\pi)-G_{4km}/\tanh(m\pi b_k)\right]\\ G_{2km+} &= 0.5G_{4km}\\ G_{3km+} &= 0.5\left[\frac{-G_{1km}\cos(m\pi a_k)+G_{3km}\sin(m\pi a_k)}{\sinh(m\pi b_k)}\cos(m\pi)-G_{2km}/\tanh(m\pi b_k)\right]\\ G_{4km+} &= 0.5G_{2km}\end{aligned} \tag{3-14}$$

引入式（3－14），将式（3－13）改写为

$$\begin{aligned}W_{km} = & G_{1km}\frac{\sinh(m\pi b_k\eta)\sin m\pi[a_k(1-\eta)+1-\xi]}{\sinh(m\pi b_k)}+\frac{\sinh[m\pi b_k(1-\eta)]\sin m\pi(a_k\eta+\xi)}{\sinh(m\pi b_k)}]+\\ & G_{3km}\frac{\sinh(m\pi b_k\eta)\cos m\pi[a_k(1-\eta)+1-\xi]}{\sinh(m\pi b_k)}+G_{4km}\frac{\sinh[m\pi b_k(1-\eta)]\cos m\pi(a_k\eta+\xi)}{\sinh(m\pi b_k)}\end{aligned} \tag{3-15}$$

这样可推出方程（3－1）实数形式解

$$
\begin{aligned}
W = & \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2} G_{1km}\frac{\sinh(m\pi b_k\eta)\sin m\pi[a_k(1-\eta)+1-\xi]}{\sinh(m\pi b_k)} + \\
& \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2} G_{2km}\frac{\sinh[m\pi b_k(1-\eta)]\sin m\pi(a_k\eta+\xi)}{\sinh(m\pi b_k)} + \\
& \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2} G_{3km}\frac{\sinh(m\pi b_k\eta)\cos m\pi[a_k(1-\eta)+1-\xi]}{\sinh(m\pi b_k)} + \\
& \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2} G_{4km}\frac{\sinh[m\pi b_k(1-\eta)]\cos m\pi(a_k\eta+\xi)}{\sinh(m\pi b_k)}
\end{aligned} \tag{3-16}
$$

其中 $G_{jkm}(j=1,2,3,4)$ 为任意待定常数.

当 m 为 0 时，可推出补充多项式

$$W = f_1 + f_2(\eta-0.5) + f_3(\eta-0.5)^2 + f_4(\eta-0.5)^3 \tag{3-17}$$

考虑到一般情况，又可设如下级数解

$$T = \sum Q e^{n\pi s\xi} e^{n\pi\eta} \tag{3-18}$$

其中 n 是整数，$n \neq 0$；Q 为虚数，s 是特征根。

采用以上步骤，可推出另一特征方程（3－19）及其四个特征根（3－20）

$$D_{11}s^4 + 4D_{16}s^3\alpha + 2(D_{12}+2D_{66})s^2r^2 + 4D_{26}s\alpha^3 + D_{22}\alpha^4 = 0 \tag{3-19}$$

$$c_k \pm \mathrm{i}d_k\ (k=1,\ 2) \tag{3-20}$$

同样可推得另一级数解

$$
\begin{aligned}
W* = & \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2} Q_{1kn}\frac{\sinh(n\pi d_k\xi)\sin n\pi[c_k(1-\xi)+1-\eta]}{\sinh(n\pi d_k)} + \\
& \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2} Q_{2kn}\frac{\sinh[n\pi d_k(1-\xi)]\sin n\pi(c_k\xi+\eta)}{\sinh(n\pi d_k)} + \\
& \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2} Q_{3kn}\frac{\sinh(n\pi d_k\xi)\cos n\pi[c_k(1-\xi)+1-\eta]}{\sinh(n\pi d_k)} + \\
& \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2} Q_{4kn}\frac{\sinh[n\pi d_k(1-\xi)]\cos n\pi(c_k\xi+\eta)}{\sinh(n\pi d_k)}
\end{aligned} \tag{3-21}
$$

当 n 为 0 时，可得出另一补充解

$$W* = g_1 + g_2(\xi-0.5) + g_3(\xi-0.5)^2 + g_4(\xi-0.5)^3 \tag{3-22}$$

（2）特解

根据载荷形式可以由方程（3－1）推出特解。对于均布载荷 q，特解 W_0 可给出如下形式

$$W_0 = \frac{P}{50}\left[\frac{\xi^2(1-\xi)^2}{D_{11}} + \frac{\eta^2(1-\eta)^2}{D_{22}\alpha^4} + \frac{\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)}{4(D_{12}+2D_{66})\alpha^2}\right] \tag{3-23}$$

（3）构建一般解析解

根据线性偏微分方程解的可叠加性原理，可将齐次解、特解、补充解及以 ξ，η 表示的交叉多项式组合起来，可得到以 ξ，η 形式表示的一般解析解：

$$
\begin{aligned}
W = &\\
&\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2} G_{1km}\frac{\sinh(m\pi b_k\eta)\sin m\pi[a_k(1-\eta)+1-\xi]}{\sinh(m\pi b_k)}+\\
&\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2} G_{2km}\frac{\sinh[m\pi b_k(1-\eta)]\sin m\pi(a_k\eta+\xi)}{\sinh(m\pi b_k)}+\\
&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2} Q_{1kn}\frac{\sinh(n\pi d_k\xi)\sin n\pi[c_k(1-\xi)+1-\eta]}{\sinh(n\pi d_k)}+\\
&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2} Q_{2kn}\frac{\sinh[n\pi d_k(1-\xi)]\sin n\pi(c_k\xi+\eta)}{\sinh(n\pi d_k)}+\\
&t_1[\eta(\xi-\xi^3)+t_{16}\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)]+\\
&t_2[(1-\eta)(\xi^3-3\xi^2+2\xi)+t_{16}\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)]+\\
&t_3[\eta(\xi^3-3\xi^2+2\xi)-t_{16}\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)]+\\
&t_4[(1-\eta)(\xi-\xi^3)-t_{16}\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)]+\\
&t_5[\xi(\eta-\eta^3)+t_{26}\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)]+\\
&t_6[(1-\xi)(\eta^3-3\eta^2+2\eta)+t_{26}\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)]+\\
&t_7[\xi(\eta^3-3\eta^2+2\eta)-t_{26}\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)]+\\
&t_8[(1-\xi)(\eta-\eta^3)-t_{26}\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)]+\\
&t_9(1-\xi)(1-\eta)+t_{10}\eta(1-\xi)+t_{11}\xi(1-\eta)+t_{12}\xi\eta+W_0
\end{aligned}
\tag{3-24}
$$

其中 $G_{1km}, G_{2km}, Q_{1kn}, Q_{2kn}, t_j\ (j=1,2,3,\cdots,12)$ 为待定实数常数，W_0 是特解，

$$
t_{16}=\frac{3D_{16}}{(D_{12}+2D_{66})\alpha}\quad,\quad t_{26}=\frac{3\alpha D_{26}}{(D_{12}+2D_{66})}
$$

（4）边界条件

简支边界、固支边界和自由边界可表示为

$$
S: w = M_x = 0
$$

$$
C: w = \frac{\partial W}{\partial x} = 0
$$

$$
F: Q_\xi + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = M_x = 0 \tag{3-25}
$$

（5）角点条件

在上述的解析解中，引入多项式形式的补充解可以处理复杂的边界问题。由于正弦级数在边界端点间断，需要补充角点条件。下面给出一些典型的角点条件。

1）四边固支板

$$
W(0,0)=0,\ W(1,0)=0,\ W(1,1)=0,\ W(0,1)=0
$$

$$
\frac{\partial W(0,0)}{\partial \xi}=0,\ \frac{\partial W(1,0)}{\partial \xi}=0,\ \frac{\partial W(1,1)}{\partial \xi}=0,\ \frac{\partial W(0,1)}{\partial \xi}=0
$$

$$
\frac{\partial W(0,0)}{\partial \eta}=0,\ \frac{\partial W(1,0)}{\partial \eta}=0,\ \frac{\partial W(1,1)}{\partial \eta}=0,\ \frac{\partial W(0,1)}{\partial \eta}=0
$$

2）四边简支板

$$W(0,0)=0, W(1,0)=0, W(1,1)=0, W(0,1)=0$$

对于悬壁板问题，每一个自由角点处的综合剪力和双向弯矩也构成了3个角点条件。

实际计算中，设 $m=n$，m 最大取 M，解析解（3-24）共有 $12M+12$ 个未知数。对于矩形板弯 曲问题，共有8个独立的边界条件。将解析解代入8个边界条件中，形成8个方程，将所得每个方程展成 M 项正弦级数，可以得到 $8M$ 个线性代数方程；在四个角点(0，0)、(1，0)、(1，1)、(0，1)，根据该处挠度、弯矩或综合剪力平衡条件可有12个角点条件，又可建立12个线性方程，这样总共建立 $8M+12$ 个线性方程，对称角铺设纤维增强复合材料矩形板横向弯曲4阶偏微分方程本质问题得解。

3.2.2　矩形域各向异性稳态热传导复数级数方法解

考虑各向异性矩形域（$a\times b$），其稳态温度场控制方程为：

$$k_{11}\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}+2k_{12}\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial \xi\partial \eta}+k_{22}\alpha^2\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2}=qa^2 \tag{3-26}$$

式中 $k_{11}=k_1\cos^2\theta+k_1\sin^2\theta$，$k_{12}=(k_1-k_2)\sin\theta\cos\theta$，$k_{22}=k_2\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta$

其中 k_{11}，k_{12}，k_{22} 为导热系数；k_1 和 k_2 代表主导热系数；θ 为各向异性角。$T(\xi,\eta)$ 为温度，q为单位体积热源函数。$\alpha=\frac{a}{b}$，$\xi=\frac{x}{a}$，$\eta=\frac{y}{b}$。，

（1）齐次解和补充解求解

设方程（3-26）有如下齐次解

$$T=\sum_{m=1}f_m(\eta)e^{im\pi\xi} \tag{3-27}$$

其中 $i^2=-1$。

再设

$$f_m(\eta)=Ae^{im\pi p\eta} \tag{3-28}$$

其中 m 不能为0，A 为待定虚数常数，p 是特征根。

将式（3-27）和（3-28）代入方程（3-26），可得

$$k_{11}+2k_{12}\alpha p+k_{22}\alpha^2p^2=0 \tag{3-29}$$

求解方程（3-29），可得特征根

$$p=a_1\pm ib_1 \tag{3-30}$$

T 齐次解可以表示为如下实数级数：

$$\begin{aligned}T=\sum_{m=1}\{&A_{1m}\frac{\sinh m\pi b_1\eta\sin m\pi[a_1(1-\eta)+1-\xi]}{\sinh m\pi b_1}\\&+A_{2m}\frac{\sinh m\pi b_1(1-\eta)\sin m\pi(a_1\eta+\xi)}{\sinh m\pi b_1}\\&+A_{3m}\frac{\sinh m\pi b_1\eta\cos m\pi[a_1(1-\eta)+1-\xi]}{\sinh m\pi b_1}\\&+A_{4m}\frac{\sinh m\pi b_1(1-\eta)\cos m\pi(a_1\eta+\xi)}{\sinh m\pi b_1}\end{aligned} \tag{3-31}$$

其中 $A_{jm}(j=1,2,3,4)$ 为任意实数常数。

当 $m=0$，根据常微分方程理论可以求解出一组补充解。

考虑一般性，再设

$$T=\sum Be^{in\pi s\xi}e^{in\pi\eta}$$

其中 $n\neq 0$，B 为待定复数常数，s 是特征根。

类似地，可得另一个特征方程（3-32）和2个特征根（3-33）：

$$k_{11}s^2+2k_{12}\alpha s+k_{22}\alpha^2=0 \tag{3-32}$$

$$c_k\pm id_k\quad(k=1) \tag{3-33}$$

另一组 T 齐次解可表示为

$$T=\sum_{n=1}\{B_{1n}\frac{\sinh n\pi d_1\xi\sin n\pi[c_1(1-\xi)+1-\eta]}{\sinh n\pi d_1}+B_{2n}\frac{\sinh n\pi d_1(1-\xi)\sin n\pi(c_1\xi+\eta)}{\sinh n\pi d_1}+$$
$$B_{3n}\frac{\sinh n\pi d_1\xi\cos n\pi[c_1(1-\xi)+1-\eta]}{\sinh n\pi d_1}+B_{4n}\frac{\sinh n\pi d_1(1-\xi)\cos n\pi(c_1\xi+\eta)}{\sinh n\pi d_1}\} \tag{3-34}$$

当 $n=0$，可以求解出另一组补充解。

（2）特解

方程（3-26）特解相对容易求得。在域内均布热源 q，特解 T^{**} 给出下式

$$T^{**}=\frac{qa^2}{4}[\frac{\xi(1-\xi)}{k_{11}}+\frac{\eta(1-\eta)}{\alpha^2k_{22}}] \tag{3-35}$$

（3）一般解析解

根据线性偏微分方程解的可叠加性原理，可将齐次解、补充解、特解组合起来，可得到以 ξ、η 形式表示的一般解析解

$$T=\sum_{m=1}\{A_{1m}\frac{\sinh m\pi b_1\eta\sin m\pi[a_1(1-\eta)+1-\xi)]}{\sinh m\pi b_1}+A_{2m}\frac{\sinh m\pi b_1(1-\eta)\sin m\pi(a_1\eta+\xi)}{\sinh m\pi b_1}+$$
$$\sum_{n=1}\{B_{1n}\frac{\sinh n\pi d_1\xi\sin n[(c_1(1-\xi)+1-\eta]}{\sinh n\pi d_1}+B_{2n}\frac{\sinh n\pi d_1(1-\xi)\sin n\pi(c_1\xi+\eta)}{\sinh n\pi d_1}\}+$$
$$p_1[\xi\eta+h_{16}\xi(1-\xi)]+p_2[(1-\xi)(1-\eta)+h_{16}\xi(1-\xi)]+p_3[\xi(1-\eta)-h_{16}\xi(1-\xi)]+$$
$$p_4[\eta(1-\xi)-h_{16}\xi(1-\xi)]+T^{**} \tag{3-36}$$

其中 $A_{1m},A_{2m},B_{1n},B_{2n},p_j(j=1,2,3,4)$ 为待定常数，$h_{16}=\frac{k_{12}}{k_{11}}\alpha$，$T^{**}$ 为特解。

（4）边界条件

典型边界条件有3类：

$$1)\ T=T_w$$
$$2)\ -k_{11}\frac{\partial T}{\partial\xi}-k_{12}\alpha\frac{\partial T}{\partial\eta}=q^{*} \tag{3-37}$$
$$3)\ -k_{11}\frac{\partial T}{\partial\xi}-k_{12}\alpha\frac{\partial T}{\partial\eta}=h(T-T_{\infty})$$

(5) 角点条件

在上述的解析解中，引入多项式形式的补充解可以处理复杂的边界问题。由于正弦级数在边界端点间断，需要补充角点条件。对于矩形域，一般有 4 个角点条件。

(6) 求解

根据热传导理论，可以容易得到 q_x, q_y 关于待定常数的表达式。实际计算中，设 $m=n$，m 最大取 M，解析解 (3-36) 共有 $4M+4$ 个未知数。对于矩形域热传导问题，共有 4 个独立的边界条件。将解析解代入 4 个边界条件中，形成 4 个方程，将所得每个方程展成 M 项正弦级数，可以得到 $4M$ 个线性代数方程；在四个角点 (0, 0)、(1, 0)、(1, 1)、(0, 1)，可有 4 个角点条件，又可建立 4 个线性方程，这样总共建立 $4M+4$ 个线性方程，各向异性矩形域稳态热传导问题得解。

3.3 斜角坐标下偏微分方程复数级数方法实施过程

平行四边形的各向异性斜形板在工程中获得了广泛应用。求解平行四边形域的数学物理问题，斜坐标是合适的选择。斜坐标的引入，增加了要研究的偏微分方程的项数，特别是增加了关于待求函数关于斜坐标的奇次交叉偏导数，这使得常规分离变量法不能适用于斜坐标下的偏微分方程的求解，无疑这种情况下，本章引入的复数分离变量法（复数级数方法）可以有所作为。本章应用复级数方法给出各向异性斜形板横向弯曲和斜形域稳态温度场解析求解。

3.3.1 各向异性斜形板横向弯曲问题

(1) 斜板理论分析

考虑各向异性斜形板，板长为 a，板宽为 b，厚度为 h，斜角为 β。板在四边边界简支，板面承受均布载荷 q。



图 3-2

在直角坐标系中，各向异性板横向弯曲控制方程为

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+4D_{16}\frac{\partial^4 w}{\partial x^3\partial y}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+4D_{26}\frac{\partial^4 w}{\partial y^3\partial x}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=q \tag{3-38}$$

引入斜交坐标系 ($\xi o\eta$) 及无量纲量

$$W(\xi,\eta)=\frac{w(x,y)}{h},\ P=\frac{qa^4}{h},\ \xi=(x-y\mathrm{tg}\beta)/a,\ \eta=y/(b\cos\beta),\ \alpha=\frac{a}{b} \tag{3-39}$$

在斜交坐标系中，方程（3-38）可改写为

$$S_{40}\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4}+4S_{31}\alpha\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^3\partial \eta}+2S_{22}\alpha^2\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2\partial \eta^2}+4S_{13}\alpha^3\frac{\partial^4 W}{\partial \eta^3\partial \xi}+S_{04}\alpha^4\frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4}=P \tag{3-40}$$

其中

$$\begin{cases} S_{40}=D_{11}-4D_{16}\operatorname{ctg}\beta+2(D_{12}+2D_{66})\operatorname{ctg}^2\beta-4D_{26}\operatorname{ctg}^2\beta+D_{22}\operatorname{ctg}^4\beta \\ S_{31}=(3D_{26}\operatorname{ctg}^2\beta+D_{16}-(D_{12}+2D_{66})\operatorname{ctg}\beta-D_{22}\operatorname{ctg}^3\beta)/\sin\beta \\ S_{22}=(D_{12}+2D_{66})/\sin^2\beta-6D_{26}\operatorname{ctg}\beta/\sin^2\beta+3D_{22}\operatorname{ctg}^2\beta/\sin^2\beta \\ S_{13}=(D_{26}/\sin^3\beta-D_{22}\operatorname{ctg}\beta/\sin^3\beta) \\ S_{04}=D_{22}(1/\sin\beta)^4 \end{cases} \tag{3-41}$$

在直角坐标系中，简支边界条件为

$$\begin{cases} w=0 \\ M_n=0 \\ M_n=M_x\cos^2\theta_x+M_{xy}\sin2\theta_x+M_y\sin^2\theta_x \end{cases} \tag{3-42}$$

其中 θ_x 为边界法线与 x 轴的夹角。

在斜坐标系下，应用式（3-39），可将 M_n 用 W 关于 ξ，η 的偏导数表示，这样四边简支边界条件可表示如下：

$$\begin{cases} \xi=0,1\quad,W=0,\quad M_\xi=0 \\ \eta=0,1\quad,W=0,\quad M_\eta=0 \end{cases} \tag{3-43}$$

式中

$$\begin{cases} M_\xi=-(D_{11\xi}\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}+D_{12\xi}\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2}+2D_{16\xi}\frac{\partial^2 W}{\partial \xi\partial \eta}) \\ M_\eta=-(D_{21\eta}\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}+D_{22\eta}\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2}+2D_{26\eta}\frac{\partial^2 W}{\partial \xi\partial \eta}) \end{cases} \tag{3-44}$$

$$\begin{cases} D_{11\xi}=(D_{11}\sin^2\beta+2(D_{12}+2D_{66})\cos^2\beta+D_{22}\operatorname{ctg}^2\beta\cos^2\beta- \\ 4D_{16}\sin\beta\cos\beta-4D_{26}\cos^2\beta\operatorname{ctg}\beta)(\frac{h}{a})^2 \\ D_{12\xi}=(D_{12}+D_{22}\operatorname{ctg}^2\beta-2D_{26}\operatorname{ctg}\beta)\alpha^2(\frac{h}{a})^2 \\ D_{16\xi}=(-(D_{12}+2D_{66})\cos\beta+3D_{26}\operatorname{ctg}\beta\cos\beta-D_{22}\operatorname{ctg}^2\beta\cos\beta+D_{16}\sin\beta)\alpha(\frac{h}{a})^2 \\ D_{21\eta}=(D_{12}+D_{22}\operatorname{ctg}^2\beta-2D_{26}\operatorname{ctg}\beta)(\frac{h}{a})^2 \\ D_{22\eta}=D_{22}\alpha^2/\sin^2\beta(\frac{h}{a})^2 \\ D_{26\eta}=(-D_{22}\operatorname{ctg}\beta/\sin\beta+D_{26}/\sin\beta)\alpha(\frac{h}{a})^2 \end{cases} \tag{3-45}$$

在斜形板各角点（0，0），（1，0），（1，1），（0，1）处，板挠度、转角及弯矩（M_ξ，

M_η）或综合剪力均应满足角点条件约束，这样总共有 12 个角点条件。

（2）斜形板横向弯曲一般解析解

斜形板横向弯曲问题求解在数学上可归结为求解偏微分方程（3-38）边界条件（含角点条件）下的边值问题，按照第本章 3.2 节的求解步骤，可得斜形板横向弯曲问题一般解析解

$$
\begin{aligned}
W = & \\
& \sum_{m=1}\sum_{k=1}^{2} G_{1km}\frac{\sinh(m\pi b_k\eta)\sin m\pi[a_k(1-\eta)+1-\xi]}{\sinh(m\pi b_k)} + \\
& \sum_{m=1}\sum_{k=1}^{2} G_{2km}\frac{\sinh[m\pi b_k(1-\eta)]\sin m\pi(a_k\eta+\xi)}{\sinh(m\pi b_k)} + \\
& \sum_{n=1}\sum_{k=1}^{2} Q_{1kn}\frac{\sinh(n\pi d_k\xi)\sin n\pi[c_k(1-\xi)+1-\eta]}{\sinh(n\pi d_k)} + \\
& \sum_{n=1}\sum_{k=1}^{2} Q_{2kn}\frac{\sinh[n\pi d_k(1-\xi)]\sin n\pi(c_k\xi+\eta)}{\sinh(n\pi d_k)} + \\
& W_1 + W_0
\end{aligned}
\tag{3-46}
$$

其中 W_1 为补充解，具体形式如下

$$
\begin{aligned}
W_1 = & \\
& t_1[\eta(\xi-\xi^3)+t_{16}\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)] + \\
& t_2[(1-\eta)(\xi^3-3\xi^2+2\xi)+t_{16}\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)] + \\
& t_3[\eta(\xi^3-3\xi^2+2\xi)-t_{16}\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)] + \\
& t_4[(1-\eta)(\xi-\xi^3)-t_{16}\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)] + \\
& t_5[\xi(\eta-\eta^3)+t_{26}\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)] + \\
& t_6[(1-\xi)(\eta^3-3\eta^2+2\eta)+t_{26}\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)] + \\
& t_7[\xi(\eta^3-3\eta^2+2\eta)-t_{26}\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)] + \\
& t_8[(1-\xi)(\eta-\eta^3)-t_{26}\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)] + \\
& t_9(1-\xi)(1-\eta)+t_{10}\eta(1-\xi)+t_{11}\xi(1-\eta)+t_{12}\xi\eta
\end{aligned}
\tag{3-47}
$$

上式中 $t_{16}=\dfrac{3S_{31}}{S_{22}\alpha}$，$t_{26}=\dfrac{3\alpha S_{13}}{S_{22}}$。$G_{1km}$，$G_{2km}$，$Q_{1kn}$，$Q_{2kn}$，$t_j$（$j=1,2,3,\cdots,12$）为待定实数常数。$W_0$ 为方程（3-40）的特解。m、n 为正整数。$a_1\pm \mathrm{i}b_1$ 、$a_2\pm \mathrm{i}b_2$（i 为虚数单位）为特征方程（3-48）的特征根 $r_{1,2}$ 、$r_{3,4}$

$$S_{10}+4S_{31}r\alpha+2S_{22}\alpha^2r^2+4S_{13}\alpha^3r^3+S_{01}r^4\alpha^4=0 \tag{3-48}$$

$c_1\pm \mathrm{i}d_1$ 、$c_2\pm \mathrm{i}d_2$（i 为虚数单位）为特征方程（3-49）的特征根 $s_{1,2}$ 、$s_{3,4}$

$$S_{10}s^4+4S_{31}s^3\alpha+2S_{22}s^2\alpha^2+4S_{13}sr^3+S_{01}\alpha^4=0 \tag{3-49}$$

对于均匀载荷 P，选择特解如下

$$W_0=\frac{P}{50}\left(\frac{\xi^2(1-\xi)^2}{S_{10}}+\frac{\eta^2(1-\eta)^2}{S_{01}\alpha^4}+\frac{\xi(1-\xi)\eta(1-\eta)}{4S_{22}\alpha^2}\right) \tag{3-50}$$

实际计算中，设 $m=n$，m 最大取 M，解析解（3-46）共有 $8M+12$ 个未知数。对

于斜形板弯曲问题，共有 8 个独立的边界条件。将解析解代入 8 个边界条件中，形成 8 个方程，将所得每个方程展成 M 项正弦级数。根据正弦级数的正交性，可以得到 $8M$ 个线性代数方程；考虑到正弦级数展开端点间断性，在 4 个角点处建立 12 个线性方程，这样总共建立 $8M+12$ 个线性方程，可以求解 $8M+12$ 个未知数，这样各向异性斜形板横向弯曲问题得解。

3.3.2 各向异性斜形域稳态温度场解析解

在直角坐标下，各向异性热传导方程为

$$k_{20}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+2k_{11}\frac{\partial^2 T}{\partial x\partial y}+k_{02}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=q \tag{3-51}$$

考虑各向异性斜形域，引入斜坐标变换

$$x=a\xi+b\eta\cos\beta;\ y=\eta b\sin\beta \tag{3-52}$$

可将 x—y 坐标系下的斜形域变换为斜坐标 $\xi-\eta$ 下的正方形域。

引入斜坐标变换式（3-52），控制方程（3-51）改写为

$$k_{20}\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}+2k_{11}\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial\xi\partial\eta}+k_{02}\alpha^2\frac{\partial^2 T}{\partial\eta^2}=q a^2 \tag{3-53}$$

其中

$$\begin{cases}K_{20}=(k_1-2k_{12}\operatorname{ctg}\beta+k_2\operatorname{ctg}^2\beta)\\ K_{11}=\dfrac{(k_{12}-k_2\operatorname{ctg}\beta)}{\sin\beta}\\ K_{02}=\dfrac{k_2}{\sin^2\beta}\end{cases} \tag{3-54}$$

$r=a_1\pm \mathrm{i}b_1$ 为如下特征方程的根 p

$$K_{20}+2K_{11}\alpha p+K_{02}(p\alpha)^2=0 \tag{3-55}$$

$s=c_1\pm \mathrm{i}d_1$ 为如下另一特征方程的根 s

$$K_{11}s^2+2K_{12}\alpha s+K_{22}\alpha^2=0 \tag{3-56}$$

采取类似步骤，可得斜形域温度场一般解析解

$$\begin{aligned}T=&\sum_{m=1}\Big\{A_{1m}\frac{\sinh m\pi b_1\eta\sin m\pi[a_1(1-\eta)+1-\xi)]}{\sinh m\pi b_1}+A_{2m}\frac{\sinh m\pi b_1(1-\eta)\sin m\pi(a_1\eta+\xi)}{\sinh m\pi b_1}+\\ &\sum_{n=1}\Big\{B_{1n}\frac{\sinh n\pi d_1\xi\sin n\pi(c_1(1-\xi)+1-\eta)}{\sinh n\pi d_1}+B_{2n}\frac{\sinh n\pi d_1(1-\xi)\sin n\pi(c_1\xi+\eta)}{\sinh n\pi d_1}+\\ &p_1[\xi\eta+h_{16}\xi(1-\xi)]+p_2[(1-\xi)(1-\eta)+h_{16}\xi(1-\xi)]+p_3[\xi(1-\eta)-h_{16}\xi(1-\xi)]+\\ &p_4[\eta(1-\xi)-h_{16}\xi(1-\xi)]+T^{**}\end{aligned} \tag{3-57}$$

其中 $A_{1m},A_{2m},B_{1n},B_{2n},p_j(j=1,2,3,4)$ 为待定实数常数。$h_{16}=\dfrac{K_{11}}{K_{20}}\alpha$ 。m，n 为整数，T^{**} 为特解。

按照矩形域求解方法，可以求解斜形域温度场问题。实际计算中，设 $m=n$，m 最大

取 M，解析解（3－57）共有 $4M+4$ 个未知数。对于斜形域热传导问题，共有 4 个独立的边界条件。将解析解（3－57）代 4 个边界条件中，形成 4 个方程，将所得每个方程展成 M 项正弦级数，可以得到 $4M$ 个线性代数方程；在四个角点（0，0），（1，0），（1，1），（0，1），可有 4 个角点条件，又可建立 4 个线性方程，这样总共建立 $4M+4$ 个线性方程，各向异性斜形域稳态热传导二阶偏微分方程边值问题得解。

3.4　数学物理实数化原理

对反映物理问题规律的数学物理方程来说，都是实数形式的方程，在现实世界中描述真实物理量的数学量也是实数形式。如果采用复数形式的函数解求解实数形式的数学物理方程，所得的函数还是虚数形式的，物理意义就难以实现，换一种说法，如果复数函数是数学物理问题的真实解，那么复数函数一定能是实数函数。具体来说，就是所得复变函数解的虚部一定为 0。这原理就是所谓的数学物理实数化原理。

数学物理实数化原理 设 f 为实数形式的数学物理方程 $L(f)=g$ 的最终解，$L(f)=g$ 正确描述了所涉及的现实物理问题，那么 f 一定是实数函数，即 $\mathrm{lm}(f)=0$ 。

数学物理实数化原理在本书中运用系列复数函数处理数学物理方程中要经常用到，并必须作为基础数学条件列入求解条件。

3.5　偏微分方程复数级数方法实施要点

对于线性偏微分方程 $L[f(x,y)]=0$ 边值问题，采用复数分离变量法（复数级数方法）求解该偏微分方程边值问题，可以按以下步骤实施：

第一步：设 $f(x,y)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{m\pi x}{a}}$

其中 $\mathrm{i}^2=-1$，m 为整数。a 为特征尺寸。如对于矩形域问题，a 为矩形长（或宽）；对于圆域问题，$a=\pi$ 。

第二步：将 $f(x,y)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{m\pi x}{a}}$ 代入 $L[f(x,y)]=0$ 。

当 $m=0$，可得关于 $f_0(y)$ 的实数系数常微分方程 $L_0[f_0(y)]=0$ 。按经典常微分方程理论求得 $f_0(y)$ 的解形式。

当 $m\neq 0$，可得关于 $f_m(y)$ 的复数系数常微分方程 $L_m[f_m(y)]=0$ 。按经典常微分方程理论求得 $f_m(y)$ 的解形式。

第三步：求解复数系数常微分方程 $L_m[f_m(y)]=0$ 。对矩形域边值问题，设 $f_m(y)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_m y}$（$A$ 为复数常数，p_m 为特征根），代入 $L_m[f_m(\eta)]=0$，可得关于特征根 p_m 的特征方程。对于边值问题，需要将根据边值条件确定特征根 p_m 和特征函数。

第四步：根据线性偏微分方程叠加原理，叠加所有解形式，形成复数形式的一般解析解。

第五步：根据数学物理实数化原理化简复数形式的一般解析解为实数形式一般解析解。

第六步：根据边界条件（初始条件）确定待定常数。具体将所得实数形式一般解析解代入边界条件（初始条件），根据有关正交函数特性确定待定常数。

对于矩形域偏微分方程边值问题，可设方程解为 $f(x,y)=\sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty} A\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_m y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{m\pi x}{a}}+f_0(y)$ 进行求解，在矩形域数学物理问题求解中要经常用到，可以写为 $C(x,y)$ 展开，即 $C(x,y)=\sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty} A\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_m y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{m\pi x}{a}}+f_0(y)$。

第4章　贝塞尔函数方法

对于圆形域、柱状域的数学物理问题，采用极坐标和柱坐标研究此类数学物理方程自然是方便的。求解各向同性热传导圆形域问题，会遇到贝塞尔方程。同样，求解其他经典数学物理时也会遇到贝塞尔方程。继丹尼尔·伯努利在悬链研究、拉格朗日在天文研究之后，1824年，伟大的德国天文学家贝塞尔研究行星运动的椭圆轨道时，研究了贝塞尔方程的一个特殊形式。受到傅里叶于1822年发表的不朽著作的影响，贝塞尔对贝塞尔方程做了系统的研究，创立了贝塞尔函数方法，后续在处理不同的数学物理问题时，也相继出现了变形贝塞尔函数、球贝塞尔函数和变形球贝塞尔函数。本章介绍贝塞尔函数方法。贝塞尔函数在处理圆形域、柱状域的各向同性数学物理问题时是一种重要的工具，也是一种基本方法。

4.1　贝塞尔方程的导出

（1）贝塞尔方程和贝塞尔函数

在应用分离变量法解决薄圆盘上瞬时温度分布规律时，会遇到贝塞尔方程

$$r^2F''+rF'+(\lambda r^2-p^2)F=0, r>0 \tag{4-1}$$

称该方程为 p 阶贝塞尔方程。这样，所要求解的数学物理问题归结为求解问题

$$r^2F''+rF'+(\lambda r^2-p^2)F=0, r>0$$
$$F(R)=0, |F(0)|<\infty$$

的固有值与固有函数。若令 $x=r\sqrt{\lambda}$，并记 $F(r)=F(\frac{x}{\sqrt{\lambda}})=y(x)$，则方程（4-1）可化为

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0, x>0 \tag{4-2}$$

上述方程是具有变系数的二阶线性常微分方程，该方程解称为贝塞尔函数，也被称为柱函数。

（2）贝塞尔方程的解

设

$$y=\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{r+m} \tag{4-3}$$

其中 $a_0\neq0$，注意此处 a_m 为实数。把式（4-3）代入方程（4-1）得

$$\sum_{m=0}^{\infty}a_m(r+m)(r+m-1)x^{r+m}+\sum_{m=0}^{\infty}a_m(r+m)x^{r+m}+\sum_{m=2}^{\infty}a_{m-2}x^{r+m}-p^2\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{r+m}=0$$

我们将第三个级数的求和改为从下标2开始，分别写对应于 $m=0$ 和 $m=1$ 的项如下：

$$a_0(r^2-p^2)x^r+a_1[(r+1)^2-p^2]x^{r+1}+\sum_{m=2}^{\infty}(a_m[(r+m)^2-p^2]+a_{m-2})x^{r+m}=0 \tag{4-4}$$

令级数的系数等于0，得到

$$a_0(r^2-p^2)=0(m=0) \tag{4-5}$$

$$a_1[(r+1)^2-p^2]=0(m=1) \tag{4-6}$$

$$a_m[(r+m)^2-p^2]+a_{m-2}=0,\ m\geqslant 2 \tag{4-7}$$

因为 $a_0\neq 0$ 得指标方程 $(r+p)(r-p)=0$

其指标根是 $r=p$ 和 $r=-p$。

(3) 贝塞尔方程的第一个解

由（4-5）可得 $r=p(p>0)$，代入方程（4-7）得到递归关系式

$$a_m=\frac{-1}{m(m+2p)}a_{m-2},\ m\geqslant 2 \tag{4-8}$$

这是一个两步递归关系式。将 $r=p$ 代入方程（4-6），可得 $a_1=0$ 。由式（4-8）可得

$$a_3=a_5=\cdots=0$$

对偶数项重写 $m=2k$ 的递归关系式

$$a_{2k}=\frac{-1}{2^2k(k+P)}a_{2(k-1)},\ k\geqslant 1 \tag{4-9}$$

可得

$$a_2=\frac{-1}{2^2(1+P)}a_0$$

$$a_4=\frac{-1}{2^2 2(2+p)}a_2=\frac{1}{2^4 2!(1+p)(2+p)}a_0$$

$$a_6=\frac{-1}{2^2 3(3+p)}a_4=\frac{-1}{2^6 3!(1+p)(2+p)(3+p)}a_0$$

$$\vdots$$

把这些系数代入方程（4-3）就得到贝塞尔方程的一个解

$$y=a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k}k!(1+p)(2+p)\cdots(k+p)}x^{2k+p} \tag{4-10}$$

其中 $a_0\neq 0$ 是任意常数。利用伽马函数改写式（4-10），取

$$a_0=\frac{1}{2^p\Gamma(p+1)}$$

代入式（4-10）可得

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p} \tag{4-11}$$

将式（4-11）记为 $J_p(x)$，称它为 p 阶贝塞尔函数，$J_p(x)$ 是由方程（4-2）第一个解

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-p} \tag{4-12}$$

当 $r=-p$ 时，采取类似步骤可得方程（4-2）的第二个解

$$J_{-p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-p} \tag{4-13}$$

若 p 是正整数时，$k-p+1 \leqslant 0$，$k=0, 1, 2, \cdots, p-1$，由于伽马函数对于 0 及负整数没有定义，方程（4-13）系数对 $k=0, 1, 2, \cdots, p-1$ 没有定义。这样需要重新推导一个线性无关解。

定义

$$Y_p(x) = \frac{J_p(x)\cos p\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\pi} \tag{4-14}$$

其中 p 不是整数，根据常微分方程理论，此时，因为 $J_p(x)$ 和 $J_{-p}(x)$ 是贝塞尔方程的线性无关解，故由式（4-14）得到 $Y_p(x)$ 也是贝塞尔方程线性无关的解，函数 $Y_p(x)$ 叫做 p 阶的第二类贝塞尔函数。当 p 是整数（ν 是非整数），这个函数通过求如下非整数函数的极限来构造：

$$Y_p = \lim_{\nu \to P} Y_\nu = \lim_{\nu \to P} \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \tag{4-15}$$

可以证明这个极限的存在性，它定义了 p 阶贝塞尔方程的一个与 $J_p(x)$ 也线性无关解。应用洛必达法则，可以推得

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} J_0(x)\left(\ln\frac{x}{2} + C\right) - \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k+1} \cdot$$

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x)\left(\ln\frac{x}{2} + C\right) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n} -$$

$$\frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=0}^{n+m-1} \frac{1}{k+1}\right)$$

$$(n=1, 2, 3, \cdots)$$

其中，$C = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0.5772\cdots$ 称为欧拉常数。

显然我们有

$$\lim_{x \to 0^+} Y_p(x) = -\infty$$

第二类贝塞尔函数在 0 点附近无界，这一性质在求解实心域数学物理问题中可得到采用，可由原来消减相关级数项。

p 阶贝塞尔方程的通解是

$$y(x) = c_1 J_p(x) + c_2 Y_p(x) \tag{4-16}$$

式中，$J_p(x)$ 由（4-12）给出，而 $Y_p(x)$ 由式（4-15）给出. 当 p 不是整数，通解由下式给出

$$y(x) = c_1 J_p(x) + c_2 J_{-p}(x) \tag{4-17}$$

其中，$J_p(x)$ 由式（4-12）给出，而 $J_{-p}(x)$ 由式（4-13）给出。

4.2 贝塞尔函数的递推公式

不同阶的贝塞尔函数之间有一定联系。由 $J_p(x)$ 的表达式可推出两个基本递推公式

$$\frac{d}{dx}[x^p J_p(x)] = x^p J_{p-1}(x) \tag{4-18}$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-p} J_p(x)] = -x^{-p} J_{p+1}(x) \tag{4-19}$$

证明：根据 $J_p(x)$ 定义

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[x^p J_p(x)] &= \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^p}{k\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2p} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^p (k+p)}{k!\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2p-1} \\ &= x^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p-1} \\ &= x^p J_{p-1}(x)\end{aligned}$$

采用伽马函数的基本性质，

$$\Gamma(k+p+1) = (p+k)\Gamma(p+k)$$

类似可得第二个恒等式。

从式（4－18）和（4－19）可以得到许多其他有用的恒等式．下面列出一些最常用的恒等式如下：

$$\begin{gathered} xJ'_p(x) + pJ_p(x) = xJ_{p-1}(x), \\ xJ'_p(x) - pJ_p(x) = -xJ_{p+1}(x) \\ J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x) = 2J'_p(x) \\ J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x}J_p(x) \end{gathered}$$

涉及贝塞尔函数的积分式也有类似的恒等式：

$$\int x^{p+1} J_p(x)dx = x^{p+1} J_{p+1}(x) + C$$

和

$$\int x^{-p+1} J_p(x)dx = -x^{-p+1} J_{p-1}(x) + C$$

4.3 贝塞尔级数展开

（1）贝塞尔函数的正交性

对于贝塞尔方程固有值问题，求解参数形式的贝塞尔方程

$$r^2F''+rF'+(\lambda r^2-p^2)F=0, r>0$$
$$F(R)=0, |F(0)|<\infty$$

的固有值与固有函数。上述问题通解为

$$y(r)=c_1J_p(r\sqrt{\lambda})+c_2Y_p(r\sqrt{\lambda})$$

根据中心 $|F(0)|<\infty$条件，可得

$$y(r)=c_1J_p(r\sqrt{\lambda})$$

代入边界条件 $F(R)=0$ 得

$$J_p(R\sqrt{\lambda})=0$$

求解上式即可得 λ 。注意在边界上 $x=R\sqrt{\lambda}$ ，$J_p(x)=0$ 实质为一个关于 x 无限阶多项式为 0。$J_p(x)=0$ 有无限多根，这些根有实数根，也有虚数根，可以证明只是实数根才是问题的解。值得提示的是，$J_p(x)=0$ 有正实数根，也有负实数根，并且关于 0 点对称存在。

图 4－1 画出了贝塞尔函数典型的图形．由图可见，贝塞尔函数在正半轴 $x>0$ 上有无穷多个零点，以增大的顺序记这些零点 $0<\alpha_{p1}<\alpha_{p2}<\Lambda<\alpha_{pj}<\Lambda$

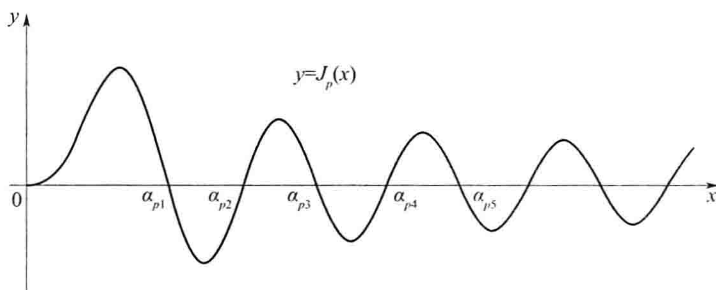


图 4－1　贝塞尔函数 $J_p(x)$ 具有无穷多个正零点

其中，α_{pj} 是 $J_p(x)$ 第 j 个正零点（有时用符号 $\alpha_{p,j}$），没有用来确定贝塞尔函数正零点的公式。这些零点的数值在应用中的重要性，在大多数的数学用表和计算机系统中都列出了这些零点值。在表 4－1 中列出了 J_0，J_1 和 J_2 的前五个正零点。

表 4－1　J_0，J_1 和 J_2 的正零点

j	1	2	3	4	5
α_{0j}	2.40483	5.52008	8.65373	11.7915	14.9309
α_{1j}	3.83171	7.01559	10.1735	13.3237	16.4706
α_{2j}	5.13562	8.41724	11.6198	14.796	18.9801

设 $J_p(x)=0$ 正零点为 $\alpha_{pm}(m=1,2,\cdots)$ ，注意到 $x=r\sqrt{\lambda}$

$$\lambda_{pm}=\left(\frac{\alpha_{pm}}{R}\right)^2 (m=1,2,\cdots)$$

与以上固有值对应的固有函数为

$$F_m(r)=J_p(\frac{\alpha_{pm}}{R}r)(m=1,2,\cdots)$$

这样利用单个贝塞尔函数及其零点，就构造了贝塞尔函数系。

定理 4.1（贝塞尔函数带权正交性） 固定 $p\geqslant 0$ ，$\alpha>0$ ，令 $J_p(\frac{\alpha_{pm}}{R}r)(m=1,2,\cdots)$

则 p 阶贝塞尔函数序列在区间（0，R）正交，即

$$\int_0^R J_p(\frac{\alpha_{pj}}{R}r)J_p(\frac{\alpha_{pk}}{R}r)r\mathrm{d}r=0,j\neq k$$

$$\int_0^R J_p^2(\frac{\alpha_{pj}}{R}r)r\mathrm{d}r=\frac{R^2}{2}J_{p+1}^2(\alpha_{pj}),\ j=1,2,\cdots$$

证明：将贝塞尔方程

$$r^2F''+rF'+(\lambda r^2-p^2)F=0,r>0$$
$$F(R)=0,|F(0)|<\infty$$

改写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r})+(\lambda r-\frac{p^2}{r})F=0$$

记 $F_1(r)=J_p(\alpha_1 r),F_2(r)=J_p(\alpha_2 r)$

其中 α_1 与 α_2 为任意参变量。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r\frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}r})+(\alpha_1^2 r-\frac{p^2}{r})F_1=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r\frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}r})+(\alpha_2^2 r-\frac{p^2}{r})F_2=0$$

将以上两式分别乘以 F_2 和 F_1 后相减，并对 r 从 0 到 R 积分，可得

$$(\alpha_1^2-\alpha_2^2)\int_0^R rF_1(r)F_2(r)\mathrm{d}r+[rF_2(r)\frac{\mathrm{d}F_1(r)}{\mathrm{d}r}-rF_1(r)\frac{\mathrm{d}F_2(r)}{\mathrm{d}r}]_0^R=0$$

在上式取 $\alpha_1=\alpha_{pj}/R$ ，$\alpha_2=\alpha_{pk}/R$

因为 $F_1(R)=J_p(\alpha_{pj})=0$ ，$F_2(R)=J_p(\alpha_{pk})=0$ ，而且 $\alpha_{pj}\neq\alpha_{pk}$ ，

可得

$$\int_0^R J_p(\frac{\alpha_{pj}}{R}r)J_p(\frac{\alpha_{pk}}{R}r)r\mathrm{d}r=0$$

应用洛必达法则，可以得到 $\int_0^R J_p^2(\frac{\alpha_{pj}}{R}r)r\mathrm{d}r=\frac{R^2}{2}J_{p+1}^2(\alpha_{pj})$ 。

这样，根据贝塞尔函数的正交性，可以将一个在区间［0，R］上的已知函数可以表为一个级数

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}A_jJ_p(\lambda_{pj}x),$$

叫做 $f(x)$ 的 p 阶贝塞尔级数。

定理 4.2（p 阶贝塞尔级数）　若 $f(x)$ 在［0，R］上分段光滑，则 $f(x)$ 在（0，R）上有 p 阶的贝塞尔函数展开如下：

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j J_p(\frac{\alpha_{pj}}{R} r)$$

其中，α_{p1}，α_{p2}，Λ，是贝塞尔函数 $J_p(x) = 0$ 的正零点，

$$A_j = \frac{\int_0^R f(r) J_p(\frac{\alpha_{pj}}{R} r) r\mathrm{d}r}{\int_0^R J_p^2(\frac{\alpha_{pj}}{R} r) r\mathrm{d}r} = \frac{2}{R^2 J_{p+1}^2(\alpha_{pj})} \int_0^R f(r) J_p(\frac{\alpha_{pj}}{R} r) r\mathrm{d}r$$

在区间（0，R）中，在 $f(x)$ 连续点，级数收敛到 $f(x)$。而在间断点 x，它收敛值 $\dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$。

（2）贝塞尔函数的积分公式和渐近式

贝塞尔函数被广泛地用在数学，工程和物理学中，熟悉它的基本性质是十分重要的。贝塞尔函数并不是凭空产生的数学函数，而是和已有函数密切相关，如余弦和正弦函数，所组成的公式和积分可用来表示贝塞尔函数。

定理 4.3（积分表示）令 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$，

则对所有的 x 有

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta - x\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

定理 4.4（生成贝塞尔函数的傅里叶级数）对所有的 x 和所有的 θ，有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta n}$$

采用以上公式可以推导下面的恒等式，对所有的 x，

$$\cos x = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x);$$

$$\sin x = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(x)$$

一般地，傅立叶-贝塞尔函数系数即使对于很简单的函数也有十分复杂的表达式，但由于贝塞尔函数在实际工程中的重要用途，数学界为贝塞尔函数造了大量的表，以利于计算。

贝塞尔函数除了有第一类贝塞尔函数、第二类贝塞尔函数外，还有第三类贝塞尔函数，又称为汉克尔函数（Hankel）

$$H_p^{(1)}(x) = J_p(x) + \mathrm{i}Y_p(x)$$

$$H_p^{(2)}(x) = \mathrm{i}J_p(x) - Y_p(x)$$

和贝塞尔函数相关的函数还有其他一些类型：

4.4 变形贝塞尔函数

二阶常微分方程

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + p^2)y = 0, x > 0$$

称为变形贝塞尔方程，p 称为方程的阶。

当 p 不为整数时，变形贝塞尔方程的两个线性无关的相应 p、$-p$ 特解分别为

$$I_p(x) = \mathrm{i}^{-p} J_p(\mathrm{i}x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\Gamma(m+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p}$$

$$I_{-p}(x) = \mathrm{i}^{p} J_{-p}(\mathrm{i}x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\Gamma(m-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-p}$$

$I_p(x)$、$I_{-p}(x)$ 为 p 阶、$-p$ 阶第一类变形贝塞尔函数，也称为 p 阶、$-p$ 阶第一类虚宗量的贝塞尔函数。

第二类变形贝塞尔函数 $K_p(x)$ 定义为

$$K_p(x) = \frac{\frac{1}{2}\pi[I_{-p}(x) - I_p(x)]}{\sin p\pi} \quad (p\ 为非整数)$$

$$K_p(x) = \lim_{\alpha \to p} \frac{\frac{1}{2}\pi[I_{-\alpha}(x) - I_\alpha(x)]}{\sin \alpha\pi} \quad (p\ 为整数)$$

第二类变形贝塞尔函数 $K_p(x)$ 又被称为第二类虚宗量的贝塞尔函数。$K_p(x)$ 亦被称为 Macdonald 函数。

$$K_n(x) = \frac{1}{2}\sum_{n-1} (-1)^m \frac{(n-m-1)!}{(m!)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n} +$$

$$(-1)^{n+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} \left[\ln\frac{x}{2} + \gamma - 0.5\left(\sum_{k=0}^{m+n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{m1} \frac{1}{k}\right)\right]$$

其中 $\gamma = 0.57721566490153286\cdots$ 为欧拉常数。

4.5　Kelvin 函数

二阶常微分方程

$$x^2 y'' + xy' - (\mathrm{i}x^2 + p^2)y = 0, x > 0$$

称为 Kelvin 方程，p 为常数，称为方程的阶。

Kelvin 方程可写成标准型式的贝塞尔方程

$$x^2 y'' + xy' + [(\mathrm{i}^{\frac{3}{2}} x)^2 - p^2]y = 0, x > 0$$

Kelvin 方程的一般解可以表示为

$$y(x) = AJ_p(\mathrm{i}^{\frac{3}{2}} x) + BY_p(\mathrm{i}^{\frac{3}{2}} x)$$

其中 A，B 为任意常数。

注意到汉克尔函数的定义

$$K_p(\mathrm{i}^{\frac{1}{2}} x) = \frac{\pi}{2}\mathrm{i}^{p+1}[J_p(\mathrm{i}^{\frac{3}{2}} x) + \mathrm{i}Y_p(\mathrm{i}^{\frac{3}{2}} x)]$$

这样 $K_p(\mathrm{i}^{\frac{1}{2}} x)$ 也是 Kelvin 方程的一个解。这样 Kelvin 方程的一般解也可表示为

$$y(x) = CJ_p(\mathrm{i}^{\frac{3}{2}} x) + DK_p(\mathrm{i}^{\frac{1}{2}} x)$$

其中 C, D 为任意常数。

函数 $J_p(i^{\frac{3}{2}}x)$ 为复数函数，其实部和虚部分别定义为 Kelvin 函数 $\mathrm{ber}_p x$ 和 $\mathrm{bei}_p x$ 。这样 $J_p(i^{\frac{3}{2}}x) = \mathrm{ber}_p x + i\mathrm{bei}_p x$

容易证明 $J_p(i^{-\frac{1}{2}}x) = \mathrm{ber}_p x - i\mathrm{bei}_p x$ 。

类似地，Kelvin 函数 $\mathrm{ker}_p x$ 和 $\mathrm{kei}_p x$ 定义为

$$\mathrm{ker}_p x \pm i\mathrm{kei}_p x = i^{\mp p} K_p(i^{\pm\frac{1}{2}}x)$$

$\mathrm{ker}_p x$ ，$\mathrm{kei}_p x$ ，$\mathrm{ber}_p x$ 和 $\mathrm{bei}_p x$ 的级数表达式可以从 $K_p(x)$ 和 $J_p(x)$ 的表达式中得到。

4.6 球贝塞尔函数

二阶常微分方程

$$x^2 y'' + 2xy' + [x^2 - n(n+1)]y = 0, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

称为球贝塞尔方程。

球贝塞尔方程可写成标准型式的贝塞尔方程：应用函数变换：

$y(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} u(x)$ 则球贝塞尔方程可化为

$$x^2 u'' + xu' + [x^2 - (n + \frac{1}{2})^2]u = 0$$

球贝塞尔方程的一般解可以表示为

$$y(x) = A\, j_n(x) + B\, y_n(x)$$

其中 A, B 为任意常数。$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{n}}(x)$ ，$y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{n+\frac{1}{n}}(x)$ 。

类似于标准 Hankel 函数，第一类、第二类球 Hankel 函数分别定义为

$$h_n^{(1)}(x) = j_n(x) + i y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x)$$

$$h_n^{(2)}(x) = j_n(x) - i y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(x)$$

这样球贝塞尔方程的一般解也可表示为

$$y(x) = C h_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x) + D h_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(x)$$

其中 C, D 为任意常数。

$j_n(x)$ 和 $y_n(x)$ 可利用 Rayleigh 公式得出

$$j_n(x) = x^n \left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\sin x}{x}$$

$$y_n(x) = - x^n \left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\cos x}{x} (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

4.7 变形球贝塞尔函数

二阶常微分方程

$$x^2y''+2xy'-[x^2+n(n+1)]y=0,(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

称为变形球贝塞尔方程。

变形球贝塞尔方程可写成标准型式的贝塞尔方程。应用函数变换

$$y(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}u(x)$$

则变形球贝塞尔方程可化为

$$x^2u''+xu'-[x^2+(n+\frac{1}{2})^2]u=0$$

以上方程为 $n+\frac{1}{2}$ 变形球贝塞尔方程。该方程有如下两个独立解

$$u_1(x)=I_{n+\frac{1}{2}}(x)$$

$$u_2(x)=I_{-(n+\frac{1}{2})}(x)$$

这样变形球贝塞尔方程的两个线性独立解可表示为

$$i_n(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}I_{n+\frac{1}{2}}(x)$$

$$i_{-(n+1)}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}I_{-(n+\frac{1}{2})}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}I_{-(n+1)+\frac{1}{2}}(x)$$

其中 $i_n(x)$ 和 $i_{-(n+1)}(x)$ 分别称为 n 阶和 $-(n+1)$ 阶第一类变形球贝塞尔函数。

变形球贝塞尔方程的一般解可以表示为

$$y(x)=A\,i_n(x)+B\,i_{-(n+1)}(x)$$

其中 A，B 为任意常数。

第二类变形球贝塞尔函数 $k_n(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}K_{n+\frac{1}{n}}(x)$，

$$k_n(x)=(-1)^n\sqrt{\frac{\pi}{2}}[i_{-(n+\frac{1}{n})}(x)-i_n(x)]$$

变形球贝塞尔方程的一般解也可以表示为

$$y(x)=A\,i_n(x)+B\,k_n(x)$$

其中 A，B 为任意常数。

$i_n(x)$ 和 $i_{-(n+1)}(x)$ 可利用 Rayleigh 公式得出

$$i_n(x)=x^n(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})^n\frac{\sinh x}{x}$$

$$\mathrm{i}_{-(n+1)}(x)=x^n(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})^n\frac{\cosh x}{x}$$

第5章 圆域各向异性非稳态热传导方程解析——复数柱多项式与复数柱函数

特殊函数与数学物理问题紧密相关。对于无限长曲线型各向异性圆柱，如温度场分布与 z 坐标无关，只需研究柱横截面圆域温度场分布即可，这时可使用极坐标研究圆域内的数学物理方程。圆域非稳态温度场计算是一个经典数学物理问题。贝塞尔函数和贝塞尔多项式可以计算分析各向同性圆域温度场。由于交叉热传导系数 k_{12} 的存在，贝塞尔函数方法不能直接用来分析各向异性圆域温度场。作者综合幂级数方法和贝塞尔函数思想，提出了一种复数柱多项式 $Z_{ip}(x)$，$x=r\sqrt{\lambda}$，构建了复数圆面函数 $Z_{ip}(x)\mathrm{e}^{in\theta}$，并用来求解圆域内曲线型各向异性非稳态热传导问题。可以证明复数柱多项式 $Z_{ip}(x)$ 在区间 [0, R] 内带权函数 r 正交，同时还可以证明复数柱函数 $Z_{ip}(x)\mathrm{e}^{in\theta}$ 圆域内带权函数 r 正交。根据复数柱多项式方法获得的一般解析解代入初始条件，根据复数柱函数正交性可以获得待定系数，数值计算和数学证明都表明了该函数的正交性。研究表明复数柱多项式与贝塞尔函数相关联，后者是前者的特殊情况，复数柱多项式之间存在递推公式，本章同时也定义了第二类、三类复数柱多项式，并给出了复数柱多项式有关微分公式、递推公式和积分公式。

5.1 极坐标下的各向异性热传导方程

考虑无限长曲线型各向异性圆柱，圆柱半径为 R，温度场分布与 z 无关，仅在圆柱边界与外界进行热交换。这样极坐标 (r,θ) 下非稳态热传导控制偏微分方程为

$$k_{11}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+2k_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 T}{\partial r\partial\theta}+k_{22}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2}+q=\rho C_p\frac{\partial T}{\partial t} \tag{5-1}$$

其中 $T(r,\theta,t)$ 为圆域内温度分布函数，q 为热源函数，ρ 为密度函数，t 为时间，C_p 为比热。k_{11}、k_{12}、k_{22} 中的下标1为径向 r 方向，下标2代表切向 $\theta\,(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$，$k_{11}$、$k_{12}$、$k_{22}$ 为热传导系数

$$k_{11}=k_1\cos^2\beta+k_2\sin^2\beta$$
$$k_{12}=(k_1-k_2)\sin\beta\cos\beta$$
$$k_{22}=k_1\sin^2\beta+k_2\cos^2\beta$$

其中 k_1、k_2 为 r 方向主热传导系数、θ 切向主传导系数，β 为最大热传导轴方向与径向 r 的夹角。

实心圆域第一类边界条件设定为

$$r=R,\ T(r,\theta,t)=0;\ r=0,\ T(0,\theta,t)\ \text{有限值}$$

初始条件为

$$T(r,\theta,0) = \varphi(r,\theta) \tag{5-2}$$

假设圆域内没有热源，即 $q=0$。对于有热源问题，我们可以推导得到对应热源函数 q 的热传导偏微分方程特解，将特解代入后面求得一般解析解一并展开求解即可。下面分别求解稳态问题和非稳态问题解析解。

5.2　各向异性圆域稳态温度场解析

极坐标系下各向异性温度场控制方程为

$$k_{11}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + 2k_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 T}{\partial r\partial\theta} + k_{22}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2} = q$$

引入坐标变换

$$r = e^{\eta}$$

将上式代入各向异性温度场控制方程，可得

$$k_{11}\frac{\partial^2 T}{\partial\eta^2} + 2k_{12}\frac{\partial^2 T}{\partial\eta\partial\theta} + k_{22}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2} = qr^2 \tag{5-3}$$

设上式有如下齐次解

$$T = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(\eta)e^{im\theta}$$

其中 $i^2=1$；m 为整数。

设

$$f_m(\eta) = Ae^{im\eta s}$$

其中 m 为非0整数，A 为待定复数常数，s 为特征根。

将式（5-4）代入控制偏微分方程，可得特征方程

$$k_{11}s^2 + 2k_{12}s + k_{22} = 0$$

求解上式，可得特征根

$$\begin{cases} s_1 = a_1 + ib_1 \\ s_2 = a_1 - ib_1 \\ a_1 = -\dfrac{k_{12}}{k_{11}} \\ b_1 = \sqrt{\dfrac{k_{22}}{k_{11}} - \left(\dfrac{k_{12}}{k_{11}}\right)^2} \end{cases}$$

当 $m=0$，根据常微分方程理论可以求出相应解。

圆形域温度场一般解析解可写为下式

$$T = \sum_{m=1}^{\infty}\left[A_{1m}r^{-b_1}\cos(m\theta + ma_1\ln r) + A_{2m}r^{-b_1}\sin(m\theta + ma_1\ln r) + A_{3m}r^{b_1}\cos(m\theta + ma_1\ln r) + A_{4m}r^{b_1}\sin(m\theta + ma_1\ln r)\right] + c + d\ln r + T^*$$

其中 $A_{1m},A_{2m},A_{3m},A_{4m},c,d$ 为实数待定常数，T^* 为特解。

以上稳态解在后续数学物理问题求解中要经常遇到，可写为 $C(r,\theta)$，即

$$C(r,\theta)=\sum_{m=1}^{\infty}[A_{1m}r^{-b_1}\cos(m\theta+ma_1\ln r)+A_{2m}r^{-b_1}\sin(m\theta+ma_1\ln r)+$$
$$A_{3m}r^{b_1}\cos(m\theta+ma_1\ln r)+A_{4m}r^{b_1}\sin(m\theta+ma_1\ln r)]+c+d\ln r+T' \tag{5-4}$$

在实际计算中，m 不可能取无穷大，设 m 最多取到 M。这样上述圆形域温度场一般解可以有 $4M+2$ 个未知数，对于环形域每边有 1 个边界条件，在每个边界条件所建立的方程中将非傅立叶级数的部分展开成为傅立叶级数，根据级数的正交性可得到 $4M+2$ 方程可求得 $4M+2$ 未知数。

对于实心圆形域，根据中心处温度、热流为有限值的条件，可将待定常数削减一半，再根据圆形域外边界的 1 个边界条件建立 $2M+1$ 个线性代数方程，可以求解 $2M+1$ 个未知数，这样各向异性圆形域稳态温度场问题得解。

5.3 Z_{ip} 微分方程，复数柱多项式与复数柱函数和非稳态温度场解析解

设

$$T(r,\theta,t)=u(r,\theta)\Gamma(t) \tag{5-5}$$

将式（5-5）代入方程（5-1）后分离变量得到

$$\frac{\frac{\partial\Gamma}{\partial t}}{\alpha\Gamma}=\frac{[k_{11}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r})+2k_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}+k_{22}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}]\frac{1}{k_{11}}}{u}=-\lambda \tag{5-6}$$

其中 λ 为分离参数；α 为热扩散系数，$\alpha=\frac{k_{11}}{\rho C_p}$。

由式（5-6）可得

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r})+2\frac{k_{12}}{k_{11}}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}+\frac{k_{22}}{k_{11}}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\lambda u=0$$

和

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial t}+\alpha\lambda\Gamma=0$$

作如下参数变换

$$K_{11}=1,K_{12}=\frac{k_{12}}{k_{11}},K_{22}=\frac{k_{22}}{k_{11}},x=r\sqrt{\lambda}$$

采用上述变换，可得

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial t}+\alpha\lambda\Gamma=0 \tag{5-7a}$$

$$K_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+x\frac{\partial}{\partial x}(x\frac{\partial u}{\partial x})+2K_{12}x\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial x}+x^2u=0 \tag{5-7b}$$

根据式（5-7a），可得

$$\Gamma(t)=Ae^{-\lambda\alpha t}$$

实心圆域第一类边界条件可设定为

$$x = x_2, u(x,\theta) = 0; x = 0, u(x,\theta) \quad \text{有限。} \tag{5-8}$$

(注：对于边界给定特定温度值的第一类边界条件可以转化为齐次边界条件)。

圆环域边界条件可在 $r = r_2, r = r_1$ 边界分别定义边值条件。

5.3.1 Z_{ip} 微分方程，复数柱多项式与复数柱函数

方程（5-7b）解设为

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(x) e^{in\theta} \tag{5-9}$$

其中 $i^2 = -1$；n 为整数。

n=0 的解是关于圆心对称的解，其控制方程为

$$x \frac{d}{dx}(x \frac{du}{dx}) + x^2 u = 0$$

上式是 0 阶贝塞尔方程，其解为

$$u(x) = c_0 J_0(x) + d_0 Y_0(x)$$

其中 c_0, d_0 为实数待定常数。$J_0(x)$ 是 0 阶第一类贝塞尔函数，$Y_0(x)$ 是 0 阶第二类贝塞尔函数。根据贝塞尔函数定义

$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{p+2m}}{2^{p+2m} m! \Gamma(p+m+1)}$$

对于 $n \neq 0$，式（5-9）代入方程（5-7b）可得

$$x^2 \frac{d^2 f_n}{dx^2} + x \frac{df_n}{dx}(1 + 2K_{12} in) + f_n(x^2 - K_{22} n^2) = 0 \tag{5-10}$$

方程（5-10）是一个新方程，方程的特点是系数都是 x 的多项式函数并且出现常复数系数，命名为 Z_{ip} 方程。对于各向同性或正交异性热传导问题，$K_{12} = 0$，Z_{ip} 方程退化为贝塞尔方程

$$z^2 \frac{d^2 f}{dz^2} + z \frac{df}{dz} + f(z^2 - \nu^2) = 0$$

设

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{n,k} x^{k+ip} \tag{5-11}$$

其中 k 整数，p 是特征根。$A_{n,k}$ 是复数常数，这有别于常规贝塞尔函数方法。

将式（5-9）和（5-11）组合起来可得

$$u(x,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{n,k} x^{k+ip} e^{in\theta} \tag{5-12}$$

其中 $n \neq 0$。

综合方程（5-7b）和式（5-12）可得 $k = 2m, m = 0,1,2,\cdots,\infty$。

式（5-12）是一个新定义的函数，并具有复数形式。按常识，物理问题应该用实数函数表示。因此，如式（5-12）是问题解，就应该可以化为实数函数。可以证明：如果

$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A_{n,k}x^{k+\mathrm{i}p}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ 是实数形式，那么在 $n\neq0$ 可推得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A_{n,k}x^{k+\mathrm{i}p}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}=2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A_{n,k}x^{k+\mathrm{i}p}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$$

上式给出了复分析计算的便利条件，这样在实际计算分析只需针对 n 正值进行，可简化分析工作。

将式（5-12）代入方程（5-7b）后，化简可得

$$A_{n,0}[\mathrm{i}p+\mathrm{i}p(\mathrm{i}p-1)+2K_{12}\mathrm{i}n\mathrm{i}p-K_{22}n^2]x^{\mathrm{i}p}+$$
$$\{A_{n,2}[(2+\mathrm{i}p)2+2K_{12}(2+\mathrm{i}p)\mathrm{i}n-K_{22}n^2]+A_{n,0}\}x^{\mathrm{i}p+2}+\cdots+$$
$$\{A_{n,2m}[(2m+\mathrm{i}p)2+2K_{12}(2m+\mathrm{i}p)\mathrm{i}n-K_{22}n^2]+A_{n,2(m-1)}\}x^{\mathrm{i}p+2m}+\cdots=0$$

其中 $A_{n,0}\neq0$，$A_{n,2m}$ 下标 2m 代表 2 和 m 乘积，下文也是如此。

设上式中的 $x^{\mathrm{i}p},x^{2+\mathrm{i}p},x^{4+\mathrm{i}p},\cdots,x^{2(m-1)+\mathrm{i}p},x^{2m+\mathrm{i}p},\cdots$ 为 0 可得

$$-p^2-2K_{12}np-K_{22}n^2=0 \tag{5-13a}$$

$$A_{n,2m}=-\frac{A_{n,2(m-1)}}{(2m+\mathrm{i}p)^2+2K_{12}(2m+\mathrm{i}p)\mathrm{i}n-K_{22}n^2} \tag{5-13b}$$

求解方程（5-13a）可得特征根，记为

$$\begin{cases}p_{l,n}=a_{l,n}+\mathrm{i}b_{l,n}\\ a_{1,n}=-nK_{12}\\ b_{1,n}=n\sqrt{(K_{22}-K_{12}{}^2)}\\ a_{2,n}=-nK_{12}\\ b_{2,n}=-n\sqrt{(K_{22}-K_{12}{}^2)}\end{cases} \tag{5-14}$$

式（5-12）可以重写为

$$u=\sum_{l=1}^{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}A_{l,n,2m}x^{2m+\mathrm{i}p_{l,n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \tag{5-15}$$

由式（5-13b）和（5-14）可以推得

$$A_{l,n,2(m-1)}=A_{l,n,2m}(f_{1,l,n,2m}+\mathrm{i}f_{2,l,n,2m})$$

其中 $f_{1,l,n,2m},f_{2,l,n,2m}$（m=1，2，3，⋯）是热传导系数和 l、n、m 的函数，数学解析可以得到

$$f_{2,l,n,2m}=0$$

显然，上式简化了计算。

对应 $p_{1,n}$ 的 $f_{1,1,n,2m}$ 为

$$f_{1,1,n,2m}=-2^2m(-n\sqrt{K_{22}-K_{12}^2}+m) \tag{5-16a}$$

对应 p_{2n} 的 $f_{1,2,n,2m}$ 为

$$f_{1,2,n,2m}=-2^2m(n\sqrt{K_{22}-K_{12}^2}+m) \tag{5-16b}$$

待定复数常数 $A_{l,n,2m}$ 可以写为

$$A_{l,n,2m}=A_{l,n,2m,r}+\mathrm{i}A_{l,n,2m,i} \tag{5-17}$$

其中 $A_{l,n,0,r}, A_{l,n,0,i}, \cdots, A_{l,n,2m,r}, A_{l,n,2m,i}$ 为实数。

综合式（5-13b）（5-14）（5-16a）（5-16b）和（5-17），可得到递推矩阵

$$\begin{bmatrix} A_{l,n,2,m,r} \\ A_{l,n,2,m,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{f_{1,l,n,2m}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{f_{1,l,n,2m}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{l,n,2(m-1),r} \\ A_{l,n,2(m-1),i} \end{bmatrix} \tag{5-18}$$

和

$$\begin{bmatrix} A_{l,n,2m,r} \\ A_{l,n,2m,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{l,n,2m} & 0 \\ 0 & Z_{l,n,2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{l,n,0,r} \\ A_{l,n,0,i} \end{bmatrix} \tag{5-19}$$

其中 $Z_{l,n,2m}$ 为实数。

这样可以得到

$$u_{l,n} = \sum_{m=0}^{\infty} A_{l,n,m} x^{2m+ip_{l,n}} e^{in\theta} = A_{l,n,0} e^{in\theta} Z_{ip_{l,n}}(x) \tag{5-20}$$

和

$$u_{l,n} = (A_{l,n,0,r} + iA_{l,n,0,i}) e^{in\theta} Z_{ip_{l,n}}(x) \tag{5-21}$$

其中 $Z_{ip_{l,n}}(x)$ 为新定义的复数多项式，可称为第一类复数柱多项式

$$Z_{ip_{l,n}}(x) = x^{ia_{l,n}} \sum_{m=0}^{\infty} Z_{l,n,2m} x^{2m-b_{l,n}} \tag{5-22}$$

其中

$$\begin{cases} Z_{1,n,0} = 1 \\ Z_{1,n,2} = -\dfrac{1}{4(-n\sqrt{K_{22}-K_{12}^2}+1)} \\ Z_{1,n,4} = \dfrac{1}{8(-n\sqrt{K_{22}-K_{12}^2}+2)4(-n\sqrt{K_{22}-K_{12}^2}+1)} \\ \cdots \\ Z_{1,n,2m} = \dfrac{(-1)^m}{2^{2m}m!(-n\sqrt{K_{22}-K_{12}^2}+m)[-n\sqrt{K_{22}-K_{12}^2}+(m-1)]\cdots(-n\sqrt{K_{22}-K_{12}^2}+1)} \\ Z_{2,n,0} = 1 \\ Z_{2,n,2} = \dfrac{-1}{4(n\sqrt{K_{22}-K_{12}^2}+1)} \\ Z_{2,n,4} = \dfrac{(-1)^2}{8(n\sqrt{K_{22}-K_{12}^2}+2)4(n\sqrt{K_{22}-K_{12}^2}+1)} \\ \cdots \\ Z_{2,n,2m} = \dfrac{(-1)^m}{2^{2m}m!(n\sqrt{K_{22}-K_{12}^2}+m)[n\sqrt{K_{22}-K_{12}^2}+(m-1)]\cdots(n\sqrt{K_{22}-K_{12}^2}+1)} \end{cases} \tag{5-23}$$

$Z_{ip_{l,n}}(x)$ 是一个新多项式，在 $a_{l,n} \neq 0$ 时 $Z_{ip_{l,n}}(x)$ 为复数多项式。考虑到 $Z_{ip_{l,n}}(x)$ 多项式与特征根 $p_{l,n}$ 有关，针对不同的 $p_{l,n}$，实际计算 $Z_{ip_{l,n}}(x)$ 多项式也可写 $Z_{ip}(x)$。

Z_{ip} 方程（5－10）的解可写为

$$f_n(x) = A_{1,n,0} Z_{ip_{1,n}}(x) + A_{2,n,0} Z_{ip_{2,n}}(x) \tag{5-24}$$

式中 $A_{1,n,0}$，$A_{2,n,0}$ 为复数常数。由于 $Z_{ip}(x)$ 为复数函数，$e^{in\theta}$ 也是复数函数，在许多情况下 $Z_{ip}(x)$ 和 $e^{in\theta}$ 是互相耦合，由此下面给出一个新的复数函数一第一类复数柱函数 $Z_{ip}(x,\theta)$

$$Z_{ip}(x,\theta) = Z_{ip}(x)e^{in\theta}$$

下文将给出第一类复数柱多项式和第一类复数柱函数初步分析。

式（5－6）中 λ 能通过式（5－21）非平凡解条件确定。下面分情况研究问题。

5.3.2 给定温度边界条件的实心圆柱非稳态热传导解析解

式（5－8）圆心温度值有限性可以用来消减一半的待定系数，根据式（5－11），$b_{1,n}>0$，式（5－24）中 $l=1$ 的对应项可以消减，只有对应于 l（$l=2$）的待定系数（由于 $b_{2,n}<0$）需要确定。

式（5－8）的边界条件简化为

$$r = R, u(x,\theta) = 0$$

将式（5－21）代入上式，边界上 $x = R\sqrt{\lambda}$，根据 $n \neq 0$ 时 $A_{l,n,0}$ 非平凡解的条件，可以得到

$$Z_{ip_{l,n}}(x) = 0 \tag{5-25}$$

对于 $n=0$，$u = c_0 J_0(x)$ 是对称解。首先考虑对称问题，其次再考虑一般性问题。

实心圆域热传导：对称情况

考虑到 $J_0(x)$ 是 0 阶第一类贝塞尔函数，我们可得到 $J_0(x)$ 的零点 μ_j^0，$j=1,2,\cdots$

$$\lambda = \left(\frac{\mu_j^0}{R}\right)^2 \tag{5-26}$$

关于零点 μ_j^0 的特征函数写为

$$u_j = J_0\left(\frac{r}{R}\mu_j^0\right) \tag{5-27}$$

对应 μ_j^0 的 $\Gamma(t)$ 写为

$$\Gamma(t) = A e^{-\left(\frac{\mu_j^0}{R}\right)^2 at} \tag{5-28}$$

根据线性偏微分方程可叠加原理，可得到方程（5－1）的对称解为

$$T(r,t) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j e^{-\left(\frac{\mu_j^0}{R}\right)^2 at} J_0\left(\frac{r\mu_j^0}{R}\right) \tag{5-29}$$

式（5－29）是各向异性圆柱温度场的对称解。如果温度场初始条件与角度 θ 无关，式（5－29）就是该温度场的解。将 $t=0$ 代入式（5－29），再代入初始条件 $T(r,0) = \varphi(r)$，我们可以将 $\varphi(r)$ 展开成 $J_0\left(\frac{r\mu_j^0}{R}\right)$ 的级数，然后对比左右两式可以确定待定常数 A_j，问题得解。

实心圆域内热传导：一般情况

考虑 $Z_{ip_{l,n}}(x) = x^{iu_{l,n}} \sum_{m=0}^{\infty} Z_{l,n,2m} x^{2m-b_{l,n}}$，$Z_{ip_{l,n}}(x)$ 有无穷多零点，记为 $\mu_{l,n,j}^{0}$，$j=1, 2, 3, \cdots$。

求解 $Z_{ip_{l,n}}(x) = 0$ 可得 $\mu_{l,n,j}^{0}$

$$\mu_{l,n,j}^{0} = R\sqrt{\lambda} \tag{5-30}$$

根据式（5-5）（5-7a）（5-20）和（5-30）可得

$$u_{l,n,j}(r,\theta) = (A_{l,n,0,j,r} + iA_{l,n,0,j,i}) Z_{ip_{l,n}}\left(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R}\right) e^{in\theta} \tag{5-31a}$$

$$T(r,\theta,t) =$$

$$\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (A_{l,n,0,j,r} + iA_{l,n,0,j,i}) Z_{ip_{l,n}}\left(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R}\right) e^{in\theta} e^{-\left(\frac{\mu_{l,n,j}^{0}}{R}\right)^{2} at} + \sum_{j=1}^{\infty} c_{0j} J_{0}\left(\frac{r\mu_{j}^{0}}{R}\right) e^{-\left(\frac{\mu_{j}^{0}}{R}\right)^{2} at} \tag{5-31b}$$

将 $t=0$ 代入式（5-31b），再代入式（5-2）初始条件可得

$$\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (A_{l,n,0,j,r} + iA_{l,n,0,j,i}) Z_{ip_{l,n}}\left(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R}\right) e^{in\theta} + \sum_{j=1}^{\infty} c_{0j} J_{0}\left(\frac{r\mu_{j}^{0}}{R}\right) = \varphi(r,\theta) \tag{5-32}$$

求解式（5-32）可得 $A_{l,n,0,j,r}, A_{l,n,0,j,i}$。本章 5.4.1 节给出简略证明：如果 $\varphi(r,\theta)$ 是在圆域内分片连续函数，且 $\varphi(r,\theta) = \varphi_1(r,\theta) + f(r)$，$\varphi(r,\theta)$ 能展开为以下双复数级数和贝塞尔级数之和

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} B_{l,n,0,j} Z_{ip_{l,n}}\left(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R}\right) e^{in\theta} + \sum_{j=1}^{\infty} b_{1j} J_{0}\left(\frac{r\mu_{j}^{0}}{R}\right) \tag{5-33}$$

其中 $B_{l,n,0,j}$ 是复数常数，记为 $B_{l,n,0,j} = B_{l,n,0,j,r} + iB_{l,n,0,j,i}$。$B_{l,n,0,j}$ 和 b_{1j} 可以分别由式（5-70）～（5-72）确定。

$$B_{l,n,0,j} = \frac{\int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{R} \varphi_1(r,\theta) \left[Z_{ip_{l,n}}\left(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R}\right) e^{in\theta}\right]^{*} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{[N_{n,l}^{(j)}]}$$

$$[N_{n,l}^{(j)}] = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{R} \left[Z_{ip_{l,n}}\left(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R}\right) e^{in\theta}\right]^{*} Z_{ip_{l,n}}\left(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R}\right) e^{in\theta} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

和

$$b_{1j} = \frac{\int_{0}^{R} f(r) J_0\left(\frac{r\mu_{j}^{0}}{R}\right) r\mathrm{d}r}{\int_{0}^{R} \left[J_0\left(\frac{r\mu_{j}^{0}}{R}\right)\right]^{2} r\mathrm{d}r}$$

注意：对于实心圆域第一类边界条件，式（5-33）中 $\mu_{l,n,j}^{0}$ 只选取 $Z_{ip_{l,n}}(x)$ 无穷多零点中的正实根。

比较式（5-32）和（5-33）的 $J_0\left(\frac{r\mu_{j}^{0}}{R}\right)$，$Z_{ip_{l,n}}\left(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R}\right) e^{in\theta}$ 的系数，可得

$$A_{l,n,0,j,r} = B_{l,n,0,j,r}, A_{l,n,0,j,i} = B_{l,n,0,j,i}, c_{0j} = b_{1j} \tag{5-34}$$

因此，我们可以确定各向异性圆柱温度场。

根据后续 5.3.6 节，式（5-31）可以简化为

$$T(r,\theta,t)=\mathrm{Re}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(A_{l,n,0,j,r}+\mathrm{i}A_{l,n,0,j,i})Z_{ip_{l,n}}\left(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\theta}\mathrm{e}^{-\left(\frac{\mu_{l,n,j}^{0}}{R}\right)^{2}at}\right]+\sum_{j=1}^{\infty}c_{0j}J_{0}\left(\frac{r\mu_{j}^{0}}{R}\right)\mathrm{e}^{-\left(\frac{\mu_{j}^{0}}{R}\right)^{2}at} \tag{5-35}$$

这样计算可以简化。

5.3.3 复数多项式函数 $Z_{ip_{l,n}}(x)$ 初步分析

$Z_{ip_{l,n}}(x)$ 是复数多项式，这是一个新的多项式，需要研究 $Z_{ip_{l,n}}(x)$ 的结构。

式（5－25）的根记为 $\mu_{l,n,j}^{0}$ 。考虑到式（5－22）包括 1 和 x^{2m} 幂次项，$Z_{ip_{l,n}}(x)$ 实数零点应该是关于 0 点正负对称，为了避免在计算 $Z_{ip_{l,n}}(x)$ 时正负零点平方后造成重复计算，计算要遇到零点的平方值问题。为此，标记 $\left(\frac{\mu_{l,n,j}^{0}}{R}\right)^{2}=c_{l,n,j}+\mathrm{i}d_{l,n,j}$ 。这样可得

$$\left(\frac{\mu_{l,n,j}^{0}}{R}\right)^{2m-b_{l,n}+\mathrm{i}a_{l,n}}=(c_{l,n,j}+\mathrm{i}d_{l,n,j})^{m+0.5(-b_{l,n}+\mathrm{i}a_{l,n})} \tag{5-36}$$

由此，定义

$$\left(\frac{\mu_{l,n,j}^{0}}{R}\right)^{2m-b_{l,n}+\mathrm{i}a_{l,n}}=R_{l,n,j,m}+\mathrm{i}I_{l,n,j,m} \tag{5-37}$$

其中 $R_{l,n,j,m}, I_{l,n,j,m}$ 是实数。

对于 $\mu_{l,n,j}^{0}$ ，有 $\mu_{l,n,j}^{0}=R\sqrt{\lambda}$ ，$x=r\sqrt{\lambda}$ ，那么

$$x=\frac{r}{R}\mu_{l,n,j}^{0}$$

将 $x=\frac{r}{R}\mu_{l,n,j}^{0}$ 代入式（5－22）可得

$$Z_{ip_{l,n}}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}Z_{l,n,2m}\left(\frac{\mu_{l,n,j}^{0}}{R}\right)^{2m-b_{l,n}+\mathrm{i}a_{l,n}}r^{2m-b_{l,n}+\mathrm{i}a_{l,n}}=\sum_{m=0}^{\infty}Z_{l,n,2m}(R_{l,n,j,m}+\mathrm{i}I_{l,n,j,m})r^{2m-b_{l,n}+\mathrm{i}a_{l,n}} \tag{5-38}$$

这样，我们可得如下函数

$$Z_{ip_{l,n}}(x)=Z_{ip_{l,n}}\left(\frac{r}{R}\mu_{l,n,j}^{0}\right)=Y_{l,n}^{(j)}(r)+\mathrm{i}Q_{l,n}^{(j)}(r) \tag{5-39a}$$

$$Y_{l,n}^{(j)}(r)+iQ_{l,n}^{(j)}(r)=r^{\mathrm{i}a_{l,n}}(Z_{l,n}^{(j,1)}(r)+\mathrm{i}Z_{l,n}^{(j,2)}(r)) \tag{5-39b}$$

$$Z_{ip_{l,n}}(x)=r^{\mathrm{i}a_{l,n}}(Z_{l,n}^{(j,1)}(r)+\mathrm{i}Z_{l,n}^{(j,2)}(r)) \tag{5-39c}$$

式中

$$\begin{cases}Y_{l,n}^{(j)}(r)=Z_{l,n}^{(j,1)}(r)\cos(a_{l,n}\ln r)-Z_{l,n}^{(j,2)}(r)\sin(a_{l,n}\ln r)\\Q_{l,n}^{(j)}(r)=Z_{l,n}^{(j,1)}(r)\sin(a_{l,n}\ln r)+Z_{l,n}^{(j,2)}(r)\cos(a_{l,n}\ln r)\end{cases} \tag{5-40a}$$

其中 $Y_{l,n}^{(j)}(r)$、$Q_{l,n}^{(j)}(r)$ 和 $Z_{l,n}^{(j,1)}(r)$、$Z_{l,n}^{(j,2)}(r)$ 是实数多项式，定义如下

$$\begin{cases}Z_{l,n}^{(j,1)}(r)=r^{-b_{l,n}}(Z_{l,n,0}R_{l,n,j,0}+Z_{l,n,2}R_{l,n,j,1}r^{2}+\cdots+Z_{l,n,2(M-1)}R_{l,n,j,M-1}r^{2(M-1)}+Z_{l,n,2M}R_{l,n,j,M}r^{2M}+\cdots)\\Z_{l,n}^{(j,2)}(r)=r^{-b_{l,n}}(Z_{l,n,0}I_{l,n,j,0}+Z_{l,n,2}I_{l,n,j,1}r^{2}+\cdots+Z_{l,n,2(M-1)}I_{l,n,j,M-1}r^{2(M-1)}+Z_{l,n,2M}I_{l,n,j,M}r^{2M}+\cdots)\end{cases} \tag{5-40b}$$

计算中 m 最大取 M，$Z_{l,n,2m}$ 可由式（5－23）确定。

采用式（5－39a）～式（5－39c），我们可以得到

$$Z_{ip_{l,n}}(x)[Z_{ip_{l,n}}(x)]^* = [Z_{l,n}^{(j,1)}(r)]^2 + [Z_{l,n}^{(j,2)}(r)]^2 \tag{5-41a}$$

$$Z_{ip_{l,n}}(x)[Z_{ip_{l,n}}(x)]^* = [Y_{l,n}^{(j)}(r)]^2 + [Q_{l,n}^{(j)}(r)]^2 \tag{5-41b}$$

其中 $[Z_{ip_{l,n}}(x)]^*$ 是 $Z_{ip_{l,n}}(x)$ 的共轭式。

采取式（5－39c），式（5－35）可以重写为

$$T(r,\theta,t) = \mathrm{Re}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(A_{l,n,0,j,r} + \mathrm{i}A_{l,n,0,j,i})[Z_{l,n}^{(j,1)}(r) + \mathrm{i}Z_{l,n}^{(j,2)}(r)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}[n\theta + a_{l,n}\ln(r)]}\mathrm{e}^{-(\frac{\mu_{l,n,j}^0}{R})^2 at}\right\} + \sum_{j=1}^{\infty}c_{0j}J_0(\frac{r\mu_j^0}{R})\mathrm{e}^{-(\frac{\mu_j^0}{R})^2 at} \tag{5-42a}$$

和

$$T(r,\theta,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\{A_{l,n,0,j,r}[Z_{l,n}^{(j,1)}(r)\cos(n\theta + a_{l,n}\ln r) - Z_{l,n}^{(j,2)}(r)\sin(n\theta + a_{l,n}\ln r)] - A_{l,n,0,j,i}[Z_{l,n}^{(j,2)}(r)\cos(n\theta + a_{l,n}\ln r) + Z_{l,n}^{(j,1)}(r)(r)\sin(n\theta + a_{l,n}\ln r)]\}\mathrm{e}^{-(\frac{\mu_{l,n,j}^0}{R})^2 at} + \sum_{j=1}^{\infty}c_{0j}J_0(\frac{r\mu_j^0}{R})\mathrm{e}^{-(\frac{\mu_j^0}{R})^2 at} \tag{5-42b}$$

式（5－42*b*）为实数形式的级数解。

5.3.4　计算程序

采用复数柱函数分析计算曲线型各向异性圆柱非稳态热传导问题可以分解为八步：

第一步：利用式（5－14）计算特征根 $p_{l,n}$；

第二步：利用式（5－23）计算递推关系式 $Z_{l,n,2m}$；

第三步：依据式（5－25）确定零点 $\mu_{l,n,j}^0$；

第四步：依据式（5－37）计算 $R_{l,n,j,m}, I_{l,n,j,m}$；

第五步：依据式（5－39c）和（5－40b）确定函数 $Z_{l,n}^{(j,1)}(r)$、$Z_{l,n}^{(j,2)}(r)$ 和 $Z_{ip_{l,n}}(x)$；

第六步：确定 $B_{l,n,0,j}$ 和 b_{1j}。具体分两步计算：

首先，对初始条件 $\varphi(r,\theta) = \varphi(r,\theta) + f(r)$ 中的 $f(r)$ 按贝塞尔函数方法确定。确定 $\varphi(r,\theta)$ 按以下计算程序进行：将其中 $\varphi(r,\theta)$ 展开为 θ 的级数

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}F(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \tag{5-43}$$

其中

$$F(r) = \frac{\int_0^{2\pi}\varphi(r,\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}d\theta}{2\pi} = f_1(r) + \mathrm{i}f_2(r) \tag{5-44}$$

式中 $f_1(r), f_2(r)$ 为实数函数。

其次，对 $F(r)$ 展开为 r 的 $Z_{ip}(x)$ 级数

$$F(r)=\sum_{j=1}^{\infty}B_{l,n,0,j}Z_{ip_{l,n}}(x) \tag{5-45}$$

其中

$$B_{l,n,0,j}=\frac{\int_0^R F(r)\left[Z_{ip_{l,n}}(x)\right]^* r\mathrm{d}r}{\int_0^R Z_{ip}(x)\left[Z_{ip_{l,n}}(x)\right]^* r\mathrm{d}r}$$

$$\int_0^R F(r)\left[Z_{ip_{l,n}}(x)\right]^* r dr=\int_0^R\left[f_1(r)+\mathrm{i}f_2(r)\right]\left[Z_{ip}(x)\right]^* r\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^R\left[f_1(r)+\mathrm{i}f_2(r)\right]\left[Y_{l,n}^{(j)}(r)-\mathrm{i}Q_{l,n}^{(j)}(r)\right]r\mathrm{d}r$$

$$\int_0^R F(r)\left[Z_{ip_{l,n}}(x)\right]^* dr=\int_0^R\left[(f_1(r)Y_{l,n}^{(j)}(r)+f_2(r)Q_{l,n}^{(j)}(r))+\mathrm{i}f_2(r)Y_{l,n}^{(j)}(r)-\mathrm{i}f_1(r)Q_{l,n}^{(j)}(r)\right]r\mathrm{d}r$$

$$\int_0^R Z_{ip_{l,n}}(x)\left[Z_{ip_{l,n}}(x)\right]^* rdr=\int_0^R\left\{\left[Z_{l,n}^{(j,1)}(r)\right]^2+\left[Z_{l,n}^{(j,2)}(r)\right]^2\right\}r\mathrm{d}r$$

$$Z_{ip_{l,n}}(x)=r^{\mathrm{i}a_{l,n}}\left[Z_{l,n}^{(j,1)}(r)+\mathrm{i}Z_{l,n}^{(j,2)}(r)\right]$$

这样有

$$B_{l,n,0,j,r}=\frac{\int_0^R\left[f_1(r)Y_{l,n}^{(j)}(r)+f_2(r)Q_{l,n}^{(j)}(r)\right]r\mathrm{d}r}{\int_0^R\left\{\left[Z_{l,n}^{(j,1)}(r)\right]^2+\left[Z_{l,n}^{(j,2)}(r)\right]^2\right\}r\mathrm{d}r}$$

$$B_{l,n,0,j,i}=\frac{\int_0^R\left[f_2(r)Y_{l,n}^{(j)}(r)-f_1(r)Q_{l,n}^{(j)}(r)\right]r\mathrm{d}r}{\int_0^R\left\{\left[Z_{l,n}^{(j,1)}(r)\right]^2+\left[Z_{l,n}^{(j,2)}(r)\right]^2\right\}r\mathrm{d}r} \tag{5-46}$$

由于 $Z_{ip_{l,n}}(x)$ 形式复杂，很多情况下需要采用数值积分方法确定系数 $B_{l,n,0,j}$ 。

第七步：依据式（5－34）确定函数值 $A_{l,n,0,j,r}$，$A_{l,n,0,j,i}$，c_{0j} 。

第八步：依据式（5－42b）确定待定函数值。

由此，可以得出如下结论：如果一物理场确定，$p_{l,n}$，$Z_{l,n,2m}$ 和 $\mu_{l,n,j}^0$ 给定，$Z_{ip_{l,n}}(x)$ 可确定。待定系数 $B_{l,n,0,j}$ 和 $b_{l,j}$ 也确定，式（5－42b）数值也就给定，这样问题得解。

5.3.5　数值实验

考虑实心各向异性圆域，$R=1m$，$q=0$，圆域外径边界温度为 0℃，圆域初始温度分布是 $[(r-r^4)\cos(\theta+0.5\ln r)+1-r^2]$℃ 。热传导系数为 $k_1=0.301\mathrm{kcal/(m\cdot h\cdot ℃)}$，$k_2=0.129\mathrm{kcal/(m\cdot h\cdot ℃)}$，$\rho=590\mathrm{kg/m^3}$，$C_p=1756\mathrm{W\cdot s/(kg\cdot ℃)}$ 。

（1）分离变量参数 $\lambda_{l,n,j}=\left(\frac{\mu_{l,n,j}^0}{R}\right)^2$ 分布

分离变量参数（正实数 $\lambda_{l,n,j}$）可以由式（5－25）和（5－26）确定。计算结果显示在表 5－1 和表 5－2（$l=1$，2；$n=1$，$M=38$）。

表 5-1　$\lambda_{l,n,j}=(\frac{\mu_{l,n,j}^{0}}{R})^{2}(l=2,\ n=1)$ 和各向异性角 β 变化趋势

j \ β	0°	45°	90°
1	11.282151384631980	13.829347252991160	20.513760886224360
2	42.413312135754240	47.541697154258060	60.276106347556070
3	93.286812262210670	100.998735112957800	119.768655825258400
4	163.900067293248100	174.196095136600200	198.998483593495400
5	254.252711493104000	267.133027126303800	297.966859339215900
6	364.344654623427600	379.809319400572500	416.674237376861200
7	494.175448198211100	512.224903399004600	555.119009987168700
8	643.753569496809000	664.383318533327500	713.320530550991900
9	813.315917098813500	837.163627952637100	903.929984092461200
10	920.019893314279400	926.494012189647400	925.646840357053500

表 5-2　$\lambda_{l,n,j}=(\frac{\mu_{l,n,j}^{0}}{R})^{2}(l=1,\ n=1)$ 和各向异性角 β 变化趋势

j \ β	0°	45°	90°
1	1.608421023418868	0.3.476938607698206	7.468155364825758
2	19.801006949484870	15.888029018763170	36.842909858131660
3	57.750842571113570	51.249285547926770	85.925324138276980
4	115.441464790824200	106.354407443086900	154.742952363795300
5	192.871666584546700	181.199738478122500	243.298671786044300
6	290.041207356614700	275.784612764720100	351.593169997961600
7	406.949999209436600	390.108848841604100	479.626580413450300
8	543.598165833189600	524.172382804390200	627.402457223864600
9	699.986621477196800	677.973815492848100	793.344709354275300
10	860.755168711268300	842.840251520053100	

计算显示 $Z_{ip}(x)$ 函数有无穷多特征值，这些特征值可以排序为 $0<\mu_{l,n,1}^{0}<\mu_{l,n,2}^{0}<\mu_{l,n,3}^{0}<\cdots$，但是由于各向异性，$K_{12}$,$K_{22}$ 随着 β 变化而变化，这样我们无法提供象各向同性温度场中贝塞尔函数相对固定的计算表（$K_{22}=1$,$K_{12}=0$），只能按各自不同的热传导参数建立不同的计算表。

（2）验证 $Z_{ip_{l,n}}(x)$ 的正交性

考虑多项式函数 $Z_{ip_{l,n}}(x)$，对这个函数研究的一个关键就是其正交性。作者计算了 $Z_{ip_{l,n}}(x)$ 一些积分，计算参数设定为 $M=36$，$l=2$。

定义

$$\delta(l,n,j_1,j_2)=\int_0^R\left[Z_{ip_{l,n}}\left(\frac{r}{R}\mu^0_{l,n,j_2}\right)\right]^* Z_{ip_{l,n}}\left(\frac{r}{R}\mu^0_{l,n,j_1}\right)r\mathrm{d}r \tag{5-47}$$

对于具有各向异性角 $\beta=45^\circ$ 各向异性圆域，$\delta(l,n,j_1,j_2)$ 积分结果显示在表 5－3。

表 5－3　$\beta=45^\circ$ 的各向异性圆域 $\delta(l,n,j_1,j_2)$ 计算结果

j_2 \ j_1	1	2	4
1	0.04688	0.00000	0.00000
2	0.00000	0.04117	0.00000
3	0.00000	0.00000	0.00000
4	0.00000	0.00000	0.05443
5	0.00000	0.00000	0.00000
6	0.00000	0.00000	0.00000
7	0.00000	0.00000	0.00000
8	0.00000	0.00000	0.00000

其他的计算也显示出类似上表的结果。可以总结以下结论：如果 $j_1\neq j_2$，那么 $\delta(l,n,j_1,j_2)=0$；如果 $j_1=j_2$，那么 $\delta(l,n,j_1,j_2)\neq 0$。表 5－3 表明关于复数柱函数带权正交性的证明是正确的，即对于对应不同特征根 $\mu^0_{l,n,j}$ 的 $Z_{ip_{l,n}}(x)$ 是关于 r 正交的。

(3) 验证一般解析解的收敛性

针对各向异性角 $\beta=45^\circ$ 的曲线型各向异性圆域进行数值实验，材料参数同上节。首先增大 M，观察 $T(0.5,0,0)$(℃) 变化，以验证一般解析解 (5－42b) 的收敛性。计算结果见表 5－4 和表 5－5。计算表明，m 在 M 截断，J 是 $\lambda_{l,n,j}$ 正数根的个数，计算表明 J 与 M 相关联。

表 5－4　各向异性角 $\beta=45^\circ$ 的各向异性圆域中心温度 $T(0.5,0,0)$(℃)

M	10($J=2$)	16($J=4$)	30($J=8$)	36($J=8$)	*
$T(0.5,0,0)$	1.202	1.153	1.149	1.166	1.161

表 5－5　各向异性角 $\beta=0^\circ$ 的各向异性圆域中心温度 $T(0.5,0,0)$(℃)

M	10($J=2$)	16($J=4$)	30($J=8$)	36($J=8$)	*
$T(0.5,0,0)$	1.205	1.154	1.155	1.166	1.161

* 是 $[(r-r^4)\cos(\theta+0.5\ln r)+1-r^2]$ 精确值。

表 5－4 和表 5－5 表明各向异性圆域温度场一般解析解 (5－42b) 收敛稳定。

(4) 曲线型各向异性圆域温度场分布情况

首先验证本文一般解析解对于边界条件和初始条件的满足情况。计算参数同上，r 单位为 m，θ 单位为 (°)。计算结果见表 5－6～5－9。

表 5 - 6　$\beta=45°$ 的各向异性圆域温度场 t=0s 分布 $T(r,\theta,0)$ (℃)

r \ θ	0	45	90	180	270	315
0.00	1.0380	1.0380	1.0380	1.0380	1.0380	1.0380
0.1	1.0220	1.0740	1.0720	0.9421	0.8925	0.9470
0.2	1.1010	1.1620	1.1060	0.8237	0.8183	0.9585
0.3	1.1500	1.1970	1.0760	0.6715	0.7465	0.9640
0.5	1.1660	1.1500	0.9034	0.3442	0.6066	0.9406
0.7	0.9692	0.8943	0.5981	0.0637	0.4349	0.7789
0.8	0.7408	0.6580	0.3969	−0.0337	0.3102	0.5967
0.9	0.4412	0.3785	0.2090	−0.0491	0.1831	0.3602
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

表 5 - 7　初始温度分布 $[(r-r^1)\cos(\theta+0.5\ln r)+1-r^2]$ (℃)

r \ θ	0	45	90	180	270	315
0.00	1.0380	1.0380	1.0380	1.0380	1.0380	1.0380
0.1	1.0220	1.0740	1.0720	0.9421	0.8925	0.9470
0.2	1.1010	1.1620	1.1060	0.8237	0.8183	0.9585
0.3	1.1500	1.1970	1.0760	0.6715	0.7465	0.9640
0.5	1.1660	1.1500	0.9034	0.3442	0.6066	0.9406
0.7	0.9692	0.8943	0.5981	0.06374	0.4349	0.7789
0.8	0.7408	0.6580	0.3969	−0.0337	0.3102	0.5967
0.9	0.4412	0.3785	0.2090	−0.0491	0.1831	0.3602
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

表 5 - 8　$\beta=45°$ 的各向异性圆域温度场 $t=10^5$ s 分布 $T(r,\theta,10^5)$ (℃)

r \ θ	0	45	90	180	270	315
0.1	0.9485	1.0020	1.0000	0.8655	0.8140	0.8705
0.3	1.0450	1.0870	0.9765	0.6094	0.6775	0.8752
0.5	1.0030	0.9902	0.7885	0.3319	0.5462	0.8189
0.7	0.7455	0.6936	0.4884	0.1183	0.3753	0.6137
0.9	0.2698	0.2377	0.1510	0.0190	0.1378	0.2284
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

表 5-9　$\beta=45°$ 的各向异性圆域温度场 $t=4\times10^6$ s 分布 $10^2T(r,\theta,4\times10^6)$(℃)

r \ θ	0	45	90	180	270	315
0.001	0.9114	0.9114	0.9114	0.9114	0.9114	0.9114
0.1	0.8983	0.8984	0.8984	0.8982	0.8981	0.8982
0.3	0.7970	0.7970	0.7969	0.7962	0.7963	0.7967
0.5	0.6111	0.6110	0.6107	0.6101	0.6104	0.6108
0.7	0.3718	0.3718	0.3715	0.3711	0.3714	0.3717
0.9	0.1189	0.1188	0.1187	0.1186	0.1187	0.1188
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

在具体数值计算中要遇到 $r=0$ 的问题，可以选取非常微小数值 r 进行积分数值计算，数值实验表明这种算法稳定收敛。

对以上计算表分析可知：一般解析解收敛性好，且满足边界条件初始条件。表 5-9 显示时间延长以后圆域内温度趋向于 0℃，鉴于计算条件设定为边界温度为 0，计算结果与物理常识是一致，表明本章一般解析解是正确的。

本节发展的复数柱函数方法由复数傅立叶级数 $e^{in\theta}$，复数多项式函数 $Z_{ip}(x)$ 和分离变量法综合构成，分离变量法将空间坐标函数和时间函数分离。求解基础在于复数柱函数 $e^{in\theta}Z_{ip}(x)$ 和贝塞尔函数在圆域带权正交性。这种求解方法是数学物理方法的一种基本方法，求解中建立的复数柱多项式函数如同贝塞尔多项式函数一般，具有一般性，本章以下部分对复数柱多项式函数进行研究。

5.3.6　复数柱函数解实数化证明

根据式（5-20），可得

$$u_{l,n}=\sum_{m=0}^{\infty}A_{l,n,2m}x^{2m-ip_{l,n}}e^{in\theta}=A_{l,n,0}\sum_{m=0}^{\infty}Z_{l,n,2m}x^{2m+ip_{l,n}}e^{in\theta}$$

定义新的多项式函数 $J_n^{(l)}(x)$

$$J_n^{(l)}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}Z_{l,n,2m}x^{2m-b_{l,n}}$$

其中 $Z_{l,n,2m}$ 根据（5-23）计算。

根据式（5-22），可得

$$Z_{ip_{l,n}}(x)=x^{ia_{l,n}}J_n^{(l)}(x)\tag{5-48}$$

当 $n\neq0$，对应 $p_{1,n}=a_{1,n}+ib_{1,n}$ 的复数柱函数解可写为

$$u_1=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_{1,n,0}Z_{ip_{1,n}}(x)e^{in\theta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_{1,n,0}J_n^{(1)}(x)x^{ia_{1,n}}e^{in\theta}=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}J_n^{(1)}(x)\{A_{1,n,0,r}\cos[n\theta+a_{1,n}\ln(x)]-A_{1,n,0,i}\sin[n\theta+a_{1,n}\ln(x)]\}+$$

$$i\sum_{n=1}^{\infty}J_n^{(1)}(x)\{A_{1,n,0,i}\cos[n\theta+a_{1,n}\ln(x)]+A_{1,n,0,r}\sin[n\theta+a_{1,n}\ln(x)]\}+$$

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} J_n^{(1)}(x)\{A_{1,n,0,r}\cos[n\theta + a_{l,n}\ln(x)] - A_{1,n,0,i}\sin[n\theta + a_{1,n}\ln(x)]\} +$$
$$\mathrm{i}\sum_{n=-\infty}^{-1} J_n^{(1)}(x)\{A_{1,n,0,i}\cos[n\theta + a_{l,n}\ln(x)] + A_{1,n,0,r}\sin[n\theta + a_{1,n}\ln(x)]\}$$

这样，

$$u_1 =$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} J_n^{(1)}(x)\{A_{1,n,0,r}\cos[n\theta + a_{1,n}\ln(x)] - A_{1,n,0,i}\sin[n\theta + a_{1,n}\ln(x)]\} +$$
$$\mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty} J_n^{(1)}(x)\{A_{1,n,0,i}\cos[n\theta + a_{1,n}\ln(x)] + A_{1,n,0,r}\sin[n\theta + a_{1,n}\ln(x)]\} + \tag{5-49}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} J_{-n}^{(1)}(x)\{A_{1,-n,0,r}\cos[n\theta + a_{1,n}\ln(x)] + A_{1,-n,0,i}\sin[n\theta + a_{1,n}\ln(x)]\} +$$
$$\mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty} J_{-n}^{(1)}(x)\{A_{1,-n,0,i}\cos[n\theta + a_{1,n}\ln(x)] - A_{1,-n,0,r}\sin[n\theta + a_{1,n}\ln(x)]\}$$

当 $n \neq 0$，对应 $p_{2,n} = a_{1,n} - \mathrm{i}b_{1,n}$ 的复数柱函数解可写为

$$u_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{2,n,0} Z_{ip_{2,n}}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} =$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} J_n^{(2)}(x)\{A_{2,n,0,r}\cos[n\theta + a_{1,n}\ln(x)] - A_{2,n,0,i}\sin[n\theta + a_{1,n}\ln(x)]\} +$$
$$\mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty} J_n^{(2)}(x)\{A_{2,n,0,i}\cos[n\theta + a_{1,n}\ln(x)] + A_{2,n,0,r}\sin[n\theta + a_{1,n}\ln(x)]\} + \tag{5-50}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} J_{-n}^{(2)}(x)(A_{2,-n,0,r}\cos[n\theta + a_{1,n}\ln(x)] + A_{2,-n,0,i}\sin[n\theta + a_{1,n}\ln(x)]\} +$$
$$\mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty} J_{-n}^{(2)}(x)(A_{2,-n,0,i}\cos[n\theta + a_{1,n}\ln(x)] - A_{2,-n,0,r}\sin[n\theta + a_{1,n}\ln(x)]\}$$

采用式（5－14）和（5－23）可以得到

$$\begin{cases} J_{-n}^{(1)}(x) = J_n^{(2)}(x) \\ J_{-n}^{(2)}(x) = J_n^{(1)}(x) \end{cases} \tag{5-51}$$

采用式（5－50）和（5－51），u_2 写为

$$u_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{2,n,0} Z_{ip_{2,n}}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} =$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} J_{-n}^{(1)}(x)\{A_{2,n,0,r}\cos[n\theta + a_{1,n}\ln(x)] - A_{2,n,0,i}\sin[n\theta + a_{1,n}\ln(x)]\} +$$
$$\mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty} J_{-n}^{(1)}(x)\{A_{2,n,0,i}\cos[n\theta + a_{1,n}\ln(x)] + A_{2,n,0,r}\sin[n\theta + a_{1,n}\ln(x)]\} +$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} J_n^{(1)}(x)\{A_{2,-n,0,r}\cos[n\theta + a_{1,n}\ln(x)] + A_{2,-n,0,i}\sin[n\theta + a_{1,n}\ln(x)]\} +$$

$$\mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty}J_n^{(1)}(x)\{A_{2,-n,0,i}\cos[n\theta+a_{1,n}\ln(x)]-A_{2,-n,0,r}\sin[n\theta+a_{1,n}\ln(x)]\}\tag{5-52}$$

这样可得

$$\begin{aligned}
&u_1+u_2=\\
&\sum_{n=1}^{\infty}J_{-n}^{(1)}(x)\{(A_{2,n,0,r}+A_{1,-n,0,r})\cos[n\theta+a_{1,n}\ln(x)]+(A_{1,-n,0,i}-A_{2,n,0,i})\sin[n\theta+a_{1,n}\ln(x)]\}+\\
&\sum_{n=1}^{\infty}J_n^{(1)}(x)\{(A_{2,-n,0,r}+A_{1,n,0,r})\cos[n\theta+a_{1,n}\ln(x)]+(A_{2,-n,0,i}-A_{1,n,0,i})\sin[n\theta+a_{1,n}\ln(x)]\}+\\
&\mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty}J_{-n}^{(1)}(x)\{(A_{2,n,0,i}+A_{1,-n,0,i})\cos[n\theta+a_{1,n}\ln(x)]+(A_{2,n,0,r}-A_{1,-n,0,r})\sin[n\theta+a_{1,n}\ln(x)]\}+\\
&\mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty}J_n^{(1)}(x)\{(A_{2,-n,0,i}+A_{1,n,0,i})\cos[n\theta+a_{1,n}\ln(x)]+(A_{1,n,0,r}-A_{2,-n,0,r})\sin[n\theta+a_{1,n}\ln(x)]\}
\end{aligned}\tag{5-53}$$

式（5－7b）解为

$$u=u_1+u_2+u^{**}$$

其中 u^{**} 是式（5－9）当 $n=0$ 的解。

如果 u 是实数，即 u 的虚部为 0，采用式（5－53）可得

$$\begin{cases}A_{2,n,0,i}+A_{1,-n,0,i}=0\\A_{2,n,0,r}-A_{1,-n,0,r}=0\\A_{2,-n,0,i}+A_{1,n,0,i}=0\\A_{1,n,0,r}-A_{2,-n,0,r}=0\end{cases}\tag{5-54}$$

采用式（5－51）并将式（5－54）代入式（5－53）可得

$$\begin{aligned}
u_1+u_2&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[A_{1,n,0}Z_{ip_{1,n}}(x)\mathrm{e}^{in\theta}+A_{2,n,0}Z_{ip_{2,n}}(x)\mathrm{e}^{in\theta}]\\
&=2\mathrm{Re}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}[A_{1,n,0}Z_{ip_{1,n}}(x)\mathrm{e}^{in\theta}+A_{2,n,0}Z_{ip_{2,n}}(x)\mathrm{e}^{in\theta}]\right\}\\
&=2\sum_{n=1}^{\infty}J_n^{(1)}(x)\{A_{1,n,0,r}\cos[n\theta+a_{1,n}\ln(x)]-A_{1,n,0,i}\sin[n\theta+a_{1,n}\ln(x)]\}+\\
&\quad 2\sum_{n=1}^{\infty}J_n^{(2)}(x)\{A_{2,n,0,r}\cos[n\theta+a_{1,n}\ln(x)]-A_{2,n,0,i}\sin[n\theta+a_{1,n}\ln(x)]\}
\end{aligned}$$

由于 $A_{1,n,0}$ 和 $A_{2,n,0}$ 为任意待定常数，为简便起见，u_1+u_2 公式中 $2Re$ {…} 可简写为 Re {…}

5.4 复数柱函数展开定理与复数柱多项式研究

5.4.1 复数柱函数展开定理证明

考虑实心圆域（$0\leqslant r\leqslant R, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$），对于非稳态热传导方程（5-1），式（5-6）的分离常数可写为 $\lambda_{l,n,j}=(\frac{\mu^0_{l,n,j}}{R})^2$，其中 $\mu^0_{l,n,j}$（$j=1, 2, \cdots, \infty$）是 $Z_{ip_{l,n}}(x)=0$ 的特征根。根据参数变换定义，$x=\frac{r\mu^0_{l,n,j}}{R}$。

由方程（5-6）可得

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r})+2K_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}+\frac{K_{22}}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+r\lambda_{l,n,j}u=0 \tag{5-55}$$

将式（5-21）中 $u_{l,n}=(A_{l,n,0,r}+\mathrm{i}A_{l,n,0,i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}Z_{ip_{l,n}}(x)$ 和 $x=\frac{r\mu^0_{l,n,j}}{R}$ 代入方程（5-55），可得

$$\frac{\partial}{\partial r}[r\frac{\partial(Z_{ip_{l,n}}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta})}{\partial r}]+2K_{12}\frac{\partial^2[Z_{ip_{l,n}}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}]}{\partial r\partial\theta}-\frac{n^2K_{22}Z_{ip_{l,n}}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{r}+r(\frac{\mu^0_{l,n,j}}{R})^2Z_{ip_{l,n}}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}=0 \tag{5-56}$$

$\mu^0_{l,n,j}$ 是 $Z_{ip_{l,n}}(x)=0$ 的根。根据式（5-23），可得 $\mu^0_{l,n,j}=\mu^0_{l+1,-n,j}$。这样，一个 $\mu^0_{l,n,j}$ 与两个方程关联，一个对于 n 的方程（5-56），另一个对应于 $-n$ 的如下方程

$$\frac{\partial}{\partial r}\{r\frac{\partial[Z_{ip_{l+1,-n}}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}]}{\partial r}+2K_{12}\frac{\partial^2[Z_{ip_{l+1,-n}}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}]}{\partial r\partial\theta}-\frac{n^2K_{22}Z_{ip_{l+1,-n}}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}}{r}+r(\frac{\mu^0_{l,n,j}}{R})^2Z_{ip_{l+1,-n}}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}=0 \tag{5-57}$$

其中 $Z_{ip_{l+1,-n}}(x)=x^{\mathrm{i}a_{l+1,-n}}\sum_{m=0}^{\infty}Z_{l,n,2m}x^{2m-b_{l+1,-n}}$。

这样，$Z_{ip_{l+1,-n}}(x)=x^{-\mathrm{i}a_{l,n}}\sum_{m=0}^{\infty}Z_{l,n,2m}x^{2m-b_{l,n}}=[Z_{ip_{l,n}}(x)]^*$。

方程（5-56）和（5-57）可称为连带方程。

$Z_{ip_{l+1,-n}}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ 的共轭函数写为 $[Z_{ip_{l,n}}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}]^*$。这样可得

$$[Z_{ip_{l,n}}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}]^*=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}x^{-\mathrm{i}a_{l,n}}\sum_{m=0}^{\infty}Z_{l,n,2m}x^{2m-b_{l,n}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}Z_{ip_{l+1,-n}}(x) \tag{5-58}$$

这样，式（5-57）可写为

$$\frac{\partial}{\partial r}\{r\frac{\partial[Z_{ip_{l,n}}(x)e^{in\theta}]^*}{\partial r}+2K_{12}\frac{\partial[Z_{ip_{l,n}}(x)e^{in\theta}]^*}{\partial r\partial\theta}-\frac{n^2K_{22}[Z_{ip_{l,n}}(x)e^{in\theta}]^*}{r}+r(\frac{\mu^0_{l,n,j}}{R})^2[Z_{ip_{l,n}}(x)e^{in\theta}]^*=0 \tag{5-59}$$

标记 $x=r\alpha$。假设 $Z_{ip_{l,n}}(r\alpha_1)$、$Z_{ip_{l,n}}(r\alpha_2)$ 是方程（5-57）的解，那么 $[Z_{ip_{l,n}}(r\alpha_2)]^*$ 是方程（5-59）的解。$\alpha_1=\frac{\mu^0_{l,n,j_1}}{R}$，$\alpha_2=\frac{\mu^0_{l,n,j_2}}{R}$，$Z_{ip_{l,n}}(\alpha_1R)=Z_{ip_{l,n}}(\alpha_2R)=0$，$\alpha_1\neq\alpha_2$。这

样可得

$$e^{in\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial Z_{ip_{l,n}}(\alpha_1 r)}{\partial r}\right]+2inK_{12}\frac{\partial Z_{ip_{l,n}}(\alpha_1 r)}{\partial r}-\frac{n^2K_{22}Z_{ip_{l,n}}(\alpha_1 r)}{r}+(\alpha_1)^2 rZ_{ip_{l,n}}(\alpha_1 r)\right\}=0 \tag{5-60}$$

$$e^{-in\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\{r\frac{\partial [Z_{ip_{l,n}}(\alpha_2 r)]^*}{\partial r}-2inK_{12}\frac{\partial [Z_{ip_{l,n}}(\alpha_2 r)]^*}{\partial r}-\frac{n^2K_{22}[Z_{ip_{l,n}}(\alpha_2 r)]^*}{r}+(\alpha_2)^2 r[Z_{ip_{l,n}}(\alpha_2 r)]^*\right)=0 \tag{5-61}$$

方程（5－60）乘以 $-[Z_{ip_{l,n}}(\alpha_2 r)e^{in\theta}]^*$，方程（5－61）乘以 $e^{in\theta}Z_{ip_{l,n}}(r\alpha_1)$，相加后将结果从 $r=0$ 到 $r=R$ 积分可得

$$[(\alpha_1)^2-(\alpha_2)^2]\int_0^R rZ_{ip_{l,n}}(\alpha_1 r)e^{in\theta}[Z_{ip_{l,n}}(\alpha_2 r)e^{in\theta}]^*\,dr=0 \tag{5-62}$$

因为 $\mu^0_{l,n,j_1}\neq\mu^0_{l,n,j_2}$，可得

$$\int_0^R rZ_{ip_{l,n}}\left(\frac{\mu^0_{l,n,j_1}}{R}r\right)\left[Z_{ip_{l,n}}\left(\frac{\mu^0_{l,n,j_2}}{R}r\right)\right]^*dr=0,\ j_1\neq j_2 \tag{5-63}$$

下一步，我们研究 $Z_{ip_{2,n}}\left(\frac{\mu^0_{2,n,j_1}}{R}r\right)e^{in\theta}$ 和 $Z_{ip_{1,n}}\left(\frac{\mu^0_{1,n,j_2}}{R}r\right)e^{in\theta}$ 之间的关系。

标记 $Z_{ip_{2,n}}\left(\frac{\mu^0_{2,n,j_1}}{R}r\right)$ 为 $f_2(x)$。根据方程（5－56）可得

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial(f_2e^{in\theta})}{\partial r}\right]+2K_{12}\frac{\partial^2(f_2e^{in\theta})}{\partial r\partial\theta}-\frac{n^2K_{22}f_2e^{in\theta}}{r}+r\left(\frac{\mu^0_{2,n,j_1}}{R}\right)^2 f_2e^{in\theta}=0 \tag{5-64}$$

标记 $Z_{ip_{1,n}}\left(r\frac{\mu^0_{1,n,j_2}}{R}\right)$ 为 $F_2(x)$。采用方程（5－64）可得

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial(F_2e^{in\theta})^*}{\partial r}\right]+2K_{12}\frac{\partial(F_2e^{in\theta})^*}{\partial r\partial\theta}-\frac{n^2K_{22}(F_2e^{in\theta})^*}{r}+r\left(\frac{\mu^0_{1,n,j_2}}{R}\right)^2(F_2e^{in\theta})^*=0 \tag{5-65}$$

方程（5－64）乘以 $-(F_2e^{in\theta})^*$，方程（5－65）乘以 $e^{in\theta}f_2$，相加后将结果从 $r=0$ 到 $r=R$ 积分可得

$$\left[\left(\frac{\mu^0_{1,n,j_2}}{R}\right)^2-\left(\frac{\mu^0_{2,n,j_1}}{R}\right)^2\right]\int_0^R rZ_{ip_{2,n}}\left(\frac{\mu^0_{2,n,j_1}}{R}r\right)e^{in\theta}\left[Z_{ip_{1,n}}\left(\frac{r\mu^0_{1,n,j_2}}{R}\right)e^{in\theta}\right]^*dr=0 \tag{5-66}$$

因为 $\mu^0_{1,n,j_2}\neq\mu^0_{2,n,j_1}$，可得

$$\int_0^R rZ_{ip_{2,n}}\left(\frac{\mu^0_{2,n,j_1}}{R}r\right)e^{in\theta}\left[Z_{ip_{1,n}}\left(\frac{r\mu^0_{1,n,j_2}}{R}\right)e^{in\theta}\right]^*dr=0 \tag{5-67}$$

其中 $n\neq 0$。

根据式（5－63）和（5－67），依据 Sturm－Liouville 理论，可得 $Z_{ip_{l,n}}\left(r\frac{\mu^0_{l,n,j}}{R}\right)e^{in\theta}$ 系列在圆域（$0\leqslant r\leqslant R$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$）关于权 r 正交。根据 Sturm－Liouville theory 和 $Z_{ip_{l,n}}\left(r\frac{\mu^0_{l,n,j}}{R}\right)e^{in\theta}$ 正交性，可得复数柱函数展开定理，并给出函数展开为复数柱函数的充分条件和计算公式。

复数柱函数 $Z_{ip_{l,n}}(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R})e^{in\theta}$ 展开定理

设 $\varphi(r,\theta)$ 在区域（$0\leqslant r\leqslant R$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$）是分片连续函数，这样 $\varphi(r,\theta)$ 可以展开为复数柱函数级数

$$\varphi(r,\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}B_{l,n,0,j}Z_{ip_{l,n}}(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R})e^{in\theta}+\sum_{j=1}^{\infty}b_{1j}J_0(\frac{r\mu_j^0}{R}) \tag{5-68}$$

其中 $\mu_{l,n,j}^{0}$ 是 $Z_{ip_{l,n}}(x)=0$ 当 $n\neq 0$ 零点。μ_j^0 是 0 阶第一类贝塞尔函数零点。$B_{l,n,0,j}$，b_{1j} 为级数常数。若 $\varphi(r,0)$ 是函数关于 r 的 $f(r)$ 和关于 (r,θ) 的函数 $\varphi(r,\theta)$ 之和，即

$$\varphi(r,\theta)=f(r)+\varphi_1(r,\theta) \tag{5-69}$$

那么级数常数可以由下式确定

$$B_{l,n,0,j}=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^R\varphi_1(r,\theta)\left[Z_{ip_{l,n}}(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R})e^{in\theta}\right]^{*}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{\left[N_{n,l}^{(j)}\right]} \tag{5-70}$$

$$\left[N_{n,l}^{(j)}\right]=\int_0^{2\pi}\int_0^R\left[Z_{ip_{l,n}}(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R})e^{in\theta}\right]^{*}Z_{ip_{l,n}}(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R})e^{in\theta}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \tag{5-71}$$

和

$$b_{1j}=\frac{\int_0^R f(r)J_0(\frac{r\mu_j^0}{R})r\mathrm{d}r}{\int_0^R\left[J_0(\frac{r\mu_j^0}{R})\right]^2r\mathrm{d}r} \tag{5-72}$$

式（5-68）可被称为 $\varphi(r,\theta)$ 的复数柱函数展开式。对于圆域（$0\leqslant r\leqslant R$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$）任一点，$\varphi(r,\theta)$ 连续，那么该复数柱函数收敛到 $\varphi(r,\theta)$。

5.4.2 $Z_{ip_{l,n}}(x)$ 多项式与贝塞尔函数的关系

根据式（5-22），$Z_{ip_{l,n}}(x)=x^{ia_{l,n}}\sum_{m=0}^{\infty}Z_{l,n,2m}x^{2m-b_{l,n}}$

在式（5-23）中，取

$$\begin{cases}Z_{1,n,0}=\dfrac{1}{2^{-n\sqrt{K_{22}-K_{12}^2}}\Gamma(-n\sqrt{K_{22}-K_{12}^2}+1)}\\[2ex]Z_{2,n,0}=\dfrac{1}{2^{n\sqrt{K_{22}-K_{12}^2}}\Gamma(n\sqrt{K_{22}-K_{12}^2}+1)}\end{cases} \tag{5-73}$$

利用 $\Gamma(x)$ 的递推特性，一般项系数变为

$$\begin{cases}Z_{1,n,2m}=\dfrac{(-1)^m}{2^{2m}m!\,\Gamma(-n\sqrt{K_{22}-K_{12}^2}+m+1)}\\[2ex]Z_{2,n,2m}=\dfrac{(-1)^m}{2^{2m}m!\,\Gamma(n\sqrt{K_{22}-K_{12}^2}+m+1)}\end{cases} \tag{5-74}$$

根据第一类贝塞尔函数定义，结合式（5-74）可得

$$Z_{ip_{l,n}}(x)=x^{ia_{l,n}}J_{-b_{l,n}}(x) \tag{5-75}$$

其中 $J_{-b_{l,n}}(x)$ 为 $-b_{l,n}$ 阶第一类贝塞尔函数。

式（5－75）建立了复数柱多项式和贝塞尔多项式关系。对于各向同性热传导、正交异性热传导问题，$K_{12}=0$，$a_{l,n}=0$，$Z_{ip_{l,n}}(x)=J_{-b_{l,n}}(x)$，即在各向同性热传导、正交异性热传导问题中，复数柱多项式和贝塞尔函数一致的。这样从物理意义上，复数柱函数与各向异性物理问题对应，贝塞尔函数与各向异性物理问题对应，物理与数学就这样紧密联系起来。

在本书下面部分，复数柱多项式 $Z_{ip_{l,n}}(x)$ 都在式（5－74）基础上采用式（5－75）定义。

根据复变函数理论，可得

$$\begin{cases} x^{ia_{l,n}}=e^{ia_{l,n}\ln(x)}=\cos(a_{l,n}\ln x)+i\sin(a_{l,n}\ln x) \\ (x^{ia_{l,n}})^{*}=\cos(a_{l,n}\ln x)-i\sin(a_{l,n}\ln x)=e^{-ia_{l,n}\ln(x)}=x^{-ia_{l,n}} \end{cases} \tag{5-76}$$

其中 $(x^{ia_{l,n}})^{*}$ 为 $x^{ia_{l,n}}$ 的共轭函数。

$$\begin{cases} Z_{ip_{l,n}}(x)e^{in\theta}=x^{ia_{l,n}}e^{in\theta}J_{-b_{l,n}}(x)=e^{i(n\theta+a_{l,n}\ln x)}J_{-b_{l,n}}(x) \\ Z_{ip_{l,n}}(x)e^{in\theta}=J_{-b_{l,n}}(x)[\cos(n\theta+a_{l,n}\ln x)+i\sin(n\theta+a_{l,n}\ln x)] \end{cases} \tag{5-77}$$

由式（5－75），可得

$$Z_{ip_{l,n}}(-x)=(-x)^{ia_{l,n}}J_{-b_{l,n}}(-x) \tag{5-78}$$

综合式（5－75）和（5－76），可得 $Z_{ip_{l,n}}(x)=J_{-b_{l,n}}(x)[\cos(a_{l,n}\ln x)+i\sin(a_{l,n}\ln x)]$

从上式可看出，贝塞尔函数 $J_{-b_{l,n}}(x)$ 类似复数柱多项式函数的广义振幅，$a_{l,n}\ln x$ 类似复数柱多项式函数的广义幅角。当广义幅角为 0 时，复数柱多项式和贝塞尔函数一致。

应用式（5－75），可以将式（5－39）（5－42b）和（5－46）等上述计算公式进行变换。

5.4.3　$Z_{ip}(x)$ 多项式的微分公式、递推关系式和积分公式

如同不同阶的贝塞尔函数之间有一定联系，不同阶的复数柱多项式也存在这种联系的微分公式和递推公式。

（1）$Z_{ip}(x)$ 多项式的微分公式

$Z_{ip}(x)$ 多项式有如下微分公式

$$\frac{d}{dx}[(x^{ip})^{*}Z_{ip}(x)]=(x^{ip})^{*}Z_{ip-1}(x) \tag{5-79}$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-ip}Z_{ip}(x)]=-x^{-ip}Z_{ip+1}(x) \tag{5-80}$$

$$\left(\frac{d}{xdx}\right)^{k}[(x^{ip})^{*}Z_{ip}(x)]=(x^{ip})^{*}x^{-k}Z_{ip-k}(x) \tag{5-81}$$

$$\left(\frac{d}{xdx}\right)^{k}\left[\frac{Z_{ip}(x)}{x^{ip}}\right]=(-1)^{k}\frac{Z_{ip+k}(x)}{x^{ip+k}} \tag{5-82}$$

证明：

由 $Z_{ip}(x)$ 的表达式（5－75）和第一类贝塞尔函数表达式可以推出两个基本递推公式（5－79）（5－80）。

根据 $Z_{ip}(x)=x^{ia}J_{-b}(x)$ 和第一类贝塞尔函数定义 $J_{p}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{k}}{k!\Gamma(k+p+1)}\times\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}\right]$，$p=a+ib$，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^{\mathrm{i}p})^* Z_{ip}(x)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^{\mathrm{i}(a+\mathrm{i}b)})^* x^{\mathrm{i}a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-b+1)}(\frac{x}{2})^{2k-b}]$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-b+1)}(\frac{x}{2})^{2k-2b}]$$

$$= (2k-2b)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!2^{2k-b}\Gamma(k-b+1)}(x)^{2k-2b-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!2^{2k-b-1}\Gamma(k-b)}x^{2k-2b-1}$$

$$= x^{-b}J_{-b-1}(x)$$

因为 $Z_{ip-1}(x) = x^{\mathrm{i}a}J_{-b-1}(x)$，这样可得

$$\frac{\mathrm{d}}{dx}[(x^{\mathrm{i}p})^* Z_{ip}(x)] = (x^{\mathrm{i}p})^* Z_{ip-1}(x)$$

式（5－79）得证。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\frac{1}{x^{\mathrm{i}p}}Z_{ip}(x)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\frac{1}{x^{\mathrm{i}p}}x^{\mathrm{i}a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-b+1)}(\frac{x}{2})^{2k-b}]$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k-b}k!\Gamma(k-b+1)}x^{2k}]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 2k}{2^{2k-b}k!\Gamma(k-b+1)}x^{2k-1}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{2(m+1)(-1)^{m+1}}{(m+1)!2^{2(m+1)-b}\Gamma(m-b+1+1)}x^{2m+1}$$

$$=- \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{2^{2j+1-b}j!\Gamma(j-b+1+1)}x^{2j+1}$$

$$=- x^{\mathrm{i}a}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{2^{2j+1-b}j!\Gamma(j-b+2)}x^{2j+1-b}\frac{1}{x^{\mathrm{i}a-b}}$$

$$=- x^{-\mathrm{i}p}Z_{ip+1}(x)$$

这样式（5－80）得证。证明完毕。式（5－81）和（5－82）推导需要用到后面的 $Z_{ip}(x)$ 多项式递推关系式，证明放在后面，下面先研究递推公式。

（2）$Z_{ip}(x)$ 多项式递推关系式

$$x\frac{\mathrm{d}Z_{ip}(x)}{\mathrm{d}x} + (\mathrm{i}p)^* Z_{ip}(x) = xZ_{ip-1}(x) \tag{5-83}$$

$$x\frac{\mathrm{d}Z_{ip}(x)}{\mathrm{d}x} - \mathrm{i}pZ_{ip}(x) =- xZ_{ip+1}(x) \tag{5-84}$$

$$Z_{ip-1}(x) + Z_{ip+1}(x) =- \frac{2b}{x}Z_{ip}(x) \tag{5-85}$$

$$\frac{2\mathrm{i}a}{x}Z_{ip}(x) + Z_{ip-1}(x) - Z_{ip+1}(x) = 2\frac{\mathrm{d}Z_{ip}(x)}{\mathrm{d}x} \tag{5-86}$$

证明：

将 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^{ip})^* Z_{ip}(x)] = (x^{ip})^* Z_{ip-1}(x)$ 的左端的导数求出，化简后可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^{ip})^* Z_{ip}(x)] = (x^{ip})^* \frac{\mathrm{d}Z_{ip}(x)}{\mathrm{d}x} + Z_{ip}(x)\frac{\mathrm{d}(x^{ip})^*}{\mathrm{d}x} = (x^{ip})^* Z_{ip-1}(x)$$

$$x\frac{\mathrm{d}Z_{ip}(x)}{\mathrm{d}x} + Z_{ip}(x)\frac{x}{(x^{ip})^*}\frac{\mathrm{d}(x^{ip})^*}{\mathrm{d}x} = xZ_{ip-1}(x)$$

考虑到 $\frac{x}{(x^{ip})^*}\frac{\mathrm{d}(x^{ip})^*}{\mathrm{d}x} = \frac{x(-b-\mathrm{i}a)}{x} = (-b-\mathrm{i}a)$

这样可得递推公式（5-83）

$$x\frac{\mathrm{d}Z_{ip}(x)}{\mathrm{d}x} + Z_{ip}(x)(-b-\mathrm{i}a) = xZ_{ip-1}(x)$$

根据 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-ip}Z_{ip}(x)] = -x^{-ip}Z_{ip+1}(x)$，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-ip}Z_{ip}(x)] = x^{-ip}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[Z_{ip}(x)] + Z_{ip}(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-ip}) = -x^{-ip}Z_{ip+1}(x)$$

这样可得

$$x\frac{\mathrm{d}Z_{ip}(x)}{\mathrm{d}x} + xZ_{ip}(x)\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-ip})}{x^{ip}} = -xZ_{ip+1}(x)$$

考虑到 $x\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-ip})}{x^{ip}} = -\mathrm{i}p$，代入上式可得递推公式（5-84）

$$x\frac{\mathrm{d}Z_{ip}(x)}{\mathrm{d}x} - \mathrm{i}pZ_{ip}(x) = -xZ_{ip+1}(x)$$

将式（5-83）减去式（5-84）可得递推公式（5-85）

$$Z_{ip-1}(x) + Z_{ip+1}(x) = -\frac{2b}{x}Z_{ip}(x)$$

显然根据式（5-85），如果已知 $Z_{ip-1}(x)$ 和 $Z_{ip}(x)$，即可计算出 $Z_{ip+1}(x)$。

将式（5-83）加上式（5-84）可得递推公式（5-86）

$$\frac{2\mathrm{i}a}{x}Z_{ip}(x) + Z_{ip-1}(x) - Z_{ip+1}(x) = 2\frac{\mathrm{d}Z_{ip}(x)}{\mathrm{d}x}$$

根据式（5-86），如果已知 $Z_{ip-1}(x)$，$Z_{ip}(x)$，$Z_{ip+1}(x)$ 即可计算出导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[Z_{ip}(x)]$。

式（5-83）（5-84）（5-85）和（5-86）为复数柱多项式 $Z_{ip}(x)$ 的递推公式。

下面再证明式（5-81）和（5-82）。将式（5-81）改写为

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^{ip})^* Z_{ip}(x)] = (x^{ip})^*\frac{Z_{ip-1}(x)}{x}$$

考虑到

$$\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2[(x^{ip})^* Z_{ip}(x)] = \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^{ip})^* Z_{ip}(x)]\right\}$$

$$= \frac{1}{x^2}\left\{-\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^{ip})^* Z_{ip}(x)] + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}[(x^{ip})^* Z_{ip}(x)]\right\}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}[(x^{ip})^* Z_{ip}(x)] = \frac{d}{dx}\{\frac{d}{dx}[(x^{ip})^* Z_{ip}(x)]\} = \frac{d}{dx}[(x^{ip})^* Z_{ip-1}(x)]$$

根据式（5－79），可得

$$\frac{d^2}{dx^2}[(x^{ip})^* Z_{ip}(x)] = \frac{d}{dx}[(x^{ip})^* Z_{ip-1}(x)] = (-\mathrm{i}a-b)x^{-\mathrm{i}a-b-1}Z_{ip-1}(x) + x^{-\mathrm{i}a-b}\frac{d}{dx}Z_{ip-1}(x)$$

$$(\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^2[(x^{ip})^* Z_{ip}(x)] = \frac{1}{x^2}\{-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}[(x^{ip})^* Z_{ip}(x)] + \frac{d^2}{dx^2}[(x^{ip})^* Z_{ip}(x)]$$

$$= x^{-\mathrm{i}a-b-2}[\frac{(-\mathrm{i}a-b-1)}{x}Z_{ip-1}(x) + \frac{d}{dx}Z_{ip-1}(x)]$$

根据递推公式（5－83），上式右式

$$\frac{(-\mathrm{i}a-b-1)}{x}Z_{ip-1}(x) + \frac{d}{dx}Z_{ip-1}(x) = Z_{ip-2}(x)$$

这样可得

$$(\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^2[(x^{ip})^* Z_{ip}(x)] = x^{-\mathrm{i}a-b-2}Z_{ip-2}(x)$$

重复以上步骤，类似可得

$$(\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^k[(x^{ip})^* Z_{ip}(x)] = x^{-\mathrm{i}a-b-k}Z_{ip-k}(x)$$

式（5－81）得证。下面证明式（5－82），将式（5－80）改写为

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}[x^{-ip}Z_{ip}(x)] = -x^{-ip}\frac{1}{x}Z_{ip+1}(x)$$

$$(\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^2[x^{-ip}Z_{ip}(x)] = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\{\frac{1}{x}\frac{d}{dx}[x^{-ip}Z_{ip}(x)]\} = \frac{1}{x^2}\{-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}[x^{-ip}Z_{ip}(x)] + \frac{d^2}{dx^2}[x^{-ip}Z_{ip}(x)]$$

根据式（5－80），可得

$$\frac{d^2}{dx^2}[x^{-ip}Z_{ip}(x)] = \frac{d}{dx}[-x^{-ip}Z_{ip+1}(x)] = (\mathrm{i}a-b)x^{-(\mathrm{i}a-b)-1}Z_{ip+1}(x) - x^{-(\mathrm{i}a-b)}\frac{d}{dx}Z_{ip+1}(x)$$

$$(\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^2[x^{-ip}Z_{ip}(x)] = \frac{1}{x^2}[-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(x^{-ip}Z_{ip}(x)) + \frac{d^2}{dx^2}(x^{-ip}Z_{ip}(x))]$$

$$= \frac{1}{x^{ia-b+2}}[\frac{(\mathrm{i}a-b-1)}{x}Z_{ip+1}(x) - \frac{d}{dx}Z_{ip+1}(x)]$$

根据递推公式（5－84），可得

$$\frac{1}{x^{ia-b+2}}[\frac{(\mathrm{i}a-b-1)}{x}Z_{ip+1}(x) - \frac{d}{dx}Z_{ip+1}(x)] = \frac{1}{x^{ia-b+2}}Z_{ip+2}(x)$$

这样可得

$$(\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^2[x^{-ip}Z_{ip}(x)] = \frac{1}{x^{ia-b+2}}Z_{ip+2}(x)$$

再考虑 $(\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^3[x^{-ip}Z_{ip}(x)]$ 的情况，

$$(\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^3[x^{-ip}Z_{ip}(x)] = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}[\frac{1}{x^{ia-b+2}}Z_{ip+2}(x)]$$

将上式右式展开可得

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{x^{\mathrm{i}a-b+2}}Z_{ip+2}(x)\right]=\frac{1}{x^{\mathrm{i}a-b+3}}\left[-\frac{(\mathrm{i}a-b+2)}{x}Z_{ip+2}(x)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Z_{ip+2}(x)\right]$$

根据递推公式（5-84），可得

$$\frac{1}{x^{\mathrm{i}a-b+3}}\left[-\frac{(\mathrm{i}a-b+2)}{x}Z_{ip+2}(x)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Z_{ip+2}(x)\right]=-\frac{1}{x^{\mathrm{i}a-b+3}}Z_{ip+3}(x)$$

这样可得

$$\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{3}\left[x^{-\mathrm{i}p}Z_{ip}(x)\right]=-\frac{1}{x^{\mathrm{i}a-b+3}}Z_{ip+3}(x)$$

重复以上步骤，类似可得

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^{k}\left[\frac{Z_{ip}(x)}{x^{\mathrm{i}p}}\right]=(-1)^{k}\frac{Z_{ip+k}(x)}{x^{\mathrm{i}p+k}}$$

式（5-82）得证。

可以容易证明贝塞尔函数的微分公式和递推公式是复数柱函数 $Z_{ip}(x)$ 微分公式和递推公式的特殊情况。

（3）有关 $Z_{ip}(x)$ 的积分公式

有关 $Z_{ip}(x)$ 多项式不定积分公式

$$\int x\,(x^{\mathrm{i}p})^{*}Z_{ip}(x)\mathrm{d}x=(x^{\mathrm{i}p+1})^{*}Z_{ip+1}(x)+c \tag{5-87}$$

$$\int\frac{Z_{ip}(x)}{x^{\mathrm{i}p-1}}\mathrm{d}x=-x^{-\mathrm{i}p+1}Z_{ip-1}(x)+c \tag{5-88}$$

证明：

由式（5-79），令 $\mathrm{i}p\rightarrow\mathrm{i}p+1$，可得式（5-87）；由（5-80），令 $\mathrm{i}p\rightarrow\mathrm{i}p-1$，可得式（5-88）。

有关 $Z_{ip}(x)$ 多项式定积分公式

$$\int_0^t x\,(x^{\mathrm{i}p})^{*}Z_{ip}(x)\mathrm{d}x=(t^{\mathrm{i}p+1})^{*}Z_{ip+1}(t) \tag{5-89}$$

$$\int_0^t\frac{Z_{ip}(x)}{x^{\mathrm{i}p-1}}\mathrm{d}x=-t^{-\mathrm{i}p+1}Z_{ip-1}(t) \tag{5-90}$$

$$\int_0^t Z_{ip}(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{p+1}\sum_{k=0}^{\infty}(-b+2k+1)\frac{[(p+1)/2]_k}{[(p^{*}+3)/3]_k}Z_{ip+2k+1}(t) \tag{5-91}$$

式中使用了 Pochhammer 记号 $(\alpha)_k,(\alpha)_0=1,(\alpha)_k=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k-1)$

$$\int_0^t x^{s}Z_{ip}(x)\mathrm{d}x=\frac{2t^{s}}{p+s+1}\sum_{k=0}^{\infty}(-b+2k+1)\frac{[(p-s+1)/2]_k}{[(p^{*}+s+3)/3]_k}Z_{ip+2k+1}(t) \tag{5-92}$$

证明：

由式（5-87）可得式（5-89）。由式（5-88）可得式（5-90）。

$$\begin{aligned}\int_0^t Z_{ip}(x)\mathrm{d}x&=\frac{2t^{\mathrm{i}a}}{p+1}\sum_{k=0}^{\infty}(-b+2k+1)\frac{[(p+1)/2]_k}{[(p^{*}+3)/3]_k}J_{-b+2k+1}(t)\\&=\frac{2}{p+1}\sum_{k=0}^{\infty}(-b+2k+1)\frac{[(p+1)/2]_k}{[(p^{*}+3)/3]_k}Z_{\mathrm{i}a-b+2k+1}(t)\\&=\frac{2}{p+1}\sum_{k=0}^{\infty}(-b+2k+1)\frac{[(p+1)/2]_k}{[(p^{*}+3)/3]_k}Z_{ip+2k+1}(t)\end{aligned}$$

式（5-91）得证。

$$\int_0^t x^s Z_{ip}(x)\mathrm{d}x = \frac{2t^s t^{ia}}{p+s+1}\sum_{k=0}^{\infty}(-b+2k+1)\frac{[(p-s+1)/2]_k}{[(p^*+s+3)/3]_k}J_{-b+2k+1}(t)$$

$$= \frac{2t^s}{p+s+1}\sum_{k=0}^{\infty}(-b+2k+1)\frac{[(p-s+1)/2]_k}{[(p^*+s+3)/3]_k}Z_{ia-b+2k+1}(t)$$

$$= \frac{2t^s}{p+s+1}\sum_{k=0}^{\infty}(-b+2k+1)\frac{[(p-s+1)/2]_k}{[(p^*+s+3)/3]_k}Z_{ip+2k+1}(t)$$

式（5-92）得证。

有关 $Z_{ip}(x)$ 多项式的无穷积分公式

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x} Z_{ip}(x)\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(p+1)}{\alpha^{p+1}\Gamma(-b+1)}F(\frac{p+1}{2},\frac{p}{2}+1,-b+1,-\frac{1}{\alpha^2}) \tag{5-93}$$

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} x^s Z_{ip}(x)\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(p+1+s)}{\alpha^{p+1+s}\Gamma(-b+1)}F(\frac{p+s+1}{2},\frac{p+s}{2}+1,-b+1,-\frac{1}{\alpha^2})$$

根据汉克尔积分 $\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}J_{\nu}(bt)t^{\mu-1}\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(\mu+\nu)}{\alpha^{\mu+\nu}\Gamma(\nu+1)}(\frac{b}{2})^{\nu}F(\frac{\mu+\nu}{2},\frac{\mu+\nu+1}{2},\nu+1,-\frac{b^2}{a^2})$，可以得到式（5-93）和式（5-94）得证。

5.5　第二类复数柱多项式定义及其递推公式

对于各向异性问题，在特征根 $p_{l,n}=a_{l,n}+\mathrm{i}b_{l,n}$ 中实部 $a_{l,n}$ 不为 0、虚部 $b_{l,n}$ 是整数情况下，这时第一类复数柱函数 $Z_{ip_{1,n}}(x)$ 与 $Z_{ip_{2,n}}(x)$ 线性相关，这样根据第二类贝塞尔函数的思想，需要定义第二类复数柱函数 $Y_{ip}(x)$

考虑式（5-14）

$$\begin{cases} p_{l,n} = a_{l,n}+\mathrm{i}b_{l,n} \\ a_{1,n} = -nK_{12} \\ b_{1,n} = n\sqrt{(K_{22}-K_{12}{}^2)} \\ a_{2,n} = -nK_{12} \\ b_{2,n} = -n\sqrt{(K_{22}-K_{12}{}^2)} \end{cases} \tag{5-94}$$

基于以上式（5-94）特征根分布情况，定义

$$Y_{ip}(x) = \frac{Z_{ip_{2,n}}(x)\cos(-b_{2,n}\pi) - Z_{ip_{1,n}}(x)}{\sin(-b_{2,n}\pi)} \tag{5-95}$$

当虚部 $b_{2,n}$ 是整数情况下

$$Y_{ip}(x) = \lim_{-b_{2,n}\to k}\frac{Z_{ip_{2,n}}(x)\cos b_{2,n}\pi - Z_{ip_{1,n}}(x)}{\sin(-b_{2,n}\pi)} \tag{5-96}$$

根据式（5-75）可得，

$$Y_{ip}(x) = x^{\mathrm{i}a_{2,n}}\frac{J_{-b_{2,n}}(x)\cos b_{2,n}\pi - J_{-b_{1,n}}(x)}{\sin(-b_{2,n}\pi)} \tag{5-97}$$

$$Y_{ip_n}(x) = x^{\mathrm{i}a_{2,n}} Y_{-b_{2,n}}(x) \tag{5-98}$$

其中 $Y_{-b_{2,n}}(x)$ 为 $-b_{2,n}$ 阶第二类贝塞尔函数。

为简化起见，可记 $$\mathrm{i}p_n = \mathrm{i}p, \mathrm{i}p = \mathrm{i}a - b \tag{5-99a}$$

其中 $$a = -nK_{12}, b = -n\sqrt{(K_{22} - K_{12}{}^2)}, a_{2,n} = a, b_{2,n} = b \tag{5-99b}$$

这样可得

$$Z_{ip_{2,n}}(x) = Z_{\mathrm{i}a-b}(x), Z_{ip_{1,n}}(x) = Z_{\mathrm{i}a+b}(x) \tag{5-99c}$$

式（5-95）可简写为

$$Y_{ip}(x) = \frac{Z_{\mathrm{i}a-b}(x) - Z_{\mathrm{i}a+b}(x)\cos(b\pi)}{\sin(b\pi)} \tag{5-100}$$

当虚部 $-b_{2,n}$ 是整数 k 情况下，（5-96）可简写为

$$Y_{ip}(x) = \lim_{-b\to k} \frac{Z_{\mathrm{i}a-b}(x) - Z_{\mathrm{i}a+b}(x)\cos(b\pi)}{\sin(b\pi)} \tag{5-101}$$

式（5-98）改写为

$$Y_{ip}(x) = x^{\mathrm{i}a} Y_{-b}(x) \tag{5-102}$$

上式 $Y_{-b}(x)$ 为 $-b$ 阶第二类贝塞尔函数。

采用式（5-99*a*）和（5-99*b*），式（5-100）也可写为

$$Y_{\mathrm{i}a-b}(x) = x^{\mathrm{i}a} Y_{-b}(x) \tag{5-103}$$

显然，第二类贝塞尔函数是第二类复数柱多项式的特殊情况。

综合式（5-76）和（5-103），可得

$$Y_{ip}(x) = Y_{-b}(x)[\cos(a\ln x) + \mathrm{i}\sin(a\ln x)] \tag{5-104}$$

从上式可看出，第二类贝塞尔函数 $Y_{-b}(x)$ 也类似第二类复数柱多项式 $Y_{ip}(x)$ 的广义振幅，$a\ln(x)$ 类似第二类复数柱多项式 $Y_{ip}(x)$ 的广义幅角。当广义幅角为 0 时，第二类复数柱多项式 $Y_{ip}(x)$ 和第二类贝塞尔函数 $Y_{-b}(x)$ 一致。

根据第二类复数柱多项式定义（5-100），$Y_{ip}(x)$ 为第一类复数柱多项式 $Z_{\mathrm{i}a-b}(x)$、$Z_{\mathrm{i}a+b}(x)$ 的线性组合，（5-100）中没有与 x 相关常数，这样第一类复数柱多项式的微分公式（5-79）～（5-82）和递推公式（5-83）～（5-86）也适用于第二类复数柱多项式 $Y_{ip}(x)$，即以下等式成立

第二类复数柱多项式的微分公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^{\mathrm{i}p})^* Y_{ip}(x)] = (x^{\mathrm{i}p})^* Y_{ip-1}(x) \tag{5-105}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-\mathrm{i}p} Y_{ip}(x)] = -x^{-\mathrm{i}p} Y_{ip+1}(x) \tag{5-106}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^k [(x^{\mathrm{i}p})^* Y_{ip}(x)] = (x^{\mathrm{i}p})^* x^{-k} Y_{ip-k}(x) \tag{5-107}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^k \left[\frac{Y_{ip}(x)}{x^{\mathrm{i}p}}\right] = (-1)^k \frac{Y_{ip+k}(x)}{x^{\mathrm{i}p+k}} \tag{5-108}$$

第二类复数柱多项式的递推公式

$$x\frac{\mathrm{d}Y_{ip}(x)}{\mathrm{d}x} + (\mathrm{i}p)^* Y_{ip}(x) = xY_{ip-1}(x) \tag{5-109}$$

$$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[Y_{ip}(x)]-\mathrm{i}pY_{ip}(x)=-xY_{ip+1}(x) \tag{5-110}$$

$$Y_{ip-1}(x)+Y_{ip+1}(x)=-\frac{2b}{x}Y_{ip}(x) \tag{5-111}$$

$$\frac{2\mathrm{i}a}{x}Y_{ip}(x)+Y_{ip-1}(x)-Y_{ip+1}(x)=2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[Y_{ip}(x)] \tag{5-112}$$

可以容易证明第二类贝塞尔函数的微分公式、递推公式是第二类复数柱多项式 $Y_{ip_n}(x)$ 微分公式、递推公式的特殊情况。

Z_{ip} 方程（5-10）的解也可写为

$$f_n(x)=A_{1,n,0}Z_{ip}(x)+A_{2,n,0}Y_{ip}(x) \tag{5-113}$$

式中 $A_{1,n,0}$ 、$A_{2,n,0}$ 为复数常数。类似地，由于 $Y_{ip}(x)$ 为复数函数，$e^{in\theta}$ 也是复数函数，在许多情况下 $Y_{ip}(x)$ 和 $e^{in\theta}$ 是互相耦合，由此下面给出一个新的复数函数一第二类复数柱函数 $Y_{ip}(x,\theta)$

$$Y_{ip}(x,\theta)=Y_{ip}(x)e^{in\theta}$$

由式（5-103），可得 $Y_{ip}(x,\theta)=x^{ia}e^{in\theta}Y_{-b}(x)$

无疑，对于某些各向异性问题，在特征根 $p_{l,n}=a_{l,n}+\mathrm{i}b_{l,n}$ 中实部 $a_{l,n}$ 不为 0、虚部 $b_{l,n}$ 是整数情况下，第二类复数柱函数就需要计算。

5.6　第三类复数柱多项式定义及其递推公式

采用以下定义

$\mathrm{i}p_n=\mathrm{i}p,\mathrm{i}p=-b+\mathrm{i}a$, $a=-nK_{12},b=-n\sqrt{(K_{22}-K_{12}{}^2)},a_{2,n}=a,b_{2,n}=b$

第三类复数柱多项式函数定义是

$$\begin{cases}H_{ip}^{(1)}(x)=Z_{ip}(x)+\mathrm{i}Y_{ip}(x)\\H_{ip}^{(2)}(x)=Z_{ip}(x)-\mathrm{i}Y_{ip}(x)\end{cases} \tag{5-114}$$

式中 $Z_{ip}(x),Y_{ip}(x)$ 分别为第一类、第二类复数柱函数。

根据式（5-75）和（5-103），可得

$$H_{ip}^{(1)}(x)=x^{ia}[J_{-b}(x)+\mathrm{i}Y_{-b}(x)] \tag{5-115}$$

$$H_{ip}^{(2)}(x)=x^{ia}[J_{-b}(x)-\mathrm{i}Y_{-b}(x)] \tag{5-116}$$

$H_{ip}^{(1)}(x)$，$H_{ip}^{(2)}(x)$ 分别可称为第一种和第二种第三类复数柱多项式函数。

显然，第三类贝塞尔函数是第三类复数柱多项式函数的特殊情况。综合式（5-76）（5-115）和（5-116），可得

$$\begin{cases}H_{ip}^{(1)}(x)=\mathrm{H}_{p}^{(1)}(x)[\cos(a\ln x)+\mathrm{i}\sin(a\ln x)]\\H_{ip}^{(2)}(x)=\mathrm{H}_{p}^{(2)}(x)[\cos(a\ln x)+\mathrm{i}\sin(a\ln x)]\end{cases} \tag{5-117}$$

式中 $H_p^{(1)}(x)=J_{-b}(x)+\mathrm{i}Y_{-b}(x)$，$H_p^{(2)}(x)=J_{-b}(x)-\mathrm{i}Y_{-b}(x)$ 分别为第一种、第二种第三类贝塞尔函数。

从上式可看出，第三类贝塞尔函数也类似第三类复数柱多项式的广义振幅，$a\ln x$ 类似

第三类复数柱多项式函数的广义幅角。当广义幅角为 0 时，第三类复数柱多项式和第三类贝塞尔函数一致。

根据第三类复数柱多项式定义（5-114），第三类复数柱多项式为第一类、第二复数柱多项式函数的线性组合，式（5-114）中没有与 x 相关常数，这样第一类复数柱多项式的微分公式和递推公式也适用于第三类复数柱多项式，即以下等式成立：

第三类复数柱多项式的微分公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^{\mathrm{i}p})^{*} H_{ip}^{(k)}(x)] = (x^{\mathrm{i}p})^{*} H_{ip-1}^{(k)}(x) \tag{5-118}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-\mathrm{i}p} H_{ip}^{(k)}(x)] = -x^{-\mathrm{i}p} H_{ip+1}^{(k)}(x) \tag{5-119}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^{k}[(x^{\mathrm{i}p})^{*} H_{ip}^{(k)}(x)] = (x^{\mathrm{i}p})^{*} x^{-k} H_{ip-k}^{(k)}(x) \tag{5-120}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^{k}\left[\frac{H_{ip}^{(k)}(x)}{x^{\mathrm{i}p}}\right] = (-1)^{k} \frac{H_{ip+k}^{(k)}(x)}{x^{\mathrm{i}p+k}} \tag{5-121}$$

第三类复数柱多项式的递推公式

$$x\frac{\mathrm{d}H_{ip}^{(k)}(x)}{\mathrm{d}x} + (\mathrm{i}p)^{*} H_{ip}^{(k)}(x) = xH_{ip-1}^{(k)}(x) \tag{5-122}$$

$$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[H_{ip}^{(k)}(x)] - \mathrm{i}pH_{ip}^{(k)}(x) = -xH_{ip+1}^{(k)}(x) \tag{5-123}$$

$$H_{ip-1}^{(k)}(x) + H_{ip+1}^{(k)}(x) = -\frac{2b}{x} H_{ip}^{(k)}(x) \tag{5-124}$$

$$\frac{2\mathrm{i}a}{x} H_{ip}^{(k)}(x) + H_{ip-1}^{(k)}(x) - H_{ip+1}^{(k)}(x) = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[H_{ip}^{(k)}(x)] \tag{5-125}$$

可以容易证明第三类贝塞尔函数的微分公式、递推公式是第三类复数柱多项式微分公式、递推公式的特殊情况。

5.7 复数柱多项式函数渐近展开

复数柱函数可以看作是经典贝塞尔函数与复数幂函数的乘积，这样利用贝塞尔函数的渐近公式获得复数柱多项式函数 $Z_{ip}(x)$ 的实部 $\mathrm{Re}[Z_{ip}(x)]$、虚部 $\mathrm{Im}[Z_{ip}(x)]$ 渐近展开式 $p_{l,n} = a_{l,n} + \mathrm{i}b_{l,n}$ 固定，在 $|x| \to \infty$的情况下，可得

$$\mathrm{Re}[Z_{ip_{l,n}}(x)] \approx \cos[a_{l,n}\ln(x)]\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Big[\cos\left(x + \frac{b_{l,n}}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m}(-b_{l,n},m)}{(2x)^{2m}}$$

$$-\sin\left(x + \frac{b_{l,n}}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m}(-b_{l,n},2m+1)}{(2x)^{2m+1}}\Big]$$

$$\mathrm{Im}[Z_{ip_{l,n}}(x)] \approx \sin[a_{l,n}\ln(x)]\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Big[\cos\left(x + \frac{b_{l,n}}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m}(-b_{l,n},m)}{(2x)^{2m}}$$

$$-\sin\left(x + \frac{b_{l,n}}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m}(-b_{l,n},2m+1)}{(2x)^{2m+1}}\Big]$$

同样可得第二类复数柱多项式函数 $Y_{ip_{l,n}}(x)$ 的实部 $\mathrm{Re}[Y_{ip_{l,n}}(x)]$、虚部 $\mathrm{Im}[Y_{ip_{l,n}}(x)]$ 渐近展开式 $p_{l,n}=a_{l,n}+\mathrm{i}b_{l,n}$ 固定，在 $|x|\to\infty$的情况下，可得

$$\mathrm{Re}[Y_{ip_{l,n}}(x)]\approx\cos[a_{l,n}\ln(x)]\sqrt{\frac{2}{\pi x}}[\sin(x+\frac{b_{l,n}}{2}-\frac{\pi}{4})\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(-b_{l,n},2m)}{(2x)^{2m}}$$

$$+\cos(x+\frac{b_{l,n}}{2}-\frac{\pi}{4})\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(-b_{l,n},2m+1)}{(2x)^{2m+1}}]$$

$$\mathrm{Im}[Y_{ip_{l,n}}(x)]\approx\sin[a_{l,n}\ln(x)]\sqrt{\frac{2}{\pi x}}[\sin(x+\frac{b_{l,n}}{2}-\frac{\pi}{4})\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(-b_{l,n},2m)}{(2x)^{2m}}$$

$$+\cos(x+\frac{b_{l,n}}{2}-\frac{\pi}{4})\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(-b_{l,n},2m+1)}{(2x)^{2m+1}}]$$

上式符号 (ν,p) 意义如下：$(\nu,0)=1$，$(\nu,p)=\dfrac{\Gamma(0.5+\nu+p)}{p!\Gamma(0.5+\nu-p)}$ $(p=1, 2, \cdots)$。

5.8　其他边界条件下的圆域非稳态热传导问题求解

5.8.1　给定第二类边界条件的实心圆域非稳态热传导解

对于侧面具有第二类边界条件（绝热边界条件）的实心圆热传导问题，可得边界条件：

$$q_r|_{r=R}=-(k_{11}\frac{\partial T}{\partial r}+k_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial\theta})|_{r=R}=0 \tag{5-126}$$

和自然条件 $T(0,\theta,t)$ 为有限值。

式（5-126）圆心温度值有限性可以用来消减式（5-24）一半的待定系数，$b_{1,n}>0$，$l=1$ 的对应项 $A_{1,n}$ 可以消减，而对应于 $l=2$ 的待定系数 $A_{2,n}$ 由于$b_{2,n}<0$需要确定。为简化起见，引入如下标记，

$$a=-nK_{12},b=-n\sqrt{(K_{22}-K_{12}^{\ 2})},a_{2,n}=a,b_{2,n}=b,\ \mathrm{i}p_n=\mathrm{i}p,\mathrm{i}p=\mathrm{i}a-b,$$

式（5-126）边界条件简化为

$$r=R,-[k_{11}\frac{\partial u(x,\theta)}{\partial r}+k_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial u(x,\theta)}{\partial\theta}]|_{r=R}=0 \tag{5-127}$$

引入参数变换

$$K_{11}=1,K_{12}=\frac{k_{12}}{k_{11}},K_{22}=\frac{k_{22}}{k_{11}},x=r\sqrt{\lambda}$$

对式（5-127）进行参数变换，可得

$$x=R\sqrt{\lambda},-[x\frac{\partial u(x,\theta)}{\partial x}+K_{12}\frac{\partial u(x,\theta)}{\partial\theta}]|_{x=R\sqrt{\lambda}}=0$$

将 $u=(A_{l,n,0,r}+\mathrm{i}A_{l,n,0,i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}Z_{ip}(x)$ 代入上式，根据 $n\neq0$ 时 $A_{l,n,0}$ 非平凡解条件，可以得到特征方程。

$$[x\frac{\partial Z_{ip}(x)}{\partial x}+K_{12}\mathrm{i}nZ_{ip}(x)]|_{x=R\sqrt{\lambda}}=0 \tag{5-128}$$

求解式（5-128）可得零点 $\mu_{l,n,j}^{0}$ ，$j=1, 2, 3, \cdots$ 。

$$\mu_{l,n,j}^{0} = R\sqrt{\lambda_n^j}$$

根据特征值 λ_n^j 可以确定式（5-31）解形式，进而确定问题解。

5.8.2 侧面具有第三类边界条件的各向异性实心柱体热传导非稳态解

第三类边界条件（边界热对流条件）为

$$[-(k_{11}\frac{\partial T}{\partial r}+k_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta})+h_m T]|_{r=R}=0 \tag{5-129}$$

和自然条件中心 $T(0,\theta,t)$ 为有限值。h_m 为柱体与外界环境热对流系数。

圆心温度值有限性可以用来消减式（5-24）一半的待定系数，$b_{1,n}>0$ ，$l=1$ 的对应项 $A_{1,n}$ 可以消减，而对应于 $l=2$ 的待定系数 $A_{2,n}$ 由于 $b_{2,n}<0$ 需要确定。

式（5-129）边界条件简化为

$$r=R, -[k_{11}\frac{\partial u(x,\theta)}{\partial r}+k_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial u(x,\theta)}{\partial \theta}]+h_m u(x,\theta)=0 \tag{5-130}$$

引入参数变换

$$K_{11}=1, K_{12}=\frac{k_{12}}{k_{11}}, K_{22}=\frac{k_{22}}{k_{11}}, x=r\sqrt{\lambda} \tag{5-131}$$

对式（5-130）进行参数变换（5-131），可得

$$x=R\sqrt{\lambda}, -[x\frac{\partial u(x,\theta)}{\partial x}+K_{12}\frac{\partial u(x,\theta)}{\partial \theta}]+R\frac{h_m}{k_{11}}u(x,\theta)=0 \tag{5-132}$$

将 $u=(A_{l,n,0,r}+\mathrm{i}A_{l,n,0,i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}Z_{ip}(x)$ 代入式（5-132），根据 $n\neq 0$ 时 $A_{l,n,0}$ 非平凡解条件，可以得到特征方程

$$[x\frac{\mathrm{d}Z_{ip}(x)}{\mathrm{d}x}+K_{12}\mathrm{i}nZ_{ip}(x)-\frac{Rh_m}{k_{11}}Z_{ip}(x)]|_{r=R\sqrt{\lambda}}=0 \tag{5-133}$$

求解式（5-133）可得 $x\frac{\partial Z_{ip}(x)}{\partial x}+K_{12}\mathrm{i}nZ_{ip}(x)-\frac{Rh_m}{k_{11}}Z_{ip}(x)=0$ 的零点根 $\mu_{l,n,j}^{0}$ ，$j=1, 2, 3, \cdots$ 。

$$\mu_{l,n,j}^{0} = R\sqrt{\lambda_n^j}$$

根据特征值 λ_n^j 可以确定式（5-31）解形式，进而确定问题解。

5.9 圆环域非稳态热传导求解与复数柱环函数圆环域展开定理

5.9.1 侧面具有第一类边界条件的各向异性圆环域非稳态问题与复数柱环函数圆环域展开定理

对于侧面具有第一类边界条件的各向异性圆环域非稳态热传导问题边界条件为

$$\begin{cases} u(r_1,\theta)=0 \\ u(r_2,\theta)=0 \end{cases} \tag{5-134}$$

考虑变换 $x=r\sqrt{\lambda}$ ，式（5-134）可改写为

$$\begin{cases} u(x_1,\theta)=0 \\ u(x_2,\theta)=0 \end{cases} \tag{5-135}$$

其中 $x_1 = r_1\sqrt{\lambda}, x_2 = r_2\sqrt{\lambda}$ 。

根据 Z_{ip} 方程（5-10）的解（5-24）

$$u(x,\theta) = [A_{1,n}Z_{ip_{1,n}}(x) + A_{2,n}Z_{ip_{2,n}}(x)]e^{in\theta} \tag{5-136}$$

式中 $A_{1,n}$ 、$A_{2,n}$ 为复数常数。

将式（5-136）代入式（5-135），根据待定系数 $A_{1,n}$ 、$A_{2,n}$ 不全为 0 的条件，可得特征行列式

$$\begin{vmatrix} Z_{ip_{1,n}}(x_1) & Z_{ip_{2,n}}(x_1) \\ Z_{ip_{1,n}}(x_2) & Z_{ip_{2,n}}(x_2) \end{vmatrix} = 0 \tag{5-137}$$

求解式（5-137）可以确定特征值 $\lambda_n^{(j)}$ 。根据式（5-137）可得

$$A_{2,n} = -A_{1,n}\frac{Z_{ip_{1,n}}(r_1\sqrt{\lambda_n^{(j)}})}{Z_{ip_{2,n}}(r_1\sqrt{\lambda_n^{(j)}})} \tag{5-138}$$

特征函数

$$u_{n,j}(x,\theta) = A_{1,n,j}\left[Z_{ip_{1,n}}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}}) - \frac{Z_{ip_{1,n}}(r_1\sqrt{\lambda_n^{(j)}})}{Z_{ip_{2,n}}(r_1\sqrt{\lambda_n^{(j)}})}Z_{ip_{2,n}}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})\right]e^{in\theta} \tag{5-139}$$

$$T(r,\theta,t) = \sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(A_{1,n,0,j,r} + iA_{1,n,0,j,i})\left[Z_{ip_{1,n}}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}}) - \frac{Z_{ip_{1,n}}(r_1\sqrt{\lambda_n^{(j)}})}{Z_{ip_{2,n}}(r_1\sqrt{\lambda_n^{(j)}})}Z_{ip_{2,n}}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})\right]e^{in\theta}e^{-\lambda_n^{(j)}at} + T(r,t) \tag{5-140}$$

式中 $T(r,t)$ 为中心对称情况下的贝塞尔函数解

$$T(r,t) = \sum_{j=1}^{\infty}A_j\left[J_0(r\sqrt{\lambda_0^{(j)}}) - \frac{J_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}})}{Y_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}})}Y_0(r\sqrt{\lambda_0^{(j)}})\right]e^{-\lambda_0^{(j)}at}$$

λ_j^0 为下式的根

$$\begin{vmatrix} J_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}}) & Y_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}}) \\ J_0(r_2\sqrt{\lambda_0^{(j)}}) & Y_0(r_2\sqrt{\lambda_0^{(j)}}) \end{vmatrix} = 0$$

将 $t=0$ 代入式（5-140），再代入式（5-3）初始条件可得

$$\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(A_{1,n,0,j,r} + iA_{1,n,0,j,i})\left[Z_{ip_{1,n}}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}}) - \frac{Z_{ip_{1,n}}(r_1\sqrt{\lambda_n^{(j)}})}{Z_{ip_{2,n}}(r_1\sqrt{\lambda_n^{(j)}})}Z_{ip_{2,n}}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})\right]e^{in\theta} + T(r,0) = \varphi(r,\theta) \tag{5-141}$$

求解式（5-141）可得 $A_{l,n,0,j,r}, A_{l,n,0,j,i}$ 。下文给出简略证明：如果 $\varphi(r,\theta)$ 是在圆环（$r_1 \leqslant r \leqslant r_2$，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$）内分片连续函数，且 $\varphi(r,\theta) = \varphi_1(r,\theta) + f(r)$ ，$\varphi(r,\theta)$ 能展开为以下双复数级数和贝塞尔级数之和

$$\varphi(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}B_{1,n,0,j}S_{ip_n}(x)\mathrm{e}^{in\theta}+\sum_{j=1}^{\infty}C_j[J_0(r\sqrt{\lambda_0^{(j)}})-\frac{J_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}})}{Y_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}})}Y_0(r\sqrt{\lambda_0^{(j)}})]$$

(5-142)

其中 $B_{l,n,0,j}$ 是复数常数，记为 $B_{1,n,0,j}=B_{1,n,0,j,r}+\mathrm{i}B_{1,n,0,j,i}$

$$\begin{cases}S_{ip_n}(x)=Z_{ip_{1,n}}(x)-\dfrac{Z_{ip_{1,n}}(r_1\sqrt{\lambda_n^{(j)}})}{Z_{ip_{2,n}}(r_1\sqrt{\lambda_n^{(j)}})}Z_{ip_{2,n}}(x)\\ B_{1,n,0,j}=\dfrac{\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\varphi_1(r,\theta)\,[S_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})\mathrm{e}^{in\theta}]^*\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{[N_{n,l}^{(j)}]}\\ [N_{n,l}^{(j)}]=\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}[S_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})e^{in\theta}]^*\,S_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})\mathrm{e}^{in\theta}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\end{cases}\tag{5-143a}$$

和

$$C_j=\frac{\int_{r_1}^{r_2}f(r)[J_0(r\sqrt{\lambda_0^{(j)}})-\dfrac{J_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}})}{Y_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}})}Y_0(r\sqrt{\lambda_0^{(j)}})]r\mathrm{d}r}{\int_{r_1}^{r_2}[J_0(r\sqrt{\lambda_0^{(j)}})-\dfrac{J_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}})}{Y_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}})}Y_0(r\sqrt{\lambda_j^0})]^2\,r\mathrm{d}r}\tag{5-143b}$$

比较式（5-141）和（5-142）的 $J_0(r\sqrt{\lambda_0^{(j)}})-\dfrac{J_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}})}{Y_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}})}Y_0(r\sqrt{\lambda_j^0})$，$S_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})$ 的系数，可得

$$A_{1,n,0,r,j}=B_{1,n,0,r,j},A_{1,n,0,i,j}=B_{1,n,0,i,j},\ A_j=C_j$$

由此，可以确定各向异性圆环域温度场。

5.9.2 复数柱环函数 $S_{ip_n}(x)\mathrm{e}^{in\theta}$ 圆环域展开定理

考虑圆环域（$r_1\leqslant r\leqslant r_2$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$），对于非稳态热传导方程（5-1），式（5-6）的分离常数可写为 $\lambda_n^{(j)}$，其中 $\lambda_n^{(j)}$（j=1，2，…，∞）是 $\begin{vmatrix}Z_{ip_{1,n}}(x_1) & Z_{ip_{2,n}}(x_1)\\ Z_{ip_{1,n}}(x_2) & Z_{ip_{2,n}}(x_2)\end{vmatrix}=0$ 的特征根。引入参数变换，$x=r\sqrt{\lambda_n^{(j)}}$。

将 $u_{l,n}=(A_{l,n,0,r}+\mathrm{i}A_{l,n,0,i})\mathrm{e}^{in\theta}S_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})$ 和 $x=r\sqrt{\lambda_n^{(j)}}$ 代入式（5-55），可得

$$\frac{\partial}{\partial r}[r\frac{\partial(S_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})\mathrm{e}^{in\theta})}{\partial r}]+2K_{12}\frac{\partial^2[S_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})\mathrm{e}^{in\theta}]}{\partial r\partial\theta}-\frac{n^2K_{22}S_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})\mathrm{e}^{in\theta}}{r}$$
$$+r\lambda_n^{(j)}S_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})\mathrm{e}^{in\theta}=0$$

(5-144)

$\lambda_n^{(j)}$ 是 $\begin{vmatrix}Z_{ip_{1,n}}(x_1) & Z_{ip_{2,n}}(x_1)\\ Z_{ip_{1,n}}(x_2) & Z_{ip_{2,n}}(x_2)\end{vmatrix}=0$ 的根。根据式（5-23），可得 $\lambda_n^{(j)}=\lambda_{-n}^{(j)}$。这样，一个 $\lambda_n^{(j)}$ 与两个方程关联，一个对于 n 的方程（5-144），另一个对应于 $-n$ 的如下方程：

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial(S_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_{-n}^{(j)}})e^{-in\theta})}{\partial r}\right]+2K_{12}\frac{\partial^2(S_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_{-n}^{(j)}})e^{-in\theta})}{\partial r\partial\theta}$$
$$-\frac{n^2K_{22}S_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_{-n}^{(j)}})e^{-in\theta}}{r}+r\lambda_n^{(j)}S_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_{-n}^{(j)}})e^{-in\theta}=0 \tag{5-145}$$

方程（5－144）和（5－145）可称为连带方程。

根据式（5－14），可以推导出 $S_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_{-n}^{(j)}})=[S_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})]^*$ 。$S_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_{-n}^{(j)}})e^{in\theta}$ 的共轭函数写为 $[S_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})e^{in\theta}]^*$ ，即

$$[S_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})e^{in\theta}]^*=e^{-in\theta}S_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_{-n}^{(j)}}) \tag{5-146}$$

这样，方程（5－145）可写为

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\frac{\partial[S_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})e^{in\theta}]}{\partial r}+2K_{12}\frac{\partial^2[S_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})e^{in\theta}]^*}{\partial r\partial\theta}-\frac{n^2K_{22}[S_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})e^{in\theta}]^*}{r}\right.$$
$$+r\lambda_n^{(j)}[S_{ip_n}(r)e^{in\theta}]*=0 \tag{5-147}$$

标记 $x=r\alpha$ 。假设 $S_{ip_n}(r\alpha_1)e^{in\theta}$ 、$S_{ip_n}(r\alpha_2)e^{in\theta}$ 是方程（5－144）的解，那么 $[S_{ip_n}(r\alpha_2)e^{in\theta}]^*$ 是方程（5－147）的解。

标记：

$\alpha_1=\sqrt{\lambda_n^{(j_1)}},\alpha_2=\sqrt{\lambda_n^{(j_2)}}$ ，$\alpha_1\neq\alpha_2$ ，$S_{ip_n}(r_1\alpha_1)=S_{ip_n}(r_1\alpha_2)=S_{ip_n}(r_2\alpha_1)=S_{ip_n}(r_2\alpha_2)=0$ ，这样可得

$$e^{in\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial S_{ip_n}(r\alpha_1)}{\partial r}\right]+2inK_{12}\frac{\partial S_{ip_n}(r\alpha_1)}{\partial r}-\frac{n^2K_{22}S_{ip_n}(r\alpha_1)}{r}+r\lambda_n^{(j_1)}S_{ip_n}(r\alpha_1)\right\}=0 \tag{5-148}$$

$$e^{-in\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\frac{\partial[S_{ip_n}(r\alpha_2)]^*}{\partial r}-2inK_{12}\frac{\partial[S_{ip_n}(r\alpha_2)]^*}{\partial r}-\frac{n^2K_{22}[S_{ip_n}(r\alpha_2)]^*}{r}\right.\right.$$
$$+r\lambda_n^{(j_2)}[S_{ip_n}(r\alpha_2)]^*)=0 \tag{5-149}$$

方程（5－148）乘以 $-[S_{ip_n}(r\alpha_2)e^{in\theta}]^*$ ，方程（5－149）乘以 $e^{in\theta}S_{ip_n}(r\alpha_1)$ ，相加后将结果从 $r=r_1$ 到 $r=r_2$ 积分可得

$$(\lambda_n^{(j_1)}-\lambda_n^{(j_2)})\int_{r_1}^{r_2}rS_{ip_n}(r\alpha_1)e^{in\theta}[S_{ip_n}(r\alpha_2)e^{in\theta}]^*\,dr=0 \tag{5-150}$$

因为 $\lambda_n^{(j_1)}\neq\lambda_n^{(j_2)}$ ，可得

$$\int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi}rS_{ip_n}(r\alpha_1)e^{in\theta}[S_{ip_n}(r\alpha_2)e^{in\theta}]^*\,d\theta dr=0,j_1\neq j_2 \tag{5-151}$$

根据方程（5－151），依据 Sturm－Liouville 理论，可得 $S_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})e^{in\theta}$ 系列在圆环域（$r_1\leqslant r\leqslant r_2$ ，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$）关于 r 正交。根据 Sturm－Liouville 理论和 $S_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})e^{in\theta}$ 正交性，可得以下定理，并给出函数展开为复数函数 $S_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})e^{in\theta}$ 的充分条件和计算公式。

复数柱环函数 $S_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})e^{in\theta}$ 圆环域展开定理

设 $\varphi(r,\theta)$ 在区域（$r_1 \leqslant r \leqslant r_2$，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$）是分片连续函数，这样 $\varphi(r,\theta)$ 可以展开为复数柱环函数级数

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} B_{1,n,0,j} S_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})e^{in\theta} + \sum_{j=1}^{\infty} C_j\left[J_0(r\sqrt{\lambda_0^{(j)}}) - \frac{J_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}})}{Y_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}})}Y_0(r\sqrt{\lambda_0^{(j)}})\right] \tag{5-152}$$

其中 $B_{1,n,0,j}$，C_j 为待定级数常数。$\lambda_n^{(j)}$ 是 $\begin{vmatrix} Z_{ip_{1,n}}(x_1) & Z_{ip_{2,n}}(x_1) \\ Z_{ip_{1,n}}(x_2) & Z_{ip_{2,n}}(x_2) \end{vmatrix} = 0$ 当 $n \neq 0$ 时的零点。λ_j^0 为下式的根

$$\begin{vmatrix} J_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}}) & Y_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}}) \\ J_0(r_2\sqrt{\lambda_0^{(j)}}) & Y_0(r_2\sqrt{\lambda_0^{(j)}}) \end{vmatrix} = 0$$

若 $\varphi(r,\theta)$ 是函数关于 r 的 $f(r)$ 和关于 (r,θ) 的函数 $\varphi(r,\theta)$ 之和，即

$$\varphi(r,\theta) = f(r) + \varphi_1(r,\theta) \tag{5-153}$$

那么级数常数可以由下式确定

$$B_{1,n,0,j} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} r\varphi_1(r,\theta)\left[S_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})e^{in\theta}\right]^* r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{[N_{n,l}^{(j)}]} \tag{5-154}$$

$$[N_{n,l}^{(j)}] = \int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\left[S_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})e^{in\theta}\right]^* S_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})e^{in\theta} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \tag{5-155}$$

和

$$C_j = \frac{\int_{r_1}^{r_2} f(r)\left[J_0(r\sqrt{\lambda_0^{(j)}}) - \frac{J_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}})}{Y_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}})}Y_0(r\sqrt{\lambda_0^{(j)}})\right]r\mathrm{d}r}{\int_{r_1}^{r_2}\left[J_0(r\sqrt{\lambda_0^{(j)}}) - \frac{J_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}})}{Y_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}})}Y_0(r\sqrt{\lambda_0^{(j)}})\right]^2 r\mathrm{d}r} \tag{5-156}$$

式（5-152）可被称为 $\varphi(r,\theta)$ 的复数柱环函数圆环域展开式。对于圆环域（$r_1 \leqslant r \leqslant r_1$，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$）任一点，$\varphi(r,\theta)$ 连续，那么该复数柱环函数展开式收敛到 $\varphi(r,\theta)$。

5.9.3 侧面具有第二、三类边界条件的各向异性圆环域热传导非稳态解

对于内外径都是第三类边界条件的空心圆柱边界条件

$$\begin{cases} q_r|_{r=r_1} = \left[-\left(k_{11}\dfrac{\partial T}{\partial r} + k_{12}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T}{\partial \theta}\right) + h_{m_1}T\right]\Big|_{r=r_1} = 0 \\ q_r|_{r=r_2} = \left[-\left(k_{11}\dfrac{\partial T}{\partial r} + k_{12}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T}{\partial \theta}\right) + h_{m_2}T\right]\Big|_{r=r_2} = 0 \end{cases} \tag{5-157}$$

其中 h_{m_1}，h_{m_2} 分别为 $r=r_1$，$r=r_2$ 边界为材料与外界环境的热交换系数。令 $h_{m_1}=0$，$h_{m_2}=0$，式（5-157）退化为第二类边界条件。

考虑变换 $x = r\sqrt{\lambda}$，式（5-157）可改写为

$$\begin{cases} \left(xK_{11}\dfrac{\partial T}{\partial x} + K_{12}\dfrac{\partial T}{\partial \theta}\right) - H_{m_1}T\Big|_{x=x_1} = 0 \\ \left(xK_{11}\dfrac{\partial T}{\partial x} + K_{12}\dfrac{\partial T}{\partial \theta}\right) - H_{m_2}T\Big|_{x=x_2} = 0 \end{cases} \tag{5-158}$$

其中 $x_1 = r_1\sqrt{\lambda}, x_2 = r_2\sqrt{\lambda}$，$H_{m_1} = \dfrac{r_1 h_{m_1}}{k_{11}}, H_{m_2} = \dfrac{r_2 h_{m_2}}{k_{11}}$

根据 Z_{ip} 方程（5-10）的解（5-24）

$$u(x,\theta) = [A_{1,n} Z_{ip_{1,n}}(x) + A_{2,n} Z_{ip_{2,n}}(x)]e^{in\theta} \tag{5-159}$$

式中 $A_{1,n}$，$A_{2,n}$ 为复数常数。

将式（5-159）代入（5-158），根据待定系数 $A_{1,n}$，$A_{2,n}$ 不全为 0 的条件，可得特征行列式

$$\begin{vmatrix} [x\dfrac{\partial[Z_{ip_{1,n}}(x)]}{\partial x} + inK_{12}Z_{ip_{1,n}}(x) - H_{m_1}Z_{ip_{1,n}}(x)]\big|_{x=x_1} & [x\dfrac{\partial[Z_{ip_{2,n}}(x)]}{\partial x} + inK_{12}Z_{ip_{2,n}}(x) - H_{m_1}Z_{ip_{2,n}}(x)]\big|_{x=x_1} \\ [x\dfrac{\partial[Z_{ip_{1,n}}(x)]}{\partial x} + inK_{12}Z_{ip_{1,n}}(x) - H_{m_2}Z_{ip_{1,n}}(x)]\big|_{x=x_2} & [x\dfrac{\partial[Z_{ip_{2,n}}(x)]}{\partial x} + inK_{12}Z_{ip_{2,n}}(x) - H_{m_2}Z_{ip_{2,n}}(x)]\big|_{x=x_2} \end{vmatrix} = 0 \tag{5-160}$$

求解式（5-160）可以确定特征值 $\lambda_n^{(j)}$。根据方程（5-160）可得

$$A_{2,n} = -A_{1,n}\frac{[x\dfrac{\partial[Z_{ip_{1,n}}(x)]}{\partial x} + inK_{12}Z_{ip_{1,n}}(x) - H_{m_1}Z_{ip_{1,n}}(x)]\big|_{x=r_1\sqrt{\lambda_n^{(j)}}}}{[x\dfrac{\partial[Z_{ip_{2,n}}(x)]}{\partial x} + inK_{12}Z_{ip_{2,n}}(x) - H_{m_1}Z_{ip_{2,n}}(x)]\big|_{x=r_1\sqrt{\lambda_n^{(j)}}}} \tag{5-161}$$

定义 $\Xi = \dfrac{[x\dfrac{\partial[Z_{ip_{1,n}}(x)]}{\partial x} + inK_{12}Z_{ip_{1,n}}(x) - H_{m_1}Z_{ip_{1,n}}(x)]\big|_{x=r_1\sqrt{\lambda_n^{(j)}}}}{[x\dfrac{\partial[Z_{ip_{2,n}}(x)]}{\partial x} + inK_{12}Z_{ip_{2,n}}(x) - H_{m_1}Z_{ip_{2,n}}(x)]\big|_{x=r_1\sqrt{\lambda_n^{(j)}}}}$

特征函数

$$u_{n,j}(x,\theta) = A_{1,n,j}[Z_{ip_{1,n}}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}}) - \Xi Z_{ip_{2,n}}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})]e^{in\theta} \tag{5-162}$$

$$\begin{aligned} T(r,\theta,t) = &\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(A_{1,n,0,j,r} + iA_{1,n,0,j,i})[Z_{ip_{1,n}}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}}) - \\ &\Xi Z_{ip_{2,n}}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})]e^{in\theta}e^{-\lambda_n^{(j)}at} + T(r,t) \end{aligned} \tag{5-163}$$

式中 $T(r,t)$ 为中心对称的贝塞尔函数解，读者可自行求得，下面推导中略去中心对称解部分。

将 $t=0$ 代入式（5-163），再代入（5-2）初始条件可得

$$\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(A_{1,n,0,j,r} + iA_{1,n,0,j,i})[Z_{ip_{1,n}}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}}) - \Xi Z_{ip_{2,n}}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})]e^{in\theta} + T(r,0) = \varphi(r,\theta) \tag{5-164}$$

求解式（5-164）可得 $A_{l,n,0,j,r}, A_{l,n,0,j,i}$，$1 \leqslant j \leqslant J$，$0 < n \leqslant N$。

第6章　各向异性圆柱体稳态热传导方程柱对称问题——复数柱对称函数

对于有限尺寸圆柱体，如柱体圆周向边界条件呈现中心轴对称，那么圆柱体温度场则呈现出柱对称的状态，只与(r,z)有关，而与角度θ无关。对于各向同性圆柱体柱对称热传导，可以采用贝塞尔函数方法求解，而对于各向异性圆柱体稳态热传导方程柱对称问题求解，则是个新问题。本节采用复变分离变量法，引入复数柱轴对称函数求解该数学物理方程，给出了该数学物理稳态问题的一般解析解。

6.1　控制偏微分方程和复数柱对称函数

考虑各向异性圆柱体，半径为R，高度为L，柱体内温度场与极角θ无关，也就是具备中心轴对称（简称柱对称）的特征。在柱坐标系(r,θ,z)下，稳态温度场控制方程

$$k_{11}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+k_{33}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+2k_{13}\frac{\partial^2 T}{\partial z\partial r}+\frac{k_{13}}{r}\frac{\partial T}{\partial z}+q=0$$

其中$T(r,z)$为温度函数，q为热源函数。k_{11}、k_{13}、k_{33}为热传导系数，下标1代表径向r，下标3代表z方向，k_{11}、k_{13}、k_{33}表达式为

$$k_{11}=k_1\cos^2\beta+k_3\sin^2\beta$$

$$k_{13}=(k_1-k_3)\sin\beta\cos\beta$$

$$k_{33}=k_1\sin^2\beta+k_3\cos^2\beta$$

其中k_1、k_3两个主方向热传导系数，β为平面(r,z)中数值最大的主热传导系数方向与r夹角。

作如下参数变换

$$K_{11}=1,K_{13}=\frac{k_{13}}{k_{11}},K_{33}=\frac{k_{33}}{k_{11}},q*=\frac{q}{k_{11}}$$

这样可得如下方程

$$K_{11}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+K_{33}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+2K_{13}\frac{\partial^2 T}{\partial z\partial r}+\frac{K_{13}}{r}\frac{\partial T}{\partial z}+q^*=0 \tag{6-1}$$

设方程（6-1）的解为

$$T=\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(r)e^{im\lambda z} \tag{6-2}$$

其中$i^2=-1$，λ为特征根，m为整数，$m\lambda$记为λ_m，即$\lambda_m=m\lambda$。式（6-2）可重写为

$$T=\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(r)e^{i\lambda_m z}$$

当$m=0$，式（6-2）为

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r})=0$$

上式解为

$$T^{*}=c_0\ln(r)+d_0$$

其中 c_0, d_0 为实数待定常数。

当 $m\neq 0$，将式（6-2）代入方程（6-1），可得

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}r^2}+r\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}(2\mathrm{i}K_{13}\lambda r+1)+f(-K_{33}\lambda^2 r^2+\mathrm{i}rK_{13}r\lambda)=0 \tag{6-3}$$

方程（6-3）为新的常微分方程，可称为各向异性柱对称方程。需要发展新的求解方法，解析求解各向异性柱对称方程。当 $K_{13}=0$，各向异性柱对称方程（6-3）退化为 0 阶变形贝塞尔函数。

设

$$f(r)=\sum_{k=0}^{\infty}r^{k+\mathrm{i}s}A_{m,k} \tag{6-4}$$

其中 $A_{m,k}$ 为复数，k 为整数，s 为特征指标。

结合式（6-2）和（6-4）可得

$$T=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A_{m,k}r^{k+\mathrm{i}s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_m z} \tag{6-5}$$

定义：

复数柱对称函数 $Z_r(r,z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A_{m,k}r^{k+\mathrm{i}s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_m z}$ 。

将式（6-5）代入方程（6-3），可得下面控制方程

$$\begin{aligned}&A_{m,0}s^2\mathrm{i}r^{\mathrm{i}s-1}+r^{\mathrm{i}s-1}r[A_{m,0}\lambda_m K_{13}(1+2\mathrm{i}s)+A_{m,1}(\mathrm{i}s^2-\mathrm{i}+2s)]+\\&r^{\mathrm{i}s-1}r^2[A_{m,0}(\lambda_m)^2K_{33}\mathrm{i}+A_{m,1}\lambda_m K_{13}(3+2\mathrm{i}s)+\\&A_{m,2}(4s-4\mathrm{i}+\mathrm{i}s^2)]+\cdots+r^{\mathrm{i}s-1}r^{k+1}[A_{m,k-1}(\lambda_m)^2K_{33}\mathrm{i}+A_{m,k}\lambda_m K_{13}(1+2k+2\mathrm{i}s)+\\&A_{m,k+1}(-2\mathrm{i}k+2s-\mathrm{i}-\mathrm{i}k^2+2sk+\mathrm{i}s^2)]+\cdots=0\end{aligned}$$

根据以上控制方程中 $\frac{1}{r}r^{\mathrm{i}s}$ 前系数等于 0 的条件，可得

$$s_1=s_2=0$$

s 的双重指标带来了式（6-5）相对复杂的解形式。根据所得方程中 $r^{\mathrm{i}s}r^0, r^{\mathrm{i}s}r, r^{\mathrm{i}s}r^2, r^{\mathrm{i}s}r^3, \cdots, r^{\mathrm{i}s}r^k, \cdots$ 前系数为 0 的条件，可得递推公式

$$A_{m,k+1}=\frac{A_{m,k-1}(\lambda_m)^2K_{33}-\mathrm{i}A_{m,k}\lambda_m K_{13}(1+2k)}{(k+1)^2} \tag{6-6a}$$

和 $A_{m,0}$ 与 $A_{m,k}$ 的递推公式

$$A_{m,k}=A_{m,0}c_{m,k}\text{（下文给出 }c_{m,k}\text{ 形式）} \tag{6-6b}$$

将式（6-6b）代入式（6-5），根据 *Frobenius* 方法可得

$$T=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\{A_{m,0}\sum_{k=0}^{\infty}c_{m,k}r^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_m z}\}+\sum_{m=-\infty}^{\infty}B_{m,0}\{[\sum_{k=0}^{\infty}c_{m,k}r^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_m z}]\ln(r)+[\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{\partial c_{m,k}}{\partial s})_{s=0}r^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_m z}]\} \tag{6-7}$$

其中 $A_{m,0}$ ，$B_{m,0}$ 为待定实数常数。

实际运算中 $c_{m,k}$ 难以获得解析式，$\frac{\partial c_{m,k}}{\partial s}$ 就更加难以获得解析式，实际计算可以定义

$$t_{m,k}=\left(\frac{\partial c_{m,k}}{\partial s}\right)_{s=0}$$

这样式（6－7）就变为

$$T=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left\{A_{m,0}\left[\sum_{k=0}^{\infty}c_{m,k}r^{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_m z}\right]\right\}+\sum_{m=-\infty}^{\infty}B_{m,0}\left\{\left[\sum_{k=0}^{\infty}c_{m,k}r^{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_m z}\right]\ln(r)+\left[\sum_{k=1}^{\infty}t_{m,k}r^{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_m z}\right]\right\}\tag{6-8}$$

将上式代入方程（6－1），根据所得控制方程中 $A_{m,0}$ 项后面的 $r^{is}r^{0}, r^{is}r, r^{is}r^{2}, r^{is}r^{3},\cdots, r^{is}r^{k},\cdots$ 前系数为 0 的条件，可得出递推公式

$$\begin{cases}c_{m,1}=-\dfrac{\mathrm{i}K_{13}\lambda_m}{K_{11}}c_{m,0}\\ c_{m,2}=\dfrac{(\lambda_m)^2[K_{33}K_{11}-3(K_{13})^2]}{4(K_{11})^2}c_{m,0}\\ c_{m,3}=-\dfrac{\mathrm{i}K_{13}(\lambda_m)^3[3K_{33}K_{11}-5(K_{13})^2]}{12(K_{11})^3}c_{m,0}\\ \cdots\\ c_{m,k}=\dfrac{(\lambda_m)^2K_{33}c_{m,k-2}-\mathrm{i}\lambda_mK_{13}(2k-1)c_{m,k-1}}{k^2K_{11}}\end{cases}\tag{6-9a}$$

定义：

$$\begin{cases}z_{m,1}=-\dfrac{K_{13}}{K_{11}}\\ z_{m,2}=\dfrac{K_{33}K_{11}-3(K_{13})^2}{4(K_{11})^2}\\ z_{m,3}=-\dfrac{K_{13}[3K_{33}K_{11}-5(K_{13})^2]}{12(K_{11})^3}\\ \cdots\\ z_{m,k}=\dfrac{(\lambda_m)^2K_{33}c_{m,k-2}-\mathrm{i}\lambda_mK_{13}(2k-1)c_{m,k-1}}{ik^2(\lambda_m)^kK_{11}}\end{cases}\tag{6-9b}$$

其中 k 是偶数。

这样可得

$$\begin{cases}c_{m,1}=z_{m,1}c_{m,0}\mathrm{i}\lambda_m\\ c_{m,2}=z_{m,2}c_{m,0}(\lambda_m)^2\\ c_{m,3}=z_{m,3}c_{m,0}\mathrm{i}(\lambda_m)^3\\ \cdots\\ c_{m,k}=z_{m,k}c_{m,0}(\lambda_m)^k\\ c_{m,k+1}=z_{m,k+1}c_{m,0}\mathrm{i}(\lambda_m)^{k+1}\end{cases}\tag{6-9c}$$

其中 k 是偶数。

同样，根据所得方程中 $B_{m,0}$ 项后面的 $r^{is}r^0, r^{is}r, r^{is}r^2, r^{is}r^3, \cdots, r^{is}r^k, \cdots$ 前系数为 0，可得出递推公式

$$
\begin{cases}
t_{m,1} = 0 \\
t_{m,2} = -\dfrac{(\lambda_m)^2[K_{33}K_{11} - (K_{13})^2]}{4\,(K_{11})^2} c_{m,0} = d_{m,2} c_{m,0}\,(\lambda_m)^2 \\
t_{m,3} = \dfrac{\mathrm{i}K_{13}\,(\lambda_m)^3[K_{33}K_{11} - (K_{13})^2]}{4\,(K_{11})^3} c_{m,0} = \mathrm{i}d_{m,3} c_{m,0}\,(\lambda_m)^3 \\
\cdots \\
t_{m,k} = \dfrac{2(k-1)K_{13}c_{m,k-1} - 2K_{33}c_{m,k-2}}{k^3 K_{11}} + \dfrac{-\mathrm{i}K_{13}(2k-1)t_{m,k-1} + K_{33}t_{m,k-2}}{k^2 K_{11}} = d_{m,k}c_{m,0}\,(\lambda_m)^k \\
t_{m,k+1} = \dfrac{2kK_{13}c_{m,k} - 2K_{33}c_{m,k-1}}{(k+1)^3 K_{11}} + \dfrac{-\mathrm{i}K_{13}(2k+1)t_{m,k} + K_{33}t_{m,k-1}}{(k+1)^2 K_{11}} = d_{m,k+1}c_{m,0}\mathrm{i}\,(\lambda_m)^{k+1}
\end{cases}
\tag{6-10}
$$

其中 k 是偶数。

注意到，$A_{m,0}$ 和 λ_m 为复数，定义：

$$
\begin{cases}
A_{m,0} = A_{m,0,r} + \mathrm{i}A_{m,0,i} \\
A_{m,k} = A_{m,k,r} + \mathrm{i}A_{m,k,i} \\
\lambda_m = a_m + \mathrm{i}b_m \\
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_m z} = \mathrm{e}^{-b_m z}[\cos(a_m z) + \mathrm{i}\sin(a_m z)]
\end{cases}
\tag{6-11}
$$

其中 $A_{m,0,r}, A_{m,0,i}, A_{m,k,r}, A_{m,k,i}, a_m, b_m$ 为实数。

令 $c_{m,0} = 1$，将式（6-11）代入式（6-8）可得

$$
\begin{aligned}
T = &\sum_{m=-\infty, m\neq 0}^{\infty} e^{\mathrm{i}\lambda_m z} A_{m,0}[\mathrm{i}C_r^{(1)}(r\lambda_m) + C_r^{(2)}(r\lambda_m)] + \\
&\sum_{m=-\infty, m\neq 0}^{\infty} e^{\mathrm{i}\lambda_m z} B_{m,0}\{[\mathrm{i}C_r^{(1)}(r\lambda_m) + C_r^{(2)}(r\lambda_m)]\ln r\} + \\
&\sum_{m=-\infty, m\neq 0}^{\infty} e^{\mathrm{i}\lambda_m z} B_{m,0}\{[\mathrm{i}D_r^{(1)}(r\lambda_m) + D_r^{(2)}(r\lambda_m)]\} + c_0 \ln r + d_0
\end{aligned}
\tag{6-12}
$$

其中 $x = r\lambda_m$，$C_r^{(1)}(x)$、$C_r^{(2)}(x)$、$D_r^{(1)}(x)$、$D_r^{(2)}(x)$ 为新定义的实数多项式

$$
\begin{cases}
C_r^{(1)}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_{m,2n-1} x^{2n-1} \\
C_r^{(2)}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_{m,2n} x^{2n} + 1 \\
D_r^{(1)}(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} d_{m,2n-1} x^{2n-1} \\
D_r^{(2)}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} d_{m,2n} x^{2n}
\end{cases}
\tag{6-13}
$$

值得提醒的是 $D_r^{(1)}(x)$，$D_r^{(2)}(x)$ 级数下标分别从 2 和 1 开始计算。

这样根据柱体侧面的边界条件可以求解特征根，进而确定待定常数，给出方程解。下文分不同情况给出解析解。

6.2 柱侧面具有第一类边界条件的各向异性实心柱体热传导解

侧面具有第一类边界条件的实心柱体热传导边界条件为

$$T(R,z) = 0 \tag{6-14}$$

和自然条件 $T(0,z)$ 为有限值。

将 $T(0,z)$ 为有限值为的自然条件代入式（6-12）可得

$$B_{m,0} = 0, c_0 = 0 \tag{6-15}$$

由式（6-14）可得 $d_0 = 0$

这样，式（6-12）化简为

$$T = \sum_{m=-\infty, m\neq 0}^{\infty} e^{i\lambda_m z} A_{m,0}[iC_r^{(1)}(r\lambda_m) + C_r^{(2)}(r\lambda_m)] \tag{6-16}$$

将式（6-16）代入式（6-14），可得特征方程

$$iC_r^{(1)}(x) + C_r^{(2)}(x) = 0 \tag{6-17}$$

其中 $x = R\lambda_m$。

求解方程（6-17），可得特征根 λ_m

对于 $\lambda_m = a_m + ib_m$，定义

$$(\lambda_m)^k = R_{m,k} + iI_{m,k} \tag{6-18}$$

其中 $R_{m,k}$，$I_{m,k}$ 为实数。

将式（6-11）和（6-18）代入式（6-16）可得

$$\begin{aligned} T = T_0 + &\sum_{m=-\infty, m\neq 0}^{\infty} e^{-b_m z}\{A_{m,0,r}[(Z_{mr}(r)\cos(za_m) - Z_{mi}(r)\sin(za_m)] - A_{m,0,i}[Z_{mr}(r)\sin(za_m) + Z_{mi}(r)\cos(za_m)]\} + \\ i &\sum_{m=-\infty, m\neq 0}^{\infty} e^{-b_m z}\{A_{m,0,r}[Z_{mr}(r)\sin(za_m) + Z_{mi}(r)\cos(za_m)] + A_{m,0,i}[Z_{mr}(r)\cos(za_m) - Z_{mi}(r)\sin(za_m)]\} \end{aligned} \tag{6-19}$$

其中 $A_{m,0,r}$，$A_{m,0,i}$ $(m = 1,\cdots,\infty)$ 为实数；T_0 为方程（6-1）关于热源 q 的特解；$Z_{mr}(r)$，$Z_{mi}(r)$ 为新定义的实数多项式

$$\begin{aligned} Z_{mr}(r) = &\\ 1 - z_{m,1}I_{m,1}r + z_{m,2}R_{m,2}r^2 - z_{m,3}I_{m,3}r^3 + z_{m,4}R_{m,4}r^4 - z_{m,5}I_{m,5}r^5 + \cdots z_{m,k}R_{m,k}r^k - z_{m,k+1}I_{m,k+1}r^{k+1} + \cdots \\ = 1 - z_{m,1}I_{m,1}r + \sum_{n=1}^{\infty}(z_{m,2n}R_{m,2n}r^{2n} - z_{m,2n+1}I_{m,2n+1}r^{2n+1}) \end{aligned} \tag{6-20}$$

$$
\begin{aligned}
Z_{mi}(r) &= z_{m,1}R_{m,1}r + z_{m,2}I_{m,2}r^2 + z_{m,3}R_{m,3}r^3 + z_{m,4}I_{m,4}r^4 + z_{m,5}R_{m,5}r^5 + \cdots + \\
&\quad z_{m,k}I_{m,k}r^k + z_{m,k+1}R_{m,k+1}r^{k+1} + \cdots \\
&= z_{m,1}R_{m,1}r + \sum_{n=1}^{\infty}(z_{m,2n}I_{m,2n}r^{2n} + z_{m,2n+1}R_{m,2n+1}r^{2n+1})
\end{aligned}
\tag{6-21}
$$

（1）求解模式

式（6－19）是一复数级数解。对于实际物理问题，根据数学物理实数化原理，如对应数学物理方程解是成立的，那么解应该是实数形式。对于式（6－19）的解，可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}(T) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-b_m z} \{ A_{m,0,r}[Z_{mr}(r)\cos(za_m) + Z_{mi}(r)\sin(za_m)] + \\
A_{m,0,i}[Z_{mr}(r)\sin(za_m) - Z_{mi}(r)\cos(za_m)] \} = 0
\end{aligned}
\tag{6-22}
$$

实际计算中，式（6－19）中 m 不可能取无限大，设 m 取值在在［－M，M］之间，这样式（6－19）共有 4M 个未知数（$A_{m,0,r}, A_{m,0,i}, m = \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm M$），根据式（6－22）可以建立 2M 个未知数。将（6－19）代入柱体 z=0 和 z=L 两个边界条件，可以形成两个方程，将 2 个边界条件方程左右两端各展开为 r 的泰勒级数［$f(r) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(r_1)}{j!}(r - r_1)^j$，最大阶数 j 取为 M－1］，分别对比 r 的前端系数即可建立 2M 个方程；根据式（6－22）可建立 2M 个方程。这样共建立了 4M 个方程，可求解 4M 个未知数，此数学物理问题得解。

（2）数值实验

考虑实心各向异性圆柱体，材料的热传导系数为 $k_1 = 2.29\mathrm{kcal/(m \cdot h \cdot ℃)}$，$k_2 = 1.59\mathrm{kcal/(m \cdot h \cdot ℃)}$，$R$=1m，$L$=1m，$q$=0。柱体上端面（$z_2 = 1\mathrm{m}$）温度分布为（$2 - r - r^3$）℃，柱体下端面（$z_1 = 0.0\mathrm{m}$）温度分布为 0℃ 。侧面（$r$=1）温度为 0℃ 。

1）$z_{m,k}$ 分布情况

系数 $z_{m,k}$ 可以根据式（6－9b）计算获得。根据不同的各向异性角 β，计算结果（M=10）如表 6－1 所示。

表 6－1　$z_{m,k}$ 与 k 的计算趋势（$m > 0$）

k \ β	10°	45°	80°
1	－5.276012615342590E－002	－1.804123711340206E－001	－7.430109040981527E－002
2	1.754336491891484E－001	2.255885322563503E－001	3.479297950438462E－001
3	－9.304856368797739E－003	－4.265635346211985E－002	－2.598829331317280E－002
4	8.000585401800304E－003	1.746616683503586E－002	3.146872980179351E－002
5	－4.162500218076213E－004	－2.840654664884030E－003	－2.305690867196547E－003
6	1.645187511538716E－004	6.417652365374151E－004	1.283369093446113E－003
7	－8.334969210969289E－006	－8.869032059878238E－005	－9.156500722267983E－005

续表

k \ β	10°	45°	80°
8	1.928417005461040E−006	1.377777659492745E−005	2.983429974046910E−005
9	−9.442198281860587E−008	−1.616628437708133E−006	−2.057204067345531E−006
10	1.463993532045215E−008	1.931931221903007E−007	4.491927914132107E−007

注：本书部分计算数据中采用计算语言数据格式，即 .xxxE−0y 代表 0.xxxx × 10^{-y}，.xxxE+0y 代表 0.xxxx × 10^{y}。如 5.276012615342590E−02 代表 5.276012615342590 × 10^{-2}。

从表 6-1 可看出 $z_{m,k}$ 随 k 递减迅速，这也预示着所得级数解收敛是有基础的。

2）特征根分布情况

根据式（6-16）可以求解特征根 $\lambda_m = a_m + ib_m$。计算结果见表 6-2，计算取 $M = 10$。

表 6-2　$\lambda_m = a_m + ib_m$ 与 m 变化趋势

m \ β	10°	45°
−10	−4.818189201627438+i6.051865111841677	−3.232286158363849+i4.471482827574930
−9	−3.944854522144174−i7.626546224245049	−2.728826857233053−i5.380317992603450
−8	−1.105142420684202+i5.751691568897249	−7.838413358277283E−001+i2.951538921871300
−7	−i8.571638105940837	−i9.398535674509869
−6	−i6.241016141515686	i4.239414597460745
−5	−i2.900163483456864	−i4.500528161428413
−4	i2.909179333161391	−i2.793698186214316
−3	1.105142420684204+i5.751691568897244	.838413358277283E−001+i2.951538921871300
−2	3.944854522144176−i7.626546224245051	2.728826857233055−i5.380317992603451
−1	4.818189201627436+i6.051865111841677	3.232286158363849+i4.471482827574930
1	4.818189201627436−i6.051865111841677	3.232286158363848−i4.471482827574930
2	3.944854522144176+i7.626546224245051	2.728826857233055+i5.380317992603451
3	1.105142420684204−i5.751691568897244	7.838413358277283E−001−i2.951538921871300
4	−i2.909179333161391	i2.793698186214316
5	i2.900163483456864	i4.500528161428413
6	i6.241016141515686	−i4.239414597460745
7	i8.571638105940837	i9.398535674509869
8	−1.105142420684202−i5.751691568897249	−7.838413358277283E−001−i2.951538921871300
9	−3.944854522144174+i7.626546224245049	−2.728826857233053+i5.380317992603450
10	−4.818189201627438−i6.051865111841677	−3.232286158363849−i4.471482827574930

其他计算同样表明式（6-17）特征根为对偶出现。一种对偶方式为 $\pm a_m \pm ib_m$ 即

$$\lambda_m = a_m - ib_m,\ \lambda_{m+k} = -a_m - ib_m,\ \lambda_{-m} = a_m + ib_m,\ \lambda_{-m-k} = -a_m + ib_m$$

其中 $b_m > 0$。

根据下面复数级数实数化证明，可得式（6－19）中复数级数项如满足实数条件（6－22），式（6－19）中 2 个特征根（$\lambda_m = a_m - ib_m$，$\lambda_{m+1} = -a_m - ib_m$）对应级数项之和为 $\lambda_m = a_m - ib_m$ 对应的级数项实部之和的 2 倍。式（6－19）中另 2 个特征根（$\lambda_{-m} = a_m + ib_m$，$\lambda_{-m-1} = -a_m + ib_m$）对应级数项之和为 $\lambda_{-m} = a_m + ib_m$ 对应的级数项实部之和的 2 倍。这样，只需计算 $\lambda_m = a_m - ib_m$、$\lambda_{-m} = a_m + ib_m$ 对应的级数项即可。另一种式（6－17）特征根对偶方式为 $\pm ib_m$，即 $\lambda_m = -ib_m$，$\lambda_{m+k} = ib_m$，而 $\lambda_m = -ib_m$、$\lambda_{m+k} = ib_m$ 对应的级数项都需计算。

设 N_k 为 m 在 [1，M] 之间时式（6－17）中所得纯虚数根的个数，M_1 为 m 在 [1，M] 之间时式（6－17）中所得 $a_m - ib_m$ 虚数根的个数（或 M_1 为 m 在 [1，M] 之间时式（6－17）中所得 $-a_m - ib_m$ 虚数根的个数），这样可得 $M_1 = 0.5(M - N_k)$。将 m 在 [1，M] 之间的特征根按 M_1 个 $\lambda_m(\lambda_m = a_m - ib_m, m = 1,2,\cdots,M_1)$，$N_k$ 个纯虚数根 $ib_j(j = 1,2,\cdots,N_k)$，M_1 个 $\lambda_k(\lambda_k = -a_{M-(k-1)} - ib_{M-(k-1)}, k = M_1 + N_k + 1, M_1 + N_k + 2, \cdots, M)$ 排序，并根据多项式 $Z_{mr}(r), Z_{mi}(r)$ 关于 m 的奇偶性，可将式（6－19）写为

$$
\begin{aligned}
T = {} & \sum_{m=1}^{M_1} e^{-b_m z} \{A_{m,0,r}[Z_{mr}(r)\cos(za_m) - Z_{mi}(r)\sin(za_m)] - A_{m,0,i}[Z_{mr}(r)\sin(za_m) + Z_{mi}(r)\cos(za_m)]\} + \\
& \sum_{m=1}^{M_1} e^{b_m z} \{B_{m,0,r}[Z_{mr}(r)\cos(za_m) + Z_{mi}(r)\sin(za_m)] - B_{m,0,i}[Z_{mr}(r)\sin(za_m) - Z_{mi}(r)\cos(za_m)]\} + \\
& \sum_{m=M_1+1}^{M_1+N_k} [e^{-b_m z} C_{m,0,r} Z_{mr}(r) + e^{b_m z} D_{m,0,r} Z_{mr}(r)] + T_0
\end{aligned}
\tag{6-23}
$$

其中 $A_{m,0,r}, A_{m,0,i}, B_{m,0,r}, B_{m,0,i}$ 为待定实数常数。上式有 $4M_1 + 2N_k$ 个未知数，注意到 $M = 2M_1 + N_k$，式（6－23）具有 $2M$ 个未知数。将式（6－23）代入柱体 $z=0$ 和 $z=L$ 的两个边界条件，可以形成两个方程，将 2 个边界条件方程左右两端各展开为 r 的泰勒级数 [$f(r) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(r_1)}{j!}(r - r_1)^j$，最大阶数 j 取为 $M-1$]，分别对比 r 的前端系数即可形成 $2M$ 个方程，可求解 $2M$ 个未知数，此数学物理问题得解。

3）校核解析解的收敛性

针对各向异性实心圆柱体进行数值计算。计算此圆柱体在 $r = 0.5$ m，$z = 0.5$ m 的温度值 $T(0.5,0.5)$(℃) 与 M 变化趋势，以检验所得级数解的收敛性。

表 6－3　$T(0.5,0.5)$(℃)，$\beta = 45°$

M	4	6	8	10	20	30	38
$T(0.5,0.5)$	0.5514	0.4916	0.4750	0.4721	0.4718	0.4718	0.4718

表 6-4 $T(0.5,0.5)$(℃)，$\beta = 60^\circ$

M	4	6	8	10	20	30	38
$T(0.5,0.5$	0.5779	0.5207	0.5026	0.4988	0.4983	0.4983	0.4983

表 6-3 和表 6-4 表明所得级数解收敛稳定。计算表明：不同的计算参数所需计算项数 M 是不同的，需具体计算确定。

4）各向异性圆柱体稳态温度场分析

首先校核级数解对边界条件的符合情况。同样变化各向异性角 β，观察温度场变化情况。$M = 30$。坐标 z 和 r 的单位是 m。

表 6-5 $T(r,z)$(℃)，$\beta = 30^\circ$

z \ r	0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	.0000
0.2	0.2701	0.2249	0.1665	0.1340	0.1008	0.0393	.0000
0.4	0.5856	0.4926	0.3733	0.3058	0.2351	0.0976	.0000
0.5	0.7717	0.6540	0.5038	0.4177	0.3262	0.1414	.0000
0.6	0.9802	0.8378	0.6577	0.5529	0.4394	0.2003	.0000
0.8	1.4610	1.2760	1.0450	0.9062	0.7492	0.3834	.0000
1.0	2.0000	1.7920	1.5360	1.3750	1.1840	0.6880	.0000

表 6-6 $T(r,z)$ (℃)，$\beta = 45^\circ$

z \ r	0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2	0.3080	0.2587	0.1961	0.1608	0.1239	0.0519	0.0000
0.4	0.6494	0.5501	0.4253	0.3538	0.2776	0.1225	0.0000
0.5	0.8404	0.7166	0.5616	0.4718	0.3749	0.1715	0.0000
0.6	1.0470	0.8996	0.7161	0.6085	0.4905	0.2338	0.0000
0.8	1.5040	0.8996	1.0860	0.9465	0.7878	0.4123	0.0000
1.0	2.0000	1.7920	1.5360	1.3750	1.1840	0.6880	0.0000

表 6-7 $T(r,z)$(℃)，$\beta = 60^\circ$

z \ r	0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2	0.3268	0.2762	0.2115	0.1744	0.1351	0.0571	0.0000
0.4	0.6804	0.5797	0.4518	0.3775	0.2975	0.1318	0.0000
0.5	0.8735	0.7486	0.5908	0.4983	0.3973	0.1822	0.0000
0.6	1.0790	0.9311	0.7455	0.6355	0.5138	0.2453	0.0000
0.8	1.5250	1.3380	1.1070	0.9665	0.8059	0.4225	0.0000
1.0	2.0000	1.7920	1.5360	1.3750	1.1840	0.6880	0.0000

观察表 6-5～表 6-7，可以得出如下结论：$C_r(r,z)$ 级数解收敛性很好，边界条件满足很好；各向异性对温度场影响不容忽略。

（3）对应 $\lambda_m(\lambda_m = a_m - ib_m)$ 与 $\lambda_{m+1} = -a_m - ib_m$ 的有关复数级数解实数化

对应特征根 $\lambda_m = a_m + ib_m$ 的 $Z_r(r,z)$ 级数项如下

$$\begin{aligned} T_m = {} & e^{-b_m z}\{A_{m,0,r}[Z_{mr}(r)\cos(za_m) - Z_{mi}(r)\sin(za_m)] - \\ & A_{m,0,i}[Z_{mr}(r)\sin(za_m) + Z_{mi}(r)\cos(za_m)]\} + \\ & ie^{-b_m z}\{A_{m,0,r}[Z_{mr}(r)\sin(za_m) + Z_{mi}(r)\cos(za_m)] + \\ & A_{m,0,i}[Z_{mr}(r)\cos(za_m) - Z_{mi}(r)\sin(za_m)]\} \end{aligned} \tag{6-24}$$

对应特征根 $\lambda_l = -a_m + ib_m$ 的 $Z_r(r,z)$ 级数项如下

$$\begin{aligned} T_l = {} & e^{-b_m z}\{A_{l,0,r}[Z_{lr}(r)\cos(za_m) - Z_{li}(r)\sin(za_m)] - \\ & A_{l,0,i}[Z_{lr}(r)\sin(za_m) + Z_{li}(r)\cos(za_m)]\} + \\ & ie^{-b_m z}\{A_{l,0,r}[Z_{lr}(r)\sin(za_m) + Z_{li}(r)\cos(za_m)] + \\ & A_{l,0,i}[Z_{lr}(r)\cos(za_m) - Z_{li}(r)\sin(za_m)]\} \end{aligned} \tag{6-25}$$

计算可得

$$\begin{aligned} Z_{lr}(r) &= Z_{mr}(r) \\ Z_{li}(r) &= -Z_{mi}(r) \end{aligned} \tag{6-26}$$

根据式（6-24）和（6-25），可得

$$T_m + T_l = \mathrm{Re}(T_m + T_l) + i\mathrm{Im}(T_m + T_l) \tag{6-27}$$

根据式（6-26），由 $\mathrm{Im}(T_m + T_l) = 0$ 可得

$$\begin{aligned} A_{l,0,r} &= A_{m,0,r} \\ A_{m,0,i} &= -A_{l,0,i} \end{aligned} \tag{6-28}$$

将式（6-28）代入式（6-27），可得

$$\begin{aligned} T_m + T_l = {} & \mathrm{Re}(T_m + T_l) = \\ & 2e^{-b_m z}\{A_{m,0,r}[Z_{mr}(r)\cos(za_m) - Z_{mi}(r)\sin(za_m)] - \\ & A_{m,0,i}[Z_{mr}(r)\sin(za_m) + Z_{mi}(r)\cos(za_m)]\} \end{aligned} \tag{6-29}$$

6.3　柱侧面具有第二类边界条件的各向异性实心柱体热传导解

对于侧面具有第二类边界条件（绝热）的实心柱体热传导问题，可得边界条件

$$q_r = -\left(k_{11}\frac{\partial T}{\partial r} + k_{13}\frac{\partial T}{\partial z}\right) = 0 \tag{6-30}$$

和自然条件 $T(0,z)$ 为有限值。

将 $T(0,z)$ 为有限值的自然条件，代入式（6-12）可得

$$B_{m,0} = 0, c_0 = 0 \tag{6-31}$$

这样式（6-12）变为

$$T = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_m z} A_{m,0}[iC_r^{(1)}(r\lambda_m) + C_r^{(2)}(r\lambda_m)] \tag{6-32}$$

定义 $x = R\lambda_m$。将式（6－32）代入式（6－30），可得特征方程

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}(k_{11}z_{m,1}+k_{13})+x(2k_{11}z_{m,2}-k_{13}z_{m,1})+\mathrm{i}(3k_{11}z_{m,3}+k_{13}z_{m,2})x^2+\cdots+\\&x^{2k-1}(2kk_{11}z_{m,2k}-k_{13}z_{m,2k-1})+\mathrm{i}x^{2k}[(2k+1)k_{11}z_{m,2k+1}+k_{13}z_{m,2k}]+\cdots=0\end{aligned} \tag{6-33}$$

求解式（6－33）可得特征根 $x_m=\mu_m$，$\mu_m=a_m+\mathrm{i}b_m$。代入式（6－19），可得第二类边界条件的各向异性实心圆柱稳态热传导方程解

$$\begin{aligned}T=&\\&\sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty}\mathrm{e}^{-b_m z}\{A_{m,0,r}[Z_{mr}(r)\cos(za_m)-Z_{mi}(r)\sin(za_m)]-A_{m,0,i}[Z_{mr}(r)\sin(za_m)+Z_{mi}(r)\cos(za_m)]\}+\\&\mathrm{i}\sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty}\mathrm{e}^{-b_m z}\{A_{m,0,r}[Z_{mr}(r)\sin(za_m)+Z_{mi}(r)\cos(za_m)]+A_{m,0,i}[Z_{mr}(r)\cos(za_m)-Z_{mi}(r)\sin(za_m)]\}+\\&d_0+d_1\left(z-\frac{k_{13}}{k_{11}}r\right)+T_0\end{aligned} \tag{6-34}$$

式（6－34）是一复数级数解。根据数学物理实数化原理可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(T)=&\\&\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-b_m z}\{A_{m,0,r}[Z_{mr}(r)\cos(za_m)+Z_{mi}(r)\sin(za_m)]+A_{m,0,i}[Z_{mr}(r)\sin(za_m)-Z_{mi}(r)\cos(za_m)]\}=0\end{aligned} \tag{6-35}$$

实际计算中，式（6－34）中 m 不可能取无限大，设 m 取值在$[-M,M]$之间，这样式（6－35）共有 $4M+2$ 个未知数（$A_{m,0,r}, A_{m,0,i}, m=\pm1,\pm2,\cdots,\pm M$）和 d_0, d_1，根据式（6－34）可以消减 $2M$ 个未知数。将式（6－34）代入柱体 $z=0$ 和 $z=L$ 两个边界条件，可以形成两个方程，将边界条件方程左右两端各展开为 r 的泰勒级数 $\left[f(r)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f^{(j)}(r_1)}{j!}(r-r_1)^j\right.$，$r$ 最大阶数取为 M]，分别对比两个边界条件方程中 r 的前端系数，即可形成 $2M+2$ 个方程，可求解 $2M+2$ 个未知数，问题得解。

6.4 柱侧面具有第三类边界条件的各向异性实心柱体热传导解

第三类边界条件（边界热对流）为

$$\left[-\left(k_{11}\frac{\partial T}{\partial r}+k_{13}\frac{\partial T}{\partial z}\right)+h_m T\right]\Big|_{r=R}=0 \tag{6-36}$$

和自然条件 $T(0,z)$ 为有限值。h_m 为柱体与外界的对流系数。

将 $T(0,z)$ 为有限值的自然条件，代入式（6－12）可得

$$B_{m,0}=0, c_0=0 \tag{6-37}$$

定义 $x=R\lambda_m$。将式（6－12）代入式（6－36），化简可得特征方程

$$\begin{aligned}&-h_m+\mathrm{i}(k_{11}z_{m,1}+k_{13})+x(2k_{11}z_{m,2}-k_{13}z_{m,1}-\mathrm{i}hz_{m,1})+x^2[\mathrm{i}(3k_{11}z_{m,3}+k_{13}z_{m,2})-hz_{m,2}]+\cdots+\\&x^{2k-1}[(2kk_{11}z_{m,2k}-k_{13}z_{m,2k-1})-h\mathrm{i}z_{m,2k-1}]+x^{2k}\{\mathrm{i}[(2k+1)k_{11}z_{m,2k+1}+k_{13}z_{m,2k}]-hz_{m,2k}\}+\cdots=0\end{aligned} \tag{6-38}$$

求解方程（6-38）可得特征根 $x_m = \mu_m$，$\mu_m = a_m + ib_m$，代入式（6-12）可得第三类边界条件的实心圆柱方程解

$$T = \sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty} e^{-b_m z}\{A_{m,0,r}[Z_{mr}(r)\cos(za_m) - Z_{mi}(r)\sin(za_m)] - A_{m,0,i}[Z_{mr}(r)\sin(za_m) + Z_{mi}(r)\cos(za_m)]]\} + \mathrm{i}\sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty} e^{-b_m z}\{A_{m,0,r}[Z_{mr}(r)\sin(za_m) + Z_{mi}(r)\cos(za_m)] + A_{m,0,i}[Z_{mr}(r)\cos(za_m) - Z_{mi}(r)\sin(za_m)]\} + T_0 \tag{6-39}$$

式（6-39）是一复数级数解。根据数学物理实数化原理可得

$$\mathrm{Im}(T) = \sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty} e^{-b_m z}\{A_{m,0,r}[Z_{mr}(r)\sin(za_m) + Z_{mi}(r)\cos(za_m)] + A_{m,0,i}[Z_{mr}(r)\cos(za_m) - Z_{mi}(r)\sin(za_m)]\} = 0 \tag{6-40}$$

实际计算中，式（6-39）中 m 不可能取无限大，设 m 取值在在 $[-M, M]$ 之间，这样式（6-39）共有 $4M$ 个未知数 $[A_{m,0,r}, A_{m,0,i}(m = \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm M)]$，根据式（6-40）可以消减 $2M$ 个未知数。将式（6-39）代入柱体 $z=0$ 和 $z=L$ 两个边界条件，可以形成两个方程，将边界条件方程左右两端各展开为 r 的泰勒级数 $[f(r) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(r_1)}{j!}(r-r_1)^j$，$r$ 阶数取为 $M-1]$，对比 r 的前端系数即可形成 $2M$ 方程，可求解 $2M$ 个未知数，问题得解。

6.5　柱侧面具有第一类边界条件的各向异性空心柱体热传导解

对于侧面具有第一类边界条件的空心柱体热传导问题边界条件为

$$\begin{cases} T(r_1, z) = 0 \\ T(r_2, z) = 0 \end{cases} \tag{6-41}$$

将式（6-12）代入式（6-41），根据待定系数 $A_{m,0}, B_{m,0}$ 不全为 0 的条件，可得特征矩阵

$$\begin{vmatrix} [\mathrm{i}C_r^{(1)}(r_1\lambda_m) + C_r^{(2)}(r_1\lambda_m)] & [\mathrm{i}C_r^{(1)}(r_1\lambda_m) + C_r^{(2)}(r_1\lambda_m)]\ln(r_1) + \mathrm{i}D_r^{(1)}(r_1\lambda_m) + D_r^{(2)}(r_1\lambda_m) \\ [\mathrm{i}C_r^{(1)}(r_2\lambda_m) + C_r^{(2)}(r_2\lambda_m)] & [\mathrm{i}C_r^{(1)}(r_2\lambda_m) + C_r^{(2)}(r_2\lambda_m)]\ln(r_2) + \mathrm{i}D_r^{(1)}(r_2\lambda_m) + D_r^{(2)}(r_2\lambda_m) \end{vmatrix} = 0 \tag{6-42}$$

求解式（6-42）可以确定特征值 λ_m，代入式（6-12）可得

$$T = \sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty} e^{\mathrm{i}\lambda_m z} A_{m,0}[\mathrm{i}C_r^{(1)}(r\lambda_m) + C_r^{(2)}(r\lambda_m)] + \sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty} e^{\mathrm{i}\lambda_m z} B_{m,0}\{[\mathrm{i}C_r^{(1)}(r\lambda_m) + C_r^{(2)}(r\lambda_m)]\ln r\} + \sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty} e^{\mathrm{i}\lambda_m z} B_{m,0}\{[\mathrm{i}D_r^{(1)}(r\lambda_m) + D_r^{(2)}(r\lambda_m)]\} + T_0 \tag{6-43}$$

式（6-41）是一复数级数解。根据数学物理实数化原理可得

$$\mathrm{Im}(T)=0 \tag{6-44}$$

根据式（6-42），可得

$$B_{m,0}=-A_{m,0}\frac{[\mathrm{i}C_r^{(1)}(r_1\lambda_m)+C_r^{(2)}(r_1\lambda_m)]}{[\mathrm{i}C_r^{(1)}(r_1\lambda_m)+C_r^{(2)}(r_1\lambda_m)]\ln(r_1)+\mathrm{i}D_r^{(1)}(r_1\lambda_m)+D_r^{(2)}(r_1\lambda_m)} \tag{6-45}$$

这样可得

$$T=\sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_m z}A_{m,0}\Big\{[\mathrm{i}C_r^{(1)}(r\lambda_m)+C_r^{(2)}(r\lambda_m)]-\frac{[\mathrm{i}C_r^{(1)}(r_1\lambda_m)+C_r^{(2)}(r_1\lambda_m)][[\mathrm{i}C_r^{(1)}(r\lambda_m)+C_r^{(2)}(r\lambda_m)]\ln(r)+\mathrm{i}D_r^{(1)}(r\lambda_m)+D_r^{(2)}(r\lambda_m)]}{[\mathrm{i}C_r^{(1)}(r_1\lambda_m)+C_r^{(2)}(r_1\lambda_m)]\ln(r_1)+\mathrm{i}D_r^{(1)}(r_1\lambda_m)+D_r^{(2)}(r_1\lambda_m)}\Big\}+T_0 \tag{6-46}$$

实际计算中，式（6-46）中 m 不可能取无限大，设 m 取值在在［$-M$，M］之间，这样式（6-46）共有 $4M$ 个未知数 $[(A_{m,0,r},A_{m,0,i},m=\pm 1,\pm 2,\cdots,\pm M)]$。根据 $\mathrm{Im}(T)=0$ 可以消减 $2M$ 个未知数。将式（6-46）代入柱体 $z=0$ 和 $z=L$ 两个边界条件，可以形成两个方程。将两个边界条件方程左右两端各展开为泰勒级数 $\left[f(r)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f^{(j)}(r_1)}{j!}(r-r_1)^j\right.$，最大阶数 j 取为 M，对于此类边界条件，下标 j 从 1 开始计算，即 $\left.f(r)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{f^{(j)}(r_1)}{j!}(r-r_1)^j\right]$。由此，分别对比两个边界条件方程左右两边的 $(r-r_1)$ 前端系数即可形成 $2M$ 个方程，可求解 $2M$ 个未知数，问题得解。

6.6 柱侧面具有第二类边界条件的各向异性空心柱体热传导解

对于内外径都是第二类边界条件的空心圆柱采取类似的方法可建立特征矩阵和特征方程，求出特征值 λ_m 和 $B_{m,0},A_{m,0}$ 之间关系式

$$B_{m,0}=-A_{m,0}H(r_1,r_2,\lambda_m) \tag{6-47}$$

其中 $H(r_1,r_2,\lambda_m)$ 形式略。

将式（6-47）代入（6-12）可得

$$T=\sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_m z}A_{m,0}\Big([\mathrm{i}C_r^{(1)}(r\lambda_m)+C_r^{(2)}(r\lambda_m)]-H(r_1,r_2,\lambda_m)\{[\mathrm{i}C_r^{(1)}(r\lambda_m)+C_r^{(2)}(r\lambda_m)]\ln(r)+\mathrm{i}D_r^{(1)}(r\lambda_m)+D_r^{(2)}(r\lambda_m)\}\Big)+d_0+d_1\Big(z-\frac{k_{13}}{k_{11}}r\Big)+T_0 \tag{6-48}$$

实际计算中，式（6-48）中 m 不可能取无限大，设 m 取值在［$-M$，M］之间，这样式（6-48）共有 $4M+2$ 个未知数 $[(A_{m,0,r},A_{m,0,i},m=\pm 1,\pm 2,\cdots,\pm M),d_0,d_1]$。根据

$\mathrm{Im}(T)=0$ 可以消减 $2M$ 个未知数。将式（6－48）代入柱体 $z=0$ 和 $z=L$ 两个边界条件，可以形成两个方程。将两个边界条件方程左右两端各展开为泰勒级数 $\left[f(r)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f^{(j)}(r_1)}{j!}(r-r_1)^j\right.$，最大阶数 j 取为 $M]$。由此，分别对比两个边界条件方程左右两边的 $(r-r_1)$ 前端系数即可形成 $2M+2$ 个方程，可求解 $2M+2$ 个未知数，问题得解。

6.7 侧面具有第三类边界条件的各向异性空心柱体热传导解

对于内外径都是第三类边界条件的空心圆柱采取类似的方法可建立特征矩阵和特征方程，求出特征值 λ_m 和 $B_{m,0}$，$A_{m,0}$ 之间关系式

$$B_{m,0}=-A_{m,0}S(r_1,r_2,\lambda_m) \tag{6-49}$$

其中 $S(r_1,r_2,\lambda_m)$ 形式略。

将式（6－49）代入式（6－12）可得

$$\begin{aligned}T=&\sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_m z}A_{m,0}\left([\mathrm{i}C_r^{(1)}(r\lambda_m)+C_r^{(2)}(r\lambda_m)]-S(r_1,r_2,\lambda_m)\{[\mathrm{i}C_r^{(1)}(r\lambda_m)+C_r^{(2)}(r\lambda_m)]\ln(r)\right.\\&\left.+\mathrm{i}D_r^{(1)}(r\lambda_m)+D_r^{(2)}(r\lambda_m)\}\right)+T_0\end{aligned} \tag{6-50}$$

实际计算中，式（6－50）中 m 不可能取无限大，设 m 取值在在 $[-M, M]$ 之间，这样式（6－50）共有 $4M$ 个未知数 $[(A_{m,0,r},A_{m,0,i},m=\pm1,\pm2,\cdots,\pm M)]$，根据 $\mathrm{Im}(T)=0$ 可以消减 $2M$ 个未知数。将式（6－50）代入柱体 $z=0$ 和 $z=L$ 两个边界条件，可以形成两个方程。将边界条件方程左右两端各展开为泰勒级数 $\left[f(r)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f^{(j)}(r_1)}{j!}(r-r_1)^j\right.$，最大阶数 j 取为 $M-1]$。由此，分别对比左右两边的 $(r-r_1)$ 前端系数即可形成 $2M$ 个方程，可求解 $2M$ 个未知数，问题得解。

6.8 各向同性圆柱体稳态热传导方程中心轴对称问题解

考虑实心各向同性圆柱体，半径为 R，高度为 L，柱体内温度场与极角 θ 无关，也就是具备中心轴对称特征。在柱坐标系下，稳态温度场控制方程和边界条件设为

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial T}{\partial r}\right)+\dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0\\ T|_{r=R}=0\\ T|_{z=0}=0\\ T|_{z=L}=f(r)\end{cases} \tag{6-51}$$

采用分离变量法，令 $T=R(r)Z(z)$，代入上式，分离变量得

$$\frac{R''+\frac{R'}{r}}{R}=-\frac{Z''}{Z}=-\lambda \tag{6-52}$$

由此可得

$$\begin{cases} Z''-\lambda Z=0 \\ r^2R''+rR'+\lambda r^2R=0 \end{cases} \tag{6-53}$$

求解可得

$$R(r)=C\,\mathrm{J}_0(r\sqrt{\lambda})+D\,\mathrm{Y}_0(r\sqrt{\lambda}) \tag{6-54}$$

根据中心轴温度值有限的自然条件，可得 $D=0$

这样可得

$$R(r)=C\,\mathrm{J}_0(r\sqrt{\lambda}) \tag{6-55}$$

将上式代入侧面边界条件，可得特征值和特征函数

$$\begin{cases} \lambda_m=\left(\frac{\mu_m^0}{R}\right)^2 \\ R_m(r)=J_0\left(r\frac{\mu_m^0}{R}\right) \end{cases} \tag{6-56}$$

其中 $m=1, 2, 3, \cdots$，μ_m^0 为 $J_0(x)$ 的正零点。将 μ_m^0 代入，可得 T 的一般解形式

$$T=\sum_{m=1}^{\infty}\left(C_m e^{\frac{\mu_m^0}{R}z}+D_m e^{-\frac{\mu_m^0}{R}z}\right)J_0\left(\frac{\mu_m^0}{R}r\right) \tag{6-57}$$

将上式代入 $z=0$ 和 $z=L$ 的边界条件，利用贝塞尔函数的正交性可以确定待定常数 C_m, D_m。问题得解。

从以上各部分对比来看，各向异性的存在使得各向异性热传导方程求解的难度大幅度提升。经过一个时期的发展完善，经典贝塞尔函数方法显得简洁优美。复数中心轴对称柱函数要显得复杂一些。

第7章　三维各向异性圆柱稳态热传导方程——系列变形复数柱多项式和复数函数

三维圆柱体稳态温度场计算是一个经典三维数学物理边值问题。即使对于各向同性三维圆柱体，其温度场边值问题求解也非易事。三维圆柱体是工程中经常遇到的结构，其物理场的分析计算意义较大。在第5章复数柱多项式函数基础上，本章研究三维各向异性圆柱体温度场边值问题，提出了三维柱体边值问题求解方法，给出一般解析解，进行了数值计算验证解析解的收敛性和稳定性，并初步计算分析了各向异性温度场的特性。在本章相应物理问题的求解过程中，作者提出了变形复数柱函数并研究了其特性。

7.1　柱坐标下的三维各向异性圆柱体稳态温度场偏微分方程

考虑曲线型各向异性圆柱，圆柱半径为 R，圆柱体高度为 h，在圆柱边界与外界进行热交换，这样圆柱体温度场分布与 (r,θ,z) 有关。柱坐标下稳态热传导控制偏微分方程为

$$\begin{aligned}&k_{11}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+2k_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 T}{\partial r\partial\theta}+k_{22}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2}+\\&k_{33}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+2k_{13}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 T}{\partial r\partial z}+k_{13}\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial z}+2k_{23}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta\partial z}+q=0\end{aligned}\tag{7-1}$$

其中 $T(r,\theta,z)$ 为柱体温度分布函数，q 是热源函数。$k_{jk}(j,k=1,2,3)$ 中的下标1为径向 r 方向，下标2代表切向 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 方向，下标3代表 z（$0\leqslant z\leqslant h$）方向，$k_{jk}(j,k=1,2,3)$ 为热传导系数。三维各向异性圆柱体可以看作是增强纤维缠绕形成的三维柱体，可以有多种铺设缠绕方式，并在物理学上呈现出不同的各向异性特性，在数学上就表现出不同的数学物理方程。本章计算中考虑柱体4种铺设模式：第一种铺设模式（A型铺设）：$k_{13}=0,k_{23}=0,k_{12}\neq 0$，柱体横截面内（$z$=常数）纤维沿 r 径向等角缠绕，纵向叠加形成三维圆柱体，类似无限多同样铺设的薄圆板上下叠加成柱体，此种圆柱体定义为 A 型各向异性圆柱体；第二种铺设模式（B型铺设）：$k_{12}=0,k_{13}=0,k_{23}\neq 0$，同心柱面（$r$=常数）纤维沿 z 方向母线等角缠绕，无限多的薄柱面同心叠加形成三维圆柱体，类似无限多薄圆柱壳同心叠套，此种圆柱体定义为 B 型各向异性圆柱体；第三种铺设模式（C型铺设）：$k_{12}=0,k_{13}\neq 0,k_{23}=0$，经过中心 z 轴的纵向截面（θ=常数）内一边纤维与 z 轴呈等角铺设并旋转生成三维圆柱体，此种圆柱体定义为 C 型各向异性圆柱体；第四种是任意铺设的圆柱体（G型铺设），$k_{13}\neq 0,k_{23}\neq 0,k_{12}\neq 0$，此种圆柱体定义为一般各向异性圆柱体。

实心圆柱边界包括外侧面边界和上下边界，对于空心圆柱体还包括内侧面边界。温度场边界条件分为第一、二、三类边界条件，在热传导计算中第一类边界条件为边界给定温

度值，第二类边界条件为边界热绝缘，第三类边界条件为给定热对流，此外，对于实心圆柱体还有 $r=0$ 处温度为有限值。实际计算中边界条件为三种边界条件在侧面和上下面的组合，具体计算可分别确定。

假设圆柱内没有热源，即 $q=0$。对于有热源问题，可以推导得到对应热源函数 q 的热传导偏微分方程特解，将特解代入后面求得的一般解析解一并求解即可。

引入参数变换

$$K_{11}=1, K_{12}=\frac{k_{12}}{k_{11}}, K_{22}=\frac{k_{22}}{k_{11}}, K_{33}=\frac{k_{33}}{k_{11}}, K_{23}=\frac{k_{23}}{k_{11}}, K_{13}=\frac{k_{13}}{k_{11}}, q^{*}=\frac{q}{k_{11}} \tag{7-2}$$

方程（7-1）可变换为

$$\begin{gathered}K_{11}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+2K_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 T}{\partial r\partial\theta}+K_{22}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2}+\\K_{33}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+2K_{13}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 T}{\partial r\partial z}+K_{13}\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial z}+2K_{23}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta\partial z}+q^{*}=0\end{gathered} \tag{7-3}$$

下面求解三维圆柱体各向异性热传导方程稳态问题解析解。

7.2 变形 Z_{ip} 方程，变形复数柱多项式和变形复数柱函数及 A 型各向异性柱体热传导解析解

A 型各向异性圆柱体热传导系数计算如下

$$\begin{cases}k_{11}=k_1\cos^2\beta+k_2\sin^2\beta\\k_{12}=(k_1-k_2)\sin\beta\cos\beta\\k_{22}=k_1\sin^2\beta+k_2\cos^2\beta\\k_{13}=0\\k_{23}=0\\k_{33}=k_3\end{cases} \tag{7-4}$$

其中 k_1、k_2、k_3 为 r 方向、切向 θ 方向、z 方向主热传导系数，β 为垂直于 z 轴平面（r,θ）内的最大热传导轴方向与径向 r 的夹角。

由此，方程（7-3）简化为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+2K_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 T}{\partial r\partial\theta}+K_{22}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2}+K_{33}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+q^{*}=0 \tag{7-5}$$

设

$$T=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\theta}Z_n(r,z) \tag{7-6}$$

其中 n 为整数。

当 $n=0$，将式（7-6）代入方程（7-5），可得

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial Z_0}{\partial r}\right)+K_{33}\frac{\partial^2 Z_0}{\partial z^2}+q^{*}=0$$

采用常规贝塞尔函数和分离变量法可得解为

$$Z_0(r,z) = \sum_{j=1}^{\infty}[A\,e^{-\sqrt{\lambda}z} + B\,e^{\sqrt{\lambda}z}][CJ_0(\sqrt{\lambda K_{33}}r) + DY_0(\sqrt{\lambda K_{33}}r)] + c_0 + d_0\ln r \tag{7-7}$$

其中 A，B，C，D 为实数待定常数；$J_0(x)$,$Y_0(x)$ 分别为 0 阶第一类，第二类贝塞尔函数。

当 $n\neq 0$，设 $Z_n(r,z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{i\lambda jz} f_n(r)$ 。

记 $\lambda_n^{(j)} = j\lambda$，式（7-6）可改写为

$$T = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_n^{(j)}z} e^{in\theta} f_n(r) \tag{7-8}$$

将式（7-8）代入方程（7-5），可得

$$r^2\frac{d^2 f_n}{dr^2} + r\frac{df_n}{dr}(1+2K_{12}in) + f_n[-K_{33}(\lambda_n^{(j)}r)^2 - K_{22}n^2] = 0 \tag{7-9}$$

方程（7-9）是一新复数方程。引入参数变换

$$x = r\lambda_n^{(j)}\sqrt{K_{33}}$$

将方程（7-9）变换为

$$x^2\frac{d^2 f_n}{dx^2} + x\frac{df_n}{dx}(1+2K_{12}in) + f_n(-x^2 - K_{22}n^2) = 0 \tag{7-10}$$

考虑变形贝塞尔方程

$$z^2\frac{d^2 f}{dz^2} + z\frac{df}{dz} - f(x^2+\nu^2) = 0$$

方程（7-10）与变形贝塞尔方程结构有类似之处，对于各向同性或正交异性热传导问题，$K_{12}=0$，方程（7-10）退化为变形贝塞尔方程。

考虑 Z_{ip} 方程 $x^2\frac{d^2 f_n}{dx^2} + x\frac{df_n}{dx}(1+2K_{12}in) + f_n(x^2 - K_{22}n^2) = 0$，令 $z = xi$，方程（7-10）即转化为 Z_{ip} 方程。由此，称方程（7-10）为变形 Z_{ip} 方程。

设

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{n,k}x^{k+ip} \tag{7-11}$$

其中 k 整数，p 是特征根。$A_{n,k}$ 是复数常数，这有别于常规变形贝塞尔函数方法。实际计算中 k 最大取为 K。

采用第 5 章类似步骤求解，可得 $p_{l,n} = a_{l,n} + ib_{l,n}$

其中 $l = 1,2$

$$\begin{cases} a_{1,n} = -nK_{12} \\ b_{1,n} = n\sqrt{K_{22} - K_{12}^2} \\ a_{2,n} = -nK_{12} \\ b_{2,n} = -n\sqrt{K_{22} - K_{12}^2} \end{cases} \tag{7-12}$$

和递推公式

$$\begin{cases} A_{1,n,k+1} = A_{1,n,k-1} \dfrac{1}{(k+1)(k+1-2n\sqrt{K_{22}-K_{12}^2})} \\ A_{2,n,k+1} = A_{2,n,k-1} \dfrac{1}{(k+1)(k+1+2n\sqrt{K_{22}-K_{12}^2})} \end{cases} \tag{7-13}$$

注意上式为考虑 $p_{1,n}, p_{2,n}$ 不同，在待定常数 $A_{n,k}$ 引入新的下标 l。采用第 5 章求解思路，可以得到

$$f_{l,n}(x) = x^{\mathrm{i}a_{l,n}} I_{-b_{l,n}}(x) A_{l,n,0} \tag{7-14}$$

其中 $I_{-b_{l,n}}(x)$ 为 $-b_{l,n}$ 阶第一类变形贝塞尔函数，$I_p(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k!\Gamma(k+p+1)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k-p}$.

定义

$$\hat{Z}_{ip_{l,n}}(x) = x^{\mathrm{i}a_{l,n}} I_{-b_{l,n}}(x) \tag{7-15}$$

$\hat{Z}_{ip_{l,n}}(x)$ 称为变形复数柱多项式，$p_{l,n} = a_{l,n} + \mathrm{i}b_{l,n}$ ，也可写为 $\hat{Z}_{ip}(x)$ 。显然对于正交异性和各向同性问题，$a_{l,n} = 0$ ，变形复数柱多项式就退化为变形贝塞尔函数。但在各向异性情况，变形复数柱多项式 $\hat{Z}_{ip_{l,n}}(x)$ 是客观存在的特征函数，值得研究。相关研究结果在 7.3 节中介绍。

采用变形复数柱多项式 $\hat{Z}_{ip_{l,n}}(x)$ ，变形 Z_{ip} 方程解可写为

$$f_n(x) = A_{1,n,0} \hat{Z}_{ip_{1,n}}(x) + A_{2,n,0} \hat{Z}_{ip_{2,n}}(x)$$

式中 $A_{1,n,0}$ ，$A_{2,n,0}$ 为复数常数。由于 $\hat{Z}_{ip}(x)$ 为复数函数，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ 也是复数函数，在许多情况下 $\hat{Z}_{ip}(x)$ 和 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ 是互相耦合，由此下面给出一个新的复数函数——第一类变形复数柱函数 $\hat{Z}_{ip}(x,\theta)$

$$\hat{Z}_{ip}(x,\theta) = \hat{Z}_{ip}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$$

综合式（7 - 6）（7 - 11）（7 - 14）和（7 - 15），可得

$$\begin{aligned} T &= \sum_{l=1}^{2} \sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty} \sum_{j=-\infty,j\neq 0}^{\infty} A_{l,n,j,0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} e^{\mathrm{i}\lambda_{l,n}^{(j)} z} \hat{Z}_{ip_{l,n}}(x) + C(r,\theta) + Z_0(r,z) \\ &= \sum_{l=1}^{2} \sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty} \sum_{j=-\infty,j\neq 0}^{\infty} A_{l,n,j,0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} e^{\mathrm{i}\lambda_{l,n}^{(j)} z} x^{\mathrm{i}a_{l,n}} \mathrm{I}_{-b_{l,n}}(x) + C(r,\theta) + Z_0(r,z) \end{aligned} \tag{7-16}$$

其中 $C(r,\theta)$ 见第五章 5.2 节定义。

将式（7 - 16）代入圆柱体侧面边界条件，即可确定特征根 λ 。

7.2.1 柱侧面具有第一类边界条件的 A 型各向异性实心圆柱体热传导

（1）解析求解

实心 A 型各向异性圆柱体侧面具有第一类边界条件

$$r = R, T(R,\theta,z) = 0 \tag{7-17a}$$

$$r = 0, T(0,\theta,z) \text{ 有限} \tag{7-17b}$$

考虑式（7－12）和（7－17b），当 $n>0$，式（7－16）只能选 $l=2$，这样可得

$$T = \sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=-\infty,j\neq 0}^{\infty} A_{l,n,j,0}\mathrm{e}^{in\theta}e^{i\lambda_{l,n}^{(j)}z}\hat{Z}_{ip_{l,n}}(x) + C(r,\theta) + Z_0(r,z) \tag{7-18}$$

将式（7－18）代入式（7－17a），可得

$$\hat{Z}_{ip_{2,n}}(x) = 0 \tag{7-19a}$$

和

$$I_{-b_{2,n}}(x) = 0 \tag{7-19b}$$

求解 $\hat{Z}_{ip_{2,n}}(x) = 0$ 可得零点 $\mu_{l,n,j}^{0}$，上标 j 标记第 j 个特征根。根据变形贝塞尔函数原理分析，计算表明式（7－19a）的根 $\mu_{l,n,j}^{0}$ 有纯虚数根［针对边界条件（7－17a），$\mu_{l,n}^{(j)} = \mathrm{i}d_{l,n}^{(j)}$，$d_{l,n}^{(j)}$ 为实数，并且关于 0 点对称分布，$d_{l,n}^{(j)} = \pm s_{l,n}^{(j)}, s_{l,n}^{(j)} > 0$］和对偶虚数根［$\pm c_{l,n}^{(j)} \pm \mathrm{i}d_{l,n}^{(j)}$，$c_{l,n}^{(j)}$ 和 $d_{l,n}^{(j)}$ 为实数］。计算只取为纯虚数根的 $\mu_{l,n,j}^{0}$。

$$\lambda_{l,n}^{(j)} = \frac{\mu_{l,n,j}^{0}}{R\sqrt{K_{33}}}$$

由此可得

$$T = \sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=-\infty,j\neq 0}^{\infty} A_{l,n,j,0}\mathrm{e}^{in\theta}e^{i\frac{\mu_{l,n,j}^{0}}{R\sqrt{K_{33}}}z}\left(\frac{r}{R}\mu_{l,n,j}^{0}\right)^{ia_{l,n}} I_{-b_{l,n}}\left(\frac{r}{R}\mu_{l,n,j}^{0}\right) + C(r,\theta) + Z_0(r,z) \tag{7-20}$$

式（7－20）也可改写为

$$T = \sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=-\infty,j\neq 0}^{\infty} A_{l,n,j,0}\mathrm{e}^{in\theta}e^{i\frac{\mu_{l,n,j}^{0}}{R\sqrt{K_{33}}}z}\hat{Z}_{ip_{l,n}}\left(\frac{r}{R}\mu_{l,n,j}^{0}\right) + C(r,\theta) + Z_0(r,z) \tag{7-21}$$

再考虑 $n=0$ 的柱中心轴对称解（7－7）求解。考虑到式（7－17b），可得

$$D=0 \tag{7-22}$$

和

$$Z_0(r,z) = \sum_{j=1}^{\infty}(A\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}z} + B\,\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}z})J_0(\sqrt{\lambda K_{33}}\,r)$$

将上式代入侧面边界条件（7－17a）可得

$$J_0(R\sqrt{\lambda K_{33}}) = 0 \tag{7-23a}$$

其中 $x = R\sqrt{\lambda K_{33}}$。式（7－23）改写为

$$J_0(x) = 0 \tag{7-23b}$$

根据贝塞尔函数原理分析，式（7－23b）的根 μ_j^0 只取实数根（其中 μ_j^0 为正实数）。当 n 为无穷大，式（7－23）有无穷多个实数根 μ_j^0。

$$Z_0(r,z) = \sum_{j=1}^{\infty}(A_j\,\mathrm{e}^{\frac{\mu_j^0}{R\sqrt{K_{33}}}z} + B_j\,\mathrm{e}^{-\frac{\mu_j^0}{R\sqrt{K_{33}}}z})J_0\left(\frac{\mu_j^0}{R}r\right)$$

将上式改写为

$$Z_0(r,z)=\sum_{j=1}^{\infty}(A_j\,\mathrm{e}^{\frac{\mu_j^0}{R\sqrt{K_{33}}}z}+B_j\,\mathrm{e}^{-\frac{\mu_j^0}{R\sqrt{K_{33}}}z})J_0(\frac{\mu_j^0}{R}r) \tag{7-24}$$

结合式（7－21）和（7－24），可得

$$T=\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=-\infty,j\neq 0}^{\infty}A_{l,n,j,0}\mathrm{e}^{in\theta}\mathrm{e}^{-\frac{d_{l,n}^{(j)}}{R\sqrt{K_{33}}}z}[\mathrm{i}\frac{r}{R}d_{l,n}^{(j)}]^{\mathrm{i}a_{l,n}}I_{-b_{l,n}}(\frac{r}{R}\mu_{l,n,j}^0)+Z_0(r,z)+C(r,\theta) \tag{7-25a}$$

和

$$T=\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=-\infty,j\neq 0}^{\infty}A_{l,n,j,0}\mathrm{e}^{in\theta}\mathrm{e}^{-\frac{d_{l,n}^{(j)}}{R\sqrt{K_{33}}}z}e^{-\frac{a_{l,n}\pi}{2}}[\frac{r}{R}d_{l,n}^{(j)}]^{\mathrm{i}a_{l,n}}I_{-b_{l,n}}(\frac{r}{R}\mu_{l,n,j}^0)+Z_0(r,z)+C(r,\theta) \tag{7-25b}$$

其中 $C(r,\theta)$ 为式（7－8）中的 $j=0,n\neq 0$ 对应解，具体形式见第 5 章 5.2 节，可单独求解。考虑到 $A_{l,n,j,0}$，$\mathrm{e}^{in\theta}$ 和 $r^{\mathrm{i}a_{1,n}}$ 为虚数，$(\mathrm{i})^{\mathrm{i}a_{l,n}}=e^{-\frac{\pi a_{l,n}}{2}}$，可有

$$\begin{cases}A_{l,n,j,0}=A_{l,n,j,0,r}+\mathrm{i}A_{l,n,j,0,i}\\ \mathrm{e}^{in\theta}=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta\\ r^{\mathrm{i}a_{l,n}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}a_{l,n}\ln(r)}=\cos(a_{l,n}\ln r)+\mathrm{i}\sin(a_{l,n}\ln r)\end{cases} \tag{7-26}$$

根据式（7－26），由式（7－25b）可得

$$\begin{aligned}T=&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\{[B_{1,n,j}\sinh(\frac{s_{l,n}^{(j)}}{R\sqrt{K_{33}}}z)+B_{2,n,j}\cosh(\frac{s_{l,n}^{(j)}}{R\sqrt{K_{33}}}z)]I_{-b_{l,n}}(\frac{r}{R}\mu_{l,n,j}^0)\cos[n\theta+a_{l,n}\ln(\frac{r}{R}s_{l,n}^{(j)})]+\\&[B_{3,n,j}\sinh(\frac{s_{l,n}^{(j)}}{R\sqrt{K_{33}}}z)+B_{4,n,j}\cosh(\frac{s_{l,n}^{(j)}}{R\sqrt{K_{33}}}z)]I_{-b_{l,n}}(\frac{r}{R}\mu_{l,n,j}^0)\sin[n\theta+a_{l,n}\ln(\frac{r}{R}s_{l,n}^{(j)})]\}+\\&\sum_{j=1}^{\infty}(A_j\,\mathrm{e}^{\frac{\mu_j^0}{R\sqrt{K_{33}}}z}+B_j\,\mathrm{e}^{-\frac{\mu_j^0}{R\sqrt{K_{33}}}z})J_0(\frac{\mu_j^0}{R}r)+C(r,\theta)\end{aligned} \tag{7-27}$$

式中 $B_{1,n,j}$，$B_{2,n,j}$，$B_{3,n,j}$，$B_{4,n,j}$，A_j，B_j 为实数待定常数，$s_{l,n}^{(j)}>0$。根据对贝塞尔函数和特征根关于 n 奇偶性分析基础上，注意式（7－27）形式上取消了 n 为负值时的函数项。

当实际计算中，式（7－27）中 n 不可能取无限大，设 n 取值在［1，N］之间，对于一个 n，式（7－19a）有 N_j 纯虚数根 $\mathrm{i}s_{l,n}^{(j)}$（$s_{l,n}^{(j)}>0$）和 N_j 纯虚数根 $-\mathrm{i}s_{l,n}^{(j)}$（$s_{l,n}^{(j)}>0$）；式（7－23b）有 N_0 个正实数根 μ_j^0 和 N_0 个负实数根 $-\mu_j^0$。

这样，式（7－27）可写为

$$\begin{aligned}T=&\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_j}\{[B_{1,n,j}\sinh(\frac{s_{l,n}^{(j)}}{R\sqrt{K_{33}}}z)+B_{2,n,j}\cosh(\frac{s_{l,n}^{(j)}}{R\sqrt{K_{33}}}z)]I_{-b_{l,n}}(\frac{r}{R}\mu_{l,n,j}^0)\cos[n\theta+a_{l,n}\ln(\frac{r}{R}s_{l,n}^{(j)})]+\\&[B_{3,n,j}\sinh(\frac{s_{l,n}^{(j)}}{R\sqrt{K_{33}}}z)+B_{4,n,j}\cosh(\frac{s_{l,n}^{(j)}}{R\sqrt{K_{33}}}z)]I_{-b_{l,n}}(\frac{r}{R}\mu_{l,n,j}^0)\sin[n\theta+a_{l,n}\ln(\frac{r}{R}s_{l,n}^{(j)})]\}+\\&\sum_{j=1}^{N_0}(A_j\,\mathrm{e}^{\frac{\mu_j^0}{R\sqrt{K_{33}}}z}+B_j\,\mathrm{e}^{-\frac{\mu_j^0}{R\sqrt{K_{33}}}z})J_0(\frac{\mu_j^0}{R}r)+C(r,\theta)\end{aligned} \tag{7-28}$$

式（7-28）共有 $[(4\times N_j\times N)+2N_0]$ 个未知数（不包括 $C(r,\theta)$ 部分，$C(r,\theta)$ 可单独求解），具体包括 $B_{1,n,j},B_{2,n,j},B_{3,n,j},B_{4,n,j}(n=1,2,\cdots,N;j=1,2,\cdots,N_j)$；$A_j,B_j(j=1,2,\cdots,N_0)$。

（2）求解模式

将式（7-28）代入柱体上下两个边界条件（$z=0$，$z=h$），可以形成两个方程，求解这两个方程可以确定未知数，进而确定未知函数。

$$z=0,f_1(r,\theta)=$$
$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_j}\{B_{2,n,j}I_{-b_{l,n}}(\frac{r}{R}\mu^0_{l,n,j})\cos[n\theta+a_{l,n}\ln(\frac{r}{R}s^{(j)}_{l,n})]+B_{4,n,j}I_{-b_{l,n}}(\frac{r}{R}\mu^0_{l,n,j})\sin[n\theta+a_{l,n}\ln(\frac{r}{R}s^{(j)}_{l,n})]\}+\sum_{j=1}^{N_0}(A_j+B_j)J_0(\frac{\mu^0_j}{R}r)+C(r,\theta)\tag{7-29}$$

$$z=h,f_2(r,\theta)=$$
$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_j}\{[B_{1,n,j}\sinh(\frac{s^{(j)}_{l,n}}{R\sqrt{K_{33}}}h)+B_{2,n,j}\cosh(\frac{s^{(j)}_{l,n}}{R\sqrt{K_{33}}}h)]I_{-b_{l,n}}(\frac{r}{R}\mu^0_{l,n,j})\cos[n\theta+a_{l,n}\ln(\frac{r}{R}s^{(j)}_{l,n})]$$
$$+[B_{3,n,j}\sinh(\frac{s^{(j)}_{l,n}}{R\sqrt{K_{33}}}h)+B_{4,n,j}\cosh(\frac{s^{(j)}_{l,n}}{R\sqrt{K_{33}}}h)]I_{-b_{l,n}}(\frac{r}{R}\mu^0_{l,n,j})\sin[n\theta+a_{l,n}\ln(\frac{r}{R}s^{(j)}_{l,n})]\}+$$
$$\sum_{j=1}^{N_0}(A_j\,e^{\frac{\mu^0_j}{R\sqrt{K_{33}}}h}+B_j\,e^{-\frac{\mu^0_j}{R\sqrt{K_{33}}}h})J_0(\frac{\mu^0_j}{R}r)+C(r,\theta)\tag{7-30}$$

$C(r,\theta)$ 解根据第五章第二节办法独立求解，见式（5-4）。观察式（7-29）和（7-30），根据复数柱函数展开定理将边界条件方程（7-29）和（7-30）左式（即边界值函数）展开 $N_j\times N$ 阶复数柱函数 $e^{in\theta}\hat{Z}_{ip_{l,n}}(\frac{r}{R}\mu^0_{l,n,j})$，分别对比每一个边界条件左右两端的 $J_{-b_{l,n}}(\frac{r}{R}s^{(j)}_{l,n})\cos[n\theta+a_{l,n}\ln(\frac{r}{R}s^{(j)}_{l,n})]$，$J_{-b_{l,n}}(\frac{r}{R}s^{(j)}_{l,n})\sin[n\theta+a_{l,n}\ln(\frac{r}{R}s^{(j)}_{l,n})]$ 和 $J_0(\frac{\mu^0_j}{R}r)$ 的系数即可分别建立 $[2\times N_j\times N+N_0]$，共建立 $[4\times N_j\times N+2N_0]$ 个方程，可求解 $[4\times N_j\times N+2N_0]$ 个未知数。至此，问题得解。

（3）数值计算

考虑实心各向异性圆柱体，材料的热传导系数为 $k_1=2.6364\text{kcal/(m·h·℃)}$，$k_2=1.301\text{kcal/(m·h·℃)}$，$k_3=0.6\text{kcal/(m·h·℃)}$，$R=1\text{m}$，$h=1\text{m}$，$q=0$。柱体上端面（$z_2=1\text{m}$）温度分布为 $[10(r-r^3)\cos(0.1\ln r+\theta)]$℃，柱体下端面（$z_1=0\text{m}$）温度分布为 $[(r-r^3)\cos(a_{2,1}\ln r+\theta)]$℃，$a_{2,1}=-K_{12}$。侧面（$r=1\text{m}$）温度为 0℃。

1）特征根分布情况

根据（7-19a）可以求解特征根 $d^{(j)}_{1,1}$ 和 $d^{(j)}_{2,1}$。计算结果见表 7-1 和表 7-2。计算中取 $K=60$。

表 7-1　$d^{(j)}_{1,1}$ 分布情况

j \ β	10°	45°	80°
1	48.302754746809200	48.026613509419040	39.792687205522220
2	41.766145170260250	47.537493762346340	37.854619482846010
3	35.228785778827310	41.400890686222600	33.103923866659330
4	28.690303220523640	35.706241117063480	28.397560218201730
5	22.149712900990660	30.010048140489200	23.687519429777760
6	15.604412128982000	24.311282081447240	18.971068805787590
7	9.044598252756723	18.607596755540180	14.241830277801140
8	2.375398478729240	12.892552989448150	9.480614933330068
9	−2.375398474492558	7.139806729861022	4.587545888179713
10	−9.044598264968750	8.948401823931271E−001	−4.587545888179713
11	−15.604412110490080	−8.948401823931271E−001	−9.480614933330068
12	−22.149712900990660	−7.139806731825151	−14.241830277801140
13	−28.690303220523640	−12.892552988077680	−18.971068805787590
14	−35.228785778827310	−18.607596755940820	−23.687519429777760
15	−41.766145170260250	−24.311282092472250	−28.397560218201730
16	−48.302754746809200	−30.010048140002120	−33.103923866659330
17		−35.706241117063480	−37.854619482846010
18		−41.400890686222600	−39.792687205522220
19		−47.537493762346340	
20		−48.026613509419040	

表 7-2　$d^{(j)}_{2,1}$ 分布情况

j \ β	10°	45°	80°
1	52.954337333602920	46.736954505579670	39.537287249958400
2	46.429304601206300	41.063426279160470	34.895439566989130
3	39.892451907222190	35.368674291459730	30.190058156430030
4	33.354831681441570	29.672365634079640	25.481638628086320
5	26.815883814170060	23.973393229391960	20.768100033947880
6	20.274339356866600	18.269283594548820	16.044925117955940
7	13.726567832382650	12.553134189539490	11.300004456540180
8	7.156462641860164	6.795678600243136	6.485427978299145
9	− 7.156462641860164	−6.795678600243136	−6.485427978299145
10	−13.726567832382650	−12.553134189539490	−11.300004456540180
11	−20.274339356866600	−18.269283594548820	−16.044925117955940
12	−26.815883814170060	−23.973393229391960	−20.768100033947880
13	−33.354831681441570	−29.672365634079640	−25.481638628086320
14	−39.892451907222190	−35.368674291459730	−30.190058156430030
15	−46.429304601206300	−41.063426279160470	−34.895439566989130
16	−52.954337333602920	−46.736954505579670	−39.537287249958400

2）校核解析解的收敛性

针对各向异性实心圆柱体进行数值计算。计算此圆柱体在 $r=0.5\mathrm{m}$，$\theta=0^{\circ}$，$z=0.5\mathrm{m}$ 的温度值 $T(0.5,0,0.5)$(℃)与 K 变化趋势，以检验所得级数解的收敛性。

表 7-3　$T(0.5,0,0.5)$(℃)，$\beta=45^{\circ}$

K	8	12	16	20	30	60
$T(0.5,0,0.5)$	0.1323	0.1488	0.1486	0.1486	0.1486	0.1486

表 7-4　$T(0.5,0,0.5)$(℃)，$\beta=60^{\circ}$

K	8	12	16	20	30	60
$T(0.5,0,0.5)$	0.2077	0.1643	0.1627	0.1627	0.1626	0.1626

表 7-3 和表 7-4 表明级数解收敛稳定。计算表明不同的计算参数所需计算项数 K 是不同的，需具体计算确定。

3）曲线型各向异性圆域温度场分布情况

验证本文一般解析解对于边界条件的满足情况。材料热传导系数同上。$R=1\mathrm{m}$，$q=0$，$K=68$。θ 单位为（°），r 和 z 单位为 m，$T(r,\theta,z)$ 单位为 ℃。

表 7-5　$\beta=45^{\circ}$ 的各向异性圆柱温度场分布

z	r	θ	$T(r,\theta,z)$	*	**
0.0	0.5	0.000	0.3643	0.3647	
0.1	0.5	0.000	0.2001		
0.2	0.5	0.000	0.1167		
0.3	0.5	0.000	0.0856		
0.4	0.5	0.000	0.0946		
0.5	0.5	0.000	0.1486		
0.6	0.5	0.000	0.2733		
0.7	0.5	0.000	0.5269		
0.8	0.5	0.000	1.0250		
0.9	0.5	0.000	1.9800		
1.0	0.5	0.000	3.7480		3.7410

注：* 为上端面（$z_2=1m$）温度边界条件数值；** 为下端面（$z_1=0m$）温度边界条件数值。

表 7-5 显示，本书提出的解满足边界条件。

7.2.2　柱侧面具有第二类边界条件的 A 型各向异性实心圆柱体热传导

对于侧面具有第二类边界条件的实心柱体热传导问题，可得边界条件

$$q_r\big|_{r=R}=-\left(k_{11}\frac{\partial T}{\partial r}+k_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)\Big|_{r=R}=0$$

和自然条件 $T(0,\theta,z)$ 为有限值。

引入变换 $x = r\lambda_{l,n}^{(j)}\sqrt{K_{33}}$，上式可改写为

$$\left(k_{11}\frac{\partial T}{\partial x} + k_{12}\frac{1}{x}\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)\Big|_{x=R\lambda_{l,n}^{(j)}\sqrt{K_{33}}} = 0 \tag{7-31}$$

当 $n \neq 0$，将 $T(0,\theta,z)$ 为有限值的自然条件代入式（7－16），式（7－16）只能选 $l=2$，这样可得

$$T = \sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=-\infty,j\neq 0}^{\infty} A_{2,n,j,0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_{l,n}^{(j)}z}x^{\mathrm{i}a_{2,n}}I_{-b_{2,n}}(x) + Z_0(r,z) + C(r,\theta) \tag{7-32}$$

将式（7－32）代入式（7－31），可得特征方程如下

$$I_{-b_{2,n}}(x)(\mathrm{i}k_{11}a_{2,n} + k_{11}b_{2,n} + \mathrm{i}k_{12}n) + k_{11}xI_{-b_{2,n}-1}(x) = 0 \tag{7-33}$$

求解式（7－33），可得零点 $\mu_{l,n,j}^{0}$ 和特征根

$$\lambda_{l,n}^{(j)} = \frac{\mu_{l,n,j}^{0}}{R\sqrt{K_{33}}} \tag{7-34}$$

根据特征值可以确定特征函数形式，进而确定问题解。

7.2.3 柱侧面具有第三类边界条件的A型各向异性实心柱体热传导

第三类边界条件（边界热对流）为

$$\left[-\left(k_{11}\frac{\partial T}{\partial r} + k_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + h_m T\right]\Big|_{r=R} = 0$$

和自然条件 $T(0,\theta,z)$ 为有限值。h_m 为柱体与外界环境热对流系数。

引入变换 $x = r\lambda_{l,n}^{(j)}\sqrt{K_{33}}$，上式可改写为

$$\left(K_{11}\frac{\partial T}{\partial x} + K_{12}\frac{1}{x}\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) - \frac{h_m}{\lambda_j\sqrt{K_{33}}}T)\Bigg|_{x=R\lambda_{l,n}^{(j)}\sqrt{K_{33}}} = 0 \tag{7-35}$$

将式（7－32）代入式（7－35），可得特征方程为

$$\left[I_{-b_{2,n}}(x)(\mathrm{i}k_{11}a_{2,n} + k_{11}b_{2,n} + \mathrm{i}k_{12}n - h_m R) + k_{11}xI_{-b_{2,n}-1}(x)\right] = 0 \tag{7-36}$$

求解式（7－36），可得零点 $\mu_{2,n,j}^{0}$ 和特征根

$$\lambda_{2,n}^{(j)} = \frac{\mu_{2,n,j}^{0}}{R\sqrt{K_{33}}} \tag{7-37}$$

根据特征值可以确定特征函数形式，进而确定问题解。

7.2.4 柱侧面具有第一类边界条件的A型各向异性空心柱体热传导

对于侧面具有第一类边界条件的空心柱体热传导问题边界条件为

$$\begin{cases} T(r_1,\theta,z) = 0 \\ T(r_2,\theta,z) = 0 \end{cases} \tag{7-38}$$

引入变换 $x = r\lambda_{n}^{(j)}\sqrt{K_{33}}$，式（7－38）可改写为

$$\begin{cases} T(x_1,\theta,z) = 0 \\ T(x_2,\theta,z) = 0 \end{cases} \tag{7-39}$$

式中 $x_1 = r_1\lambda_n^{(j)}\sqrt{K_{33}}, x_2 = r_2\lambda_n^{(j)}\sqrt{K_{33}}$。

将式（7-16）代入式（7-39）。根据待定系数 $A_{1,n,j,0}, A_{2,n,j,0}$ 不全为0的条件，可得特征行列式

$$\begin{vmatrix} I_{-b_{1,n}}(x_1) & I_{-b_{2,n}}(x_1) \\ I_{-b_{1,n}}(x_2) & I_{-b_{2,n}}(x_2) \end{vmatrix} = 0 \tag{7-40}$$

求解式（7-40）可以确定特征值 $\lambda_n^{(j)}$ 。根据式（7-40），可得

$$A_{2,n,j,0} = -A_{1,n,j,0}\frac{I_{-b_{1,n}}(x_1)}{I_{-b_{2,n}}(x_1)} \tag{7-41}$$

将式（7-41）代入式（7-16），可得

$$T = \mathrm{Re}\Big\{\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=-\infty,j\neq 0}^{\infty} A_{1,n,j,0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n^{(j)}z}\Big[x^{\mathrm{i}a_{1,n}}I_{-b_{1,n}}(x) - x^{\mathrm{i}a_{2,n}}I_{-b_{2,n}}(x)\frac{I_{-b_{1,n}}(x_1)}{I_{-b_{2,n}}(x_1)}\Big]\Big\} + T^*$$

其中 T^* 为 $n=0$ 时相应函数解，$T^* = Z_0(r,z) + C(r,\theta)$ ，读者可自行推导。

7.2.5　柱侧面具有第二类边界条件的A型各向异性空心柱体热传导

对于内外径都是第二类边界条件的空心圆柱边界条件

$$\begin{cases} q_r|_{r=r_1} = -\left(k_{11}\dfrac{\partial T}{\partial r} + k_{12}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T}{\partial \theta}\right)\Big|_{r=r_1} = 0 \\ q_r|_{r=r_2} = -\left(k_{11}\dfrac{\partial T}{\partial r} + k_{12}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T}{\partial \theta}\right)\Big|_{r=r_2} = 0 \end{cases} \tag{7-42}$$

引入变换 $x = r\lambda_n^{(j)}\sqrt{K_{33}}$ ，式（7-42）可改写为

$$\begin{cases} \left(K_{11}\dfrac{\partial T}{\partial x} + K_{12}\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial T}{\partial \theta}\right)\Big|_{x=x_1} = 0 \\ \left(K_{11}\dfrac{\partial T}{\partial x} + K_{12}\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial T}{\partial \theta}\right)\Big|_{x=x_2} = 0 \end{cases} \tag{7-43}$$

式中 $x_1 = r_1\lambda_n^{(j)}\sqrt{K_{33}}, x_2 = r_2\lambda_n^{(j)}\sqrt{K_{33}}$ 。

将式（7-16）代入式（7-43），根据待定系数 $A_{1,n,j,0}, A_{2,n,j,0}$ 不全为0的条件，可得特征行列式

特征矩阵行列式

$$\begin{vmatrix} I_{-b_{1,n}}(x_1)(\mathrm{i}k_{11}a_{1,n} + k_{11}b_{1,n} + \mathrm{i}k_{12}n) + k_{11}x_1 I_{-b_{1,n}-1}(x_1) & I_{-b_{2,n}}(x_1)(\mathrm{i}k_{11}a_{2,n} + k_{11}b_{2,n} + \mathrm{i}k_{12}n) + k_{11}x_1 I_{-b_{2,n}-1}(x_1) \\ I_{-b_{1,n}}(x_2)(\mathrm{i}k_{11}a_{1,n} + k_{11}b_{1,n} + \mathrm{i}k_{12}n) + k_{11}x_2 I_{-b_{1,n}-1}(x_2) & I_{-b_{2,n}}(x_2)(\mathrm{i}k_{11}a_{2,n} + k_{11}b_{2,n} + \mathrm{i}k_{12}n) + k_{11}x_2 I_{-b_{2,n}-1}(x_2) \end{vmatrix} = 0 \tag{7-44}$$

求解式（7-44）可以确定特征值 $\lambda_n^{(j)}$ 。根据式（7-44），可得

$$A_{2,n,j,0} = -A_{1,n,j,0}\frac{I_{-b_{1,n}}(x_1)(\mathrm{i}k_{11}a_{1,n} + k_{11}b_{1,n} + \mathrm{i}k_{12}n) + k_{11}x_1 I_{-b_{1,n}-1}(x_1)}{I_{-b_{2,n}}(x_1)(\mathrm{i}k_{11}a_{2,n} + k_{11}b_{2,n} + \mathrm{i}k_{12}n) + k_{11}x_1 I_{-b_{2,n}-1}(x_1)} \tag{7-45}$$

将式（7-45）代入式（7-16），可得

$$T = \mathrm{Re}\Big\{ \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{1,n,j,0} e^{in\theta} e^{i\lambda_n^{(j)} z} \Big[x^{ia_{1,n}} I_{-b_{1,n}}(x) - x^{ia_{2,n}} I_{-b_{2,n}}(x) \frac{I_{-b_{1,n}}(x_1)(ik_{11}a_{1,n} + k_{11}b_{1,n} + ik_{12}n) + k_{11}x_1 I_{-b_{1,n}-1}(x_1)}{I_{-b_{2,n}}(x_1)(ik_{11}a_{2,n} + k_{11}b_{2,n} + ik_{12}n) + k_{11}x_1 I_{-b_{2,n}-1}(x_1)} \Big] \Big\} + T^* \tag{7-46}$$

其中 T^* 为 $n=0$ 时相应函数解，$T^* = Z_0(r,z) + C(r,\theta)$，读者可自行推导。

7.2.6 柱侧面具有第三类边界条件的 A 型各向异性空心柱体热传导

对于内外径都是第三类边界条件的空心圆柱边界条件

$$\begin{cases} q_r|_{r=r_1} = \left[-\left(k_{11} \dfrac{\partial T}{\partial r} + k_{12} \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial T}{\partial \theta}\right) + h_m T \right]\Big|_{r=r_1} = 0 \\ q_r|_{r=r_2} = \left[-\left(k_{11} \dfrac{\partial T}{\partial r} + k_{12} \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial T}{\partial \theta}\right) + h_m T \right]\Big|_{r=r_2} = 0 \end{cases} \tag{7-47}$$

引入变换 $x = r\lambda_n^{(j)} \sqrt{K_{33}}$，式（7－47）可改写为

$$\begin{cases} \left(K_{11} \dfrac{\partial T}{\partial x} + K_{12} \dfrac{1}{x} \dfrac{\partial T}{\partial \theta}\right) - \dfrac{h_m}{\lambda_n^{(j)} \sqrt{K_{33}}} T)\Big|_{x=x_1} = 0 \\ \left(K_{11} \dfrac{\partial T}{\partial x} + K_{12} \dfrac{1}{x} \dfrac{\partial T}{\partial \theta}\right) - \dfrac{h_m}{\lambda_n^{(j)} \sqrt{K_{33}}})T\Big|_{x=x_2} = 0 \end{cases} \tag{7-48}$$

式中 $x_1 = r_1\lambda_n^{(j)} \sqrt{K_{33}}, x_2 = r_2\lambda_n^{(j)} \sqrt{K_{33}}$。

将式（7－16）代入式（7－48），根据待定系数 $A_{1,n,j,0}, A_{2,n,j,0}$ 不全为 0 的条件，可得特征行列式和 $A_{1,n,j,0}, A_{2,n,j,0}$ 之间关系式。

特征矩阵行列式

$$\begin{vmatrix} I_{-b_{1,n}}(x_1)(ik_{11}a_{1,n} + k_{11}b_{1,n} + ik_{12}n - \dfrac{h_m}{\lambda_n^{(j)}\sqrt{K_{33}}}) + k_{11}x_1 I_{-b_{1,n}-1}(x_1) & I_{-b_{2,n}}(x_1)(ik_{11}a_{2,n} + k_{11}b_{2,n} + ik_{12}n - \dfrac{h_m}{\lambda_n^{(j)}\sqrt{K_{33}}}) + k_{11}x_1 I_{-b_{2,n}-1}(x_1) \\ I_{-b_{1,n}}(x_2)(ik_{11}a_{1,n} + k_{11}b_{1,n} + ik_{12}n - \dfrac{h_m}{\lambda_n^{(j)}\sqrt{K_{33}}}) + k_{11}x_2 I_{-b_{1,n}-1}(x_2) & I_{-b_{2,n}}(x_2)(ik_{11}a_{2,n} + k_{11}b_{2,n} + ik_{12}n - \dfrac{h_m}{\lambda_n^{(j)}\sqrt{K_{33}}}) + k_{11}x_2 I_{-b_{2,n}-1}(x_2) \end{vmatrix} = 0 \tag{7-49}$$

求解式（7－49）可以确定特征值 $\lambda_n^{(j)}$。根据式（7－49），可得

$$A_{2,n,j,0} = -A_{1,n,j,0} \frac{I_{-b_{1,n}}(x_1)(ik_{11}a_{1,n} + k_{11}b_{1,n} + ik_{12}n - \dfrac{h_m}{\lambda_n^{(j)}\sqrt{K_{33}}}) + k_{11}x_1 I_{-b_{1,n}-1}(x_1)}{I_{-b_{2,n}}(x_1)(ik_{11}a_{2,n} + k_{11}b_{2,n} + ik_{12}n - \dfrac{h_m}{\lambda_n^{(j)}\sqrt{K_{33}}}) + k_{11}x_1 I_{-b_{2,n}-1}(x_1)} \tag{7-50}$$

将式（7－50）代入式（7－16）可得

$$T = \mathrm{Re}\left\{ \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{1,n,j,0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n^{(j)} z} \left[x^{\mathrm{i}a_{1,n}} I_{-b_{1,n}}(x) - \right.\right.$$

$$\left.\left. x^{\mathrm{i}a_{2,n}} I_{-b_{2,n}}(x) \frac{I_{-b_{1,n}}(x_1)(\mathrm{i}k_{11}a_{1,n} + k_{11}b_{1,n} + \mathrm{i}k_{12}n - \dfrac{h_m}{\lambda_n^{(j)}\sqrt{K_{33}}}) + k_{11}x_1 I_{-b_{1,n}-1}(x_1)}{I_{-b_{2,n}}(x_1)(\mathrm{i}k_{11}a_{2,n} + k_{11}b_{2,n} + \mathrm{i}k_{12}n - \dfrac{h_m}{\lambda_n^{(j)}\sqrt{K_{33}}}) + k_{11}x_1 I_{-b_{2,n}-1}(x_1)} \right] \right\} + T^* \tag{7-51}$$

其中 T^* 为 n=0 时相应函数解，$T^* = Z_0(r,z) + C(r,\theta)$，读者可自行推导。

在本章中，我们建立了变形 Z_{ip} 方程，并给出了变形复数柱函数定义和变形复数柱多项式。变形复数柱函数在各向异性物理学中将经常遇到，下面研究此类多项式和函数的特性。

7.3　变形复数柱函数研究

7.3.1　$\hat{Z}_{ip}(x)$ 多项式与变形贝塞尔函数的关系

根据式（7-15），可得 $\hat{Z}_{ip}(x) = x^{\mathrm{i}a} I_{-b}(x)$

其中 $p = a + \mathrm{i}b$ 。

$\hat{Z}_{ip}(x) = x^{\mathrm{i}a} I_{-b}(x)$ 建立了变形复数柱多项式和变形贝塞尔多项式关系。对于各向同性热传导、正交异性热传导问题，$K_{12} = 0$，$a = 0$，$\hat{Z}_{ip}(x) = I_{-b}(x)$，即在各向同性热传导、正交异性热传导问题中，变形复数柱多项式和贝塞尔函数一致的。

根据式（7-15），可得 $\hat{Z}_{ip}(-x) = (-x)^{\mathrm{i}a_{1,n}} I_{-b}(-x)$ 。

根据复变函数理论，可得

$$x^{\mathrm{i}a} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a\ln(x)} = \cos(a\ln x) + \mathrm{i}\sin(a\ln x)$$

$$(x^{\mathrm{i}a})^* = \cos(a\ln x) - \mathrm{i}\sin(a\ln x) = e^{-\mathrm{i}a\ln x} = x^{-\mathrm{i}a}$$

其中 $(x^{\mathrm{i}a})^*$ 为 $x^{\mathrm{i}a}$ 的共轭函数。

$$\begin{aligned} \hat{Z}_{ip}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} &= x^{\mathrm{i}a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} I_{-b}(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\theta + a\ln x)} I_{-b}(x) \\ \hat{Z}_{ip}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} &= I_{-b}(x)[\cos(n\theta + a\ln x) + \mathrm{i}\sin(n\theta + a\ln x)] \end{aligned} \tag{7-52}$$

从上式可看出，变形贝塞尔函数 $I_{-b}(x)$ 类似变形复数柱多项式函数的广义振幅，$a\ln x$ 类似变形复数柱多项式函数的广义幅角。当广义幅角为 0 时，变形复数柱函数和变形贝塞尔函数一致。

7.3.2　$\hat{Z}_{ip}(x)$ 多项式的微分公式与递推关系式

如同不同阶的变形贝塞尔函数之间有一定联系，不同阶的变形复数柱多项式也存在这种联系的微分公式和递推公式。

(1) $\hat{Z}_{ip}(x)$ 多项式的微分公式

$\hat{Z}_{ip}(x)$ 多项式有如下微分公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^{ip})^* \hat{Z}_{ip}(x)] = (x^{ip})^* \hat{Z}_{ip-1}(x) \tag{7-53}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-ip} \hat{Z}_{ip}(x)] = x^{-ip} \hat{Z}_{ip+1}(x) \tag{7-54}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^k [(x^{ip})^* \hat{Z}_{ip}(x)] = (x^{ip})^* x^{-k} \hat{Z}_{ip-k}(x) \tag{7-55}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^k \left[\frac{\hat{Z}_{ip}(x)}{x^{ip}}\right] = \frac{\hat{Z}_{ip+k}(x)}{x^{ip+k}} \tag{7-56}$$

证明：

由 $\hat{Z}_{ip}(x)$ 的表达式（7-15）和第一类变形贝塞尔函数表达式可以推出两个基本递推公式（7-53）和（7-54）。

根据 $\hat{Z}_{ip}(x) = x^{ia} I_{-b}(x)$ 和第一类变形贝塞尔函数定义

$$I_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}$$

对于 $p = a + ib$，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^{ip})^* \hat{Z}_{ip}(x)] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x^{i(a+ib)})^* x^{ia} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k-b+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-b}\right] \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k-b+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-2b}\right] \\
&= (2k-2b) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!2^{2k-b}\Gamma(k-b+1)} x^{2k-2b-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!2^{2k-b-1}\Gamma(k-b)} x^{2k-2b-1} \\
&= x^{-b} I_{-b-1}(x)
\end{aligned}$$

因为 $\hat{Z}_{ip-1}(x) = x^{ia} I_{-b-1}(x)$，这样可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^{ip})^* \hat{Z}_{ip}(x)] = (x^{ip})^* \hat{Z}_{ip-1}(x)$$

式（7-53）得证。

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{x^{ip}} \hat{Z}_{ip}(x)\right] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{x^{ip}} x^{ia} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k-b+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-b}\right] \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k-b}k!\Gamma(k-b+1)} x^{2k}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{2^{2k-b}k!\Gamma(k-b+1)} x^{2k-1}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(m+1)}{(m+1)!2^{2(m+1)-b}\Gamma(m-b+1+1)} x^{2m+1}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2j+1-b} j!\Gamma(j-b+1+1)} x^{2j+1}$$

$$= x^{ia} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2j+1-b} j!\Gamma(j-b+1)} x^{2j+1-b} \frac{1}{x^{ia-b}}$$

$$= x^{-ip} \hat{Z}_{ip+1}(x)$$

这样式（7 - 54）得证。证明完毕。式（7 - 55）（7 - 56）推导需要用到后面的 $\hat{Z}_{ip}(x)$ 多项式递推关系式，证明放在后面，下面先研究递推公式。

(2) $\hat{Z}_{ip}(x)$ 多项式递推关系式

$$x \frac{\mathrm{d}\hat{Z}_{ip}(x)}{\mathrm{d}x} + (\mathrm{i}p)^* \hat{Z}_{ip}(x) = x \hat{Z}_{ip-1}(x) \tag{7-57}$$

$$x \frac{\mathrm{d}\hat{Z}_{ip}(x)}{\mathrm{d}x} - \mathrm{i}p \hat{Z}_{ip}(x) = x \hat{Z}_{ip+1}(x) \tag{7-58}$$

$$\hat{Z}_{ip-1}(x) - \hat{Z}_{ip+1}(x) = -\frac{2b}{x} \hat{Z}_{ip}(x) \tag{7-59}$$

$$\frac{2\mathrm{i}a}{x} \hat{Z}_{ip}(x) + \hat{Z}_{ip-1}(x) + \hat{Z}_{ip+1}(x) = 2 \frac{\mathrm{d}\hat{Z}_{ip}(x)}{\mathrm{d}x} \tag{7-60}$$

证明：

将 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^{\mathrm{i}p})^* \hat{Z}_{ip}(x)] = (x^{\mathrm{i}p})^* \hat{Z}_{ip-1}(x)$ 的左端的导数求出，化简后可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^{\mathrm{i}p})^* \hat{Z}_{ip}(x)] = (x^{\mathrm{i}p})^* \frac{\mathrm{d}\hat{Z}_{ip}(x)}{\mathrm{d}x} + \hat{Z}_{ip}(x) \frac{\mathrm{d}(x^{\mathrm{i}p})^*}{\mathrm{d}x} = (x^{\mathrm{i}p})^* \hat{Z}_{ip-1}(x)$$

$$x \frac{\mathrm{d}\hat{Z}_{ip}(x)}{\mathrm{d}x} + \hat{Z}_{ip}(x) \frac{x}{(x^{\mathrm{i}p})^*} \frac{\mathrm{d}(x^{\mathrm{i}p})^*}{\mathrm{d}x} = x \hat{Z}_{ip-1}(x)$$

考虑到 $\frac{x}{(x^{\mathrm{i}p})^*} \frac{\mathrm{d}(x^{\mathrm{i}p})^*}{\mathrm{d}x} = \frac{x(-b-\mathrm{i}a)}{x} = (-b-\mathrm{i}a)$，这样可得递推公式（7 - 57）

$$x \frac{\mathrm{d}\hat{Z}_{ip}(x)}{\mathrm{d}x} + \hat{Z}_{ip}(x)(-b-\mathrm{i}a) = x \hat{Z}_{ip-1}(x)$$

根据 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-\mathrm{i}p} \hat{Z}_{ip}(x)] = x^{-\mathrm{i}p} \hat{Z}_{ip+1}(x)$，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-\mathrm{i}p} \hat{Z}_{ip}(x)] = x^{-\mathrm{i}p} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\hat{Z}_{ip}(x)] + \hat{Z}_{ip}(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-\mathrm{i}p}) = x^{-\mathrm{i}p} \hat{Z}_{ip+1}(x)$$

这样可得

$$x \frac{\mathrm{d}\hat{Z}_{ip}(x)}{\mathrm{d}x} + x \hat{Z}_{ip}(x) \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-\mathrm{i}p})}{x^{\mathrm{i}p}} = x \hat{Z}_{ip+1}(x)$$

考虑到 $x\dfrac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-\mathrm{i}p})}{x^{\mathrm{i}p}}=-\mathrm{i}p$，代入上式可得递推公式（7－58）：

$$x\frac{\mathrm{d}\hat{Z}_{ip}(x)}{\mathrm{d}x}-\mathrm{i}p\hat{Z}_{ip}(x)=x\hat{Z}_{ip+1}(x)$$

将式（7－57）减去式（7－58）可得递推公式（7－59）

$$\hat{Z}_{ip-1}(x)-\hat{Z}_{ip+1}(x)=-\frac{2b}{x}\hat{Z}_{ip}(x)$$

显然，如果已知 $\hat{Z}_{ip-1}(x)$ 和 $\hat{Z}_{ip}(x)$，即可计算出 $\hat{Z}_{ip+1}(x)$。

将式（7－57）加上式（7－58）可得递推公式（7－60）

$$\frac{2\mathrm{i}a}{x}\hat{Z}_{ip}(x)+\hat{Z}_{ip-1}(x)+\hat{Z}_{ip+1}(x)=2\frac{\mathrm{d}\hat{Z}_{ip}(x)}{\mathrm{d}x}$$

根据式（7－60），如果已知 $\hat{Z}_{ip-1}(x)$，$\hat{Z}_{ip}(x)$，$\hat{Z}_{ip+1}(x)$ 即可计算出导数 $\dfrac{\mathrm{d}\hat{Z}_{ip}(x)}{\mathrm{d}x}$。

式（7－57）～（7－60）为变形复数柱多项式 $\hat{Z}_{ip}(x)$ 的递推公式。

下面再证明式（7－55）和（7－56）。

将式（7－53）改写为

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^{\mathrm{i}p})^{*}\hat{Z}_{ip}(x)]=(x^{\mathrm{i}p})^{*}\frac{\hat{Z}_{ip-1}(x)}{x}$$

考虑到

$$(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})^{2}[(x^{\mathrm{i}p})^{*}\hat{Z}_{ip}(x)]=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^{\mathrm{i}p})^{*}\hat{Z}_{ip}(x)]\}$$

$$=\frac{1}{x^{2}}\{-\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^{\mathrm{i}p})^{*}\hat{Z}_{ip}(x)]+\frac{\mathrm{d}^{2}}{\mathrm{d}x^{2}}[(x^{\mathrm{i}p})^{*}\hat{Z}_{ip}(x)]\}$$

$$\frac{\mathrm{d}^{2}}{\mathrm{d}x^{2}}[(x^{\mathrm{i}p})^{*}\hat{Z}_{ip}(x)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^{\mathrm{i}p})^{*}\hat{Z}_{ip}(x)]\right\}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^{\mathrm{i}p})^{*}\hat{Z}_{ip-1}(x)]$$

根据式（7－53），可得

$$\frac{\mathrm{d}^{2}}{\mathrm{d}x^{2}}[(x^{\mathrm{i}p})^{*}\hat{Z}_{ip}(x)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^{\mathrm{i}p})^{*}\hat{Z}_{ip-1}(x)]$$

$$=(-\mathrm{i}a-b)x^{-\mathrm{i}a-b-1}\hat{Z}_{ip-1}(x)+x^{-\mathrm{i}a-b}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\hat{Z}_{ip-1}(x)$$

$$(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})^{2}[(x^{\mathrm{i}p})^{*}\hat{Z}_{ip}(x)]$$

$$=\frac{1}{x^{2}}\{-\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^{\mathrm{i}p})^{*}\hat{Z}_{ip}(x)]+\frac{\mathrm{d}^{2}}{\mathrm{d}x^{2}}[(x^{\mathrm{i}p})^{*}\hat{Z}_{ip}(x)]$$

$$=x^{-\mathrm{i}a-b-2}[\frac{(-\mathrm{i}a-b-1)}{x}\hat{Z}_{ip-1}(x)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\hat{Z}_{ip-1}(x)]$$

根据递推公式（7－57），上式右式可写为

$$\frac{(-\mathrm{i}a-b-1)}{x}\hat{Z}_{ip-1}(x)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\hat{Z}_{ip-1}(x)=\hat{Z}_{ip-2}(x)$$

这样可得

$$\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2[(x^{ip})^*\hat{Z}_{ip}(x)]=x^{-\mathrm{i}a-b-2}\hat{Z}_{ip-2}(x)$$

重复以上步骤，类似可得

$$\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^k[(x^{ip})^*\hat{Z}_{ip}(x)]=x^{-\mathrm{i}a-b-k}\hat{Z}_{ip-k}(x)$$

式（7-55）得证。下面证明式（7-56），将式（7-54）改写为

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-ip}\hat{Z}_{ip}(x)]=x^{-ip}\frac{1}{x}\hat{Z}_{ip+1}(x)$$

$$\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2[x^{-ip}\hat{Z}_{ip}(x)]=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-ip}\hat{Z}_{ip}(x)]\right\}$$

$$=\frac{1}{x^2}\left\{\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-ip}\hat{Z}_{ip}(x)]+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}[x^{-ip}\hat{Z}_{ip}(x)]\right\}$$

根据式（7-54），可得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}[x^{-ip}\hat{Z}_{ip}(x)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-ip}\hat{Z}_{ip+1}(x)]$$

$$=(-\mathrm{i}a+b)x^{-(\mathrm{i}a-b)-1}\hat{Z}_{ip+1}(x)+x^{-(\mathrm{i}a-b)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\hat{Z}_{ip+1}(x)$$

$$\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2[x^{-ip}\hat{Z}_{ip}(x)]$$

$$=\frac{1}{x^2}\left\{\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-ip}\hat{Z}_{ip}(x)]+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}[x^{-ip}\hat{Z}_{ip}(x)]\right\}$$

$$=\frac{1}{x^{\mathrm{i}a-b+2}}\left[-\frac{(\mathrm{i}a-b-1)}{x}\hat{Z}_{ip+1}(x)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\hat{Z}_{ip+1}(x)\right]$$

根据递推公式（7-58）$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\hat{Z}_{ip}(x)]-\mathrm{i}p\hat{Z}_{ip}(x)=x\hat{Z}_{ip+1}(x)$，可得

$$\frac{1}{x^{\mathrm{i}a-b+2}}\left[-\frac{(\mathrm{i}a-b-1)}{x}\hat{Z}_{ip+1}(x)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\hat{Z}_{ip+1}(x)\right]=\frac{1}{x^{\mathrm{i}a-b+2}}\hat{Z}_{ip+2}(x)$$

这样可得

$$\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2[x^{-ip}\hat{Z}_{ip}(x)]=\frac{1}{x^{\mathrm{i}a-b+2}}\hat{Z}_{ip+2}(x)$$

再考虑$\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^3[x^{-ip}\hat{Z}_{ip}(x)]$的情况，

$$\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^3[x^{-ip}\hat{Z}_{ip}(x)]=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{x^{\mathrm{i}a-b+2}}\hat{Z}_{ip+2}(x)\right]$$

将上式右式展开，可得

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{x^{\mathrm{i}a-b+2}}\hat{Z}_{ip+2}(x)\right]=\frac{1}{x^{\mathrm{i}a-b+3}}\left[-\frac{(\mathrm{i}a-b+2)}{x}\hat{Z}_{ip+2}(x)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\hat{Z}_{ip+2}(x)\right]$$

根据递推公式（7-58），可得

$$\frac{1}{x^{ia-b+3}}\left[-\frac{(ia-b+2)}{x}\hat{Z}_{ip+2}(x)+\frac{d}{dx}\hat{Z}_{ip+2}(x)\right]=\frac{1}{x^{ia-b+3}}\hat{Z}_{ip+3}(x)$$

这样可得

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{3}\left[x^{-ip}\hat{Z}_{ip}(x)\right]=\frac{1}{x^{ia-b+3}}\hat{Z}_{ip+3}(x)$$

重复以上步骤，类似可得

$$\left(\frac{d}{xdx}\right)^{k}\left[\frac{\hat{Z}_{ip}(x)}{x^{ip}}\right]=\frac{\hat{Z}_{ip+k}(x)}{x^{ip+k}}$$

式（7－56）得证。

可以容易证明变形贝塞尔函数的微分公式和递推公式是变形复数柱函数 $\hat{Z}_{ip}(x)$ 微分公式和递推公式的特殊情况。

7.4　第二类变形复数柱多项式定义及其递推公式

对于各向异性问题，在特征根 $p_{l,n}=a_{l,n}+ib_{l,n}$ 中实部 $a_{l,n}$ 不为 0、虚部 $b_{l,n}$ 是整数情况下，这时第一类变形复数柱多项式 $\hat{Z}_{ip_{1,n}}(x)$ 与 $\hat{Z}_{ip_{2,n}}(x)$ 线性相关，这样根据第二类贝塞尔函数的思想，需要定义第二类变形复数柱多项式 $K_{ip}(x)$

$$K_{ip}(x)=\frac{\pi}{2}\frac{\hat{Z}_{ip_{1,n}}(x)-\hat{Z}_{ip_{2,n}}(x)}{\sin(-b_{2,n}\pi)} \tag{7-61}$$

其中 $p_{l,n}=a_{l,n}+ib_{l,n}$，$l=1$，2。

$$a_{1,n}=-nK_{12}$$

$$b_{1,n}=n\sqrt{K_{22}-K_{12}^{2}}$$

$$a_{2,n}=-nK_{12}$$

$$b_{2,n}=-n\sqrt{K_{22}-K_{12}^{2}}$$

为简化起见，可记 $a=-nK_{12}, b=-n\sqrt{(K_{22}-K_{12}{}^{2})}, ip_{2,n}=ip$，那么有

$$ip_{1,n}=ia+b, ip_{2,n}=ia-b, ip=ia-b$$

这样可得

$$\hat{Z}_{ip_{1,n}}(x)=\hat{Z}_{ia+b}(x), \hat{Z}_{ip_{2,n}}(x)=\hat{Z}_{ia-b}(x)$$

式（7－61）可简写为

$$K_{ip}(x)=\frac{\pi}{2}\frac{\hat{Z}_{ia+b}(x)-\hat{Z}_{ia-b}(x)}{\sin(-b\pi)} \tag{7-62}$$

当虚部 b 是整数情况下，式（7－62）可简写为

$$K_{ip}(x)=\lim_{-b\to k}\frac{\pi}{2}\frac{\hat{Z}_{ia+b}(x)-\hat{Z}_{ia-b}(x)}{\sin(-b\pi)}$$

式（7－62）改写为

$$K_{ip}(x) = x^{ia}\mathrm{K}_{-b}(x) \tag{7-63}$$

上式 $K_{-b}(x)$ 为−b 阶第二类变形贝塞尔函数，$K_{-b}(x) = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{I_b(x) - I_{-b}(x)}{\sin(-b\pi)}$ 。

显然，第二类变形贝塞尔函数是第二类变形复数柱多项式的特殊情况：

$$K_{ip}(x) = \mathrm{K}_{-b}(x)[\cos(a\ln x) + \mathrm{i}\sin(a\ln x)]$$

从上式可看出，第二类变形贝塞尔函数 $K_{-b}(x)$ 类似第二类变形复数柱多项式 $K_{ia-b}(x)$ 的广义振幅，$a\ln(x)$ 类似第二类复数柱多项式函数 $K_{ia-b}(x)$ 的广义幅角。当广义幅角为 0 时，第二类变形复数柱函数 $K_{ia-b}(x)$ 和第二类变形贝塞尔函数 $K_{-b}(x)$ 一致。

与第一类变形复数柱多项式函数的微分公式和递推公式类似，第二类变形复数柱多项式函数 $K_{ip}(x)$ 也存在微分公式和递推公式。

(1) 第二类变形复数柱多项式函数的微分公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^{\mathrm{i}p})^* K_{ip}(x)] = -(x^{\mathrm{i}p})^* K_{ip-1}(x) \tag{7-64}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-\mathrm{i}p}K_{ip}(x)] = -x^{-\mathrm{i}p}K_{ip+1}(x) \tag{7-65}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^k[(x^{\mathrm{i}p})^* K_{ip}(x)] = (-1)^k (x^{\mathrm{i}p})^* x^{-k}K_{ip-k}(x) \tag{7-66}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^k\left[\frac{K_{ip}(x)}{x^{\mathrm{i}p}}\right] = (-1)^k \frac{K_{ip+k}(x)}{x^{\mathrm{i}p+k}} \tag{7-67}$$

证明：

根据式（7－61），可得 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^{\mathrm{i}p})^* K_{ip}(x)] = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-\mathrm{i}a-b}\dfrac{\pi}{2}\dfrac{\hat{Z}_{ip_{1,n}}(x) - \hat{Z}_{ip_{2,n}}(x)}{\sin(-b_{2,n}\pi)}\right]$

根据式（7－53），$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^{\mathrm{i}p})^* K_{ip}(x)] = x^{-\mathrm{i}a-b}\dfrac{\pi[\hat{Z}_{ip_{1,n}+1}(x) - \hat{Z}_{ip_{2,n}-1}(x)]}{2\sin(-b_{2,n}\pi)}$

根据式（7－12），可得

$$\begin{cases} b_{1,n} = -b_{2,n} \\ a_{1,n} = a_{2,n} \end{cases}$$

这样可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^{\mathrm{i}p})^* K_{ip}(x)] = x^{-\mathrm{i}a_{2,n}-b_{2,n}}\frac{\pi[\hat{Z}_{ia_{2,n}+b_{2,n}+1}(x) - \hat{Z}_{ia_{2,n}-b_{2,n}-1}(x)]}{2\sin[(-b_{2,n}-1)\pi)]cos\,\pi} = -x^{-\mathrm{i}a_{2,n}-b_{2,n}}K_{ip-1}(x)$$

$$(\mathrm{i}p_{2,n})^* = [\mathrm{i}(a_{2,n} + \mathrm{i}b_{2,n})]^* = -\mathrm{i}a_{2,n} - b_{2,n} = -\mathrm{i}a - b$$

根据上式，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^{\mathrm{i}p})^* K_{ip}(x)] = -(x^{\mathrm{i}p})^* K_{ip-1}(x)$$

式（7－64）得证。下面证明式（7－65）。

根据式（7－61），可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-\mathrm{i}p}K_{ip}(x)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-\mathrm{i}p}\frac{\pi}{2}\frac{\hat{Z}_{ip_{1,n}}(x) - \hat{Z}_{ip_{2,n}}(x)}{\sin(-b_{2,n}\pi)}\right]$$

根据式（7－54），上式可推导得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-ip}K_{ip}(x)]=x^{-ip}\ \frac{\pi}{2}\ \frac{\hat{Z}_{ip_{1,n}-1}(x)-\hat{Z}_{ip_{2,n}+1}(x)}{\sin[(-b_{2,n}+1)\pi]\cos\pi}$$

根据式（7－61），可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-ip}K_{ip}(x)]=-x^{-ip}K_{ip+1}(x)$$

式（7－65）得证。式（7－66）和（7－67）的证明需要遇到下面的递推公式，最后再证明（7－66）（7－67）。

(2) $K_{ip}(x)$ 多项式递推关系式

$$-(\mathrm{i}p)^{*}\ \frac{K_{ip}(x)}{x}-K_{ip-1}(x)=\frac{\mathrm{d}K_{ip}(x)}{\mathrm{d}x} \tag{7-68}$$

$$\mathrm{i}p\,\frac{K_{ip}(x)}{x}-K_{ip+1}(x)=\frac{\mathrm{d}K_{ip}(x)}{\mathrm{d}x} \tag{7-69}$$

$$K_{ip-1}(x)-K_{ip+1}(x)=\frac{2b}{x}K_{ip}(x) \tag{7-70}$$

$$\frac{\mathrm{i}a}{x}K_{ip}(x)-[K_{ip-1}(x)+K_{ip+1}(x)]\ \frac{1}{2}=\frac{\mathrm{d}K_{ip}(x)}{\mathrm{d}x} \tag{7-71}$$

证明：

将 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^{ip})^{*}K_{ip}(x)]=-(x^{ip})^{*}K_{ip-1}(x)$ 左端的导数求出，化简后可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^{ip})^{*}K_{ip}(x)]=(x^{ip})^{*}\ \frac{\mathrm{d}K_{ip}(x)}{\mathrm{d}x}+K_{ip}(x)\ \frac{\mathrm{d}\,(x^{ip})^{*}}{\mathrm{d}x}=-(x^{ip})^{*}K_{ip-1}(x)$$

$$(x^{ip})^{*}\ \frac{\mathrm{d}K_{ip}(x)}{\mathrm{d}x}+K_{ip}(x)\ \frac{\mathrm{d}\,(x^{ip})^{*}}{\mathrm{d}x}=-(x^{ip})^{*}K_{ip-1}(x)$$

考虑到 $\frac{\mathrm{d}\,(x^{ip})^{*}}{\mathrm{d}x}=\frac{(-b-\mathrm{i}a)x^{-b-\mathrm{i}a}}{x}$，上式可推导为

$$\frac{\mathrm{d}K_{ip}(x)}{\mathrm{d}x}+K_{ip}(x)\ \frac{(\mathrm{i}p)^{*}}{x}=-K_{ip-1}(x) \tag{7-72}$$

类似地，将 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-ip}K_{ip}(x)]=-x^{-ip}K_{ip+1}(x)$ 左端的导数求出，化简后可得

$$\frac{\mathrm{d}K_{ip}(x)}{\mathrm{d}x}-K_{ip}(x)\ \frac{(\mathrm{i}p)}{x}=-K_{ip+1}(x) \tag{7-73}$$

式（7－72）减式（7－73）可得

$$K_{ip-1}(x)-K_{ip+1}(x)=\frac{2b}{x}K_{ip}(x)$$

式（7－70）得证。根据式（7－70），已知 $K_{ip-1}(x)$，$K_{ip}(x)$ 可求得 $K_{ip+1}(x)$ 。

式（7－72）加上式（7－73）可得

$$\frac{\mathrm{i}a}{x}K_{ip}(x)-[K_{ip-1}(x)+K_{ip+1}(x)]\ \frac{1}{2}=\frac{\mathrm{d}K_{ip}(x)}{\mathrm{d}x}$$

式（7－71）得证。根据式（7－71），已知 $K_{ip}(x)$，$K_{ip-1}(x)$，$K_{ip+1}(x)$ 可求得 $\frac{\mathrm{d}K_{ip}(x)}{\mathrm{d}x}$。

将式（7 - 70）和（7 - 71）中消去 $K_{ip+1}(x)$，可得

$$-(\mathrm{i}p)^{*}\frac{K_{ip}(x)}{x}-K_{ip-1}(x)=\frac{\mathrm{d}K_{ip}(x)}{\mathrm{d}x}$$

式（7 - 68）得证。根据式（7 - 68），已知 $K_{ip}(x)$，$\frac{\mathrm{d}K_{ip}(x)}{\mathrm{d}x}$ 可求得 $K_{ip-1}(x)$。

将式（7 - 70）和（7 - 71）中消去 $K_{ip-1}(x)$，可得

$$(\mathrm{i}p)\frac{K_{ip}(x)}{x}-K_{ip+1}(x)=\frac{\mathrm{d}K_{ip}(x)}{\mathrm{d}x}$$

式（7 - 69）得证。根据式（7 - 69），已知 $K_{ip}(x)$，$\frac{\mathrm{d}K_{ip}(x)}{\mathrm{d}x}$ 可求得 $K_{ip+1}(x)$。

式（7 - 68）～（7 - 71）为第二类变形复数柱多项式 $K_{ip}(x)$ 的递推公式。

下面证明式（7 - 66）和（7 - 67）：将 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^{\mathrm{i}p})^{*}K_{ip}(x)]=-(x^{\mathrm{i}p})^{*}K_{ip-1}(x)$ 改写为

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^{\mathrm{i}p})^{*}K_{ip}(x)]=-(x^{\mathrm{i}p})^{*}\frac{K_{ip-1}(x)}{x} \tag{7-74}$$

$$\begin{aligned}(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})^{2}[(x^{\mathrm{i}p})^{*}K_{ip}(x)]&=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^{\mathrm{i}p})^{*}K_{ip}(x)]\}\\&=\frac{1}{x^{2}}\{-\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^{\mathrm{i}p})^{*}K_{ip}(x)]+\frac{\mathrm{d}^{2}}{\mathrm{d}x^{2}}[(x^{\mathrm{i}p})^{*}K_{ip}(x)]\}\end{aligned} \tag{7-75}$$

根据式（7 - 64），可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^{2}}{\mathrm{d}x^{2}}[(x^{\mathrm{i}p})^{*}K_{ip}(x)]&=\frac{\mathrm{d}}{dx}[-(x^{\mathrm{i}p})^{*}K_{ip-1}(x)]\\&=-(-\mathrm{i}a-b)x^{-\mathrm{i}a-b-1}K_{ip-1}(x)-(x^{\mathrm{i}p})^{*}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}K_{ip-1}(x)\end{aligned}$$

根据递推公式（7 - 68），可得

$$-(\mathrm{i}p-1)^{*}\frac{K_{ip-1}(x)}{x}-K_{ip-2}(x)=\frac{\mathrm{d}K_{ip-1}(x)}{\mathrm{d}x}$$

这样可得

$$(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})^{2}[(x^{\mathrm{i}p})^{*}K_{ip}(x)]=\frac{1}{x^{\mathrm{i}a-b+2}}K_{ip-2}(x) \tag{7-76}$$

再考虑 $(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})^{3}[(x^{\mathrm{i}p})^{*}K_{ip}(x)]$，根据式（7 - 76）可得

$$(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})^{3}[(x^{\mathrm{i}p})^{*}K_{ip}(x)]=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\frac{1}{x^{\mathrm{i}a-b+2}}K_{ip-2}(x)] \tag{7-77}$$

根据递推公式（7 - 68），可得

$$-(\mathrm{i}p-2)^{*}\frac{K_{ip-2}(x)}{x}-K_{ip-3}(x)=\frac{\mathrm{d}K_{ip-2}(x)}{\mathrm{d}x} \tag{7-78}$$

将式（7 - 78）代入式（7 - 77）可得

$$(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x})^{3}[(x^{\mathrm{i}p})^{*}K_{ip}(x)]=(-1)^{3}(x^{\mathrm{i}p})^{*}x^{-3}K_{ip-3}(x)$$

循环进行以上步骤，可得

$$(\frac{d}{xdx})^k[(x^{ip})^* K_{ip}(x)] = (-1)^k (x^{ip})^* x^{-k} K_{ip-k}(x)$$

式（7-66）得证。

下面证明式（7-67）。

将 $\frac{d}{dx}[x^{-ip}K_{ip}(x)] = -x^{-ip}K_{ip+1}(x)$ 改写为

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}[x^{-ip}K_{ip}(x)] = -x^{-ip}\frac{K_{ip+1}(x)}{x} \tag{7-79}$$

$$(\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^2[x^{-ip}K_{ip}(x)] = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\{\frac{1}{x}\frac{d}{dx}[x^{-ip}K_{ip}(x)]\} = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}[-x^{-ip}\frac{K_{ip+1}(x)}{x}]$$
$$= \frac{1}{x^2}x^{-ip}[\frac{1}{x}K_{ip+1}(x) + ipK_{ip+1}(x) - \frac{dK_{ip+1}(x)}{dx}] \tag{7-80}$$

根据递推公式（7-69），可得

$$(ip+1)\frac{K_{ip+1}(x)}{x} - K_{ip+2}(x) = \frac{dK_{ip+1}(x)}{dx}$$

这样可得

$$(\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^2[x^{-ip}K_{ip}(x)] = \frac{1}{x^{ip+2}}K_{ip+2}(x) \tag{7-81}$$

再考虑 $(\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^3[x^{-ip}K_{ip}(x)]$，根据式（7-81）可得

$$(\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^3[x^{-ip}K_{ip}(x)] = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}[\frac{1}{x^{ia-b+2}}K_{ip+2}(x)] \tag{7-82}$$

根据递推公式（7-69），可得

$$(ip+2)\frac{K_{ip+2}(x)}{x} - K_{ip+3}(x) = \frac{dK_{ip+2}(x)}{dx} \tag{7-83}$$

将式（7-82）右式化简并代入式（7-83）可得

$$(\frac{d}{xdx})^3[x^{-ip}K_{ip}(x)] = (-1)^3 x^{-ip}x^{-3}K_{ip+3}(x)$$

循环进行以上步骤，可得

$$(\frac{d}{xdx})^k[x^{-ip}K_{ip}(x)] = (-1)^k x^{-ip}x^{-k}K_{ip+k}(x)$$

式（7-67）得证。

可以容易证明第二类变形贝塞尔函数的微分公式、递推公式是第二类变形复数柱多项式函数 $K_{ip}(x)$ 微分公式、递推公式的特殊情况。

变形 Z_{ip} 方程（7-10）的解也可写为

$$f_n(x) = A_{1,n}\hat{Z}_{ip_{2,n}}(x) + A_{2,n}K_{ip}(x) \tag{7-84}$$

式中 $A_{1,n}$ 、$A_{2,n}$ 为复数常数。

类似地，由于 $K_{ip}(x)$ 为复数函数，$e^{in\theta}$ 也是复数函数，在许多情况下 $K_{ip}(x)$ 和 $e^{in\theta}$ 是互相耦合，由此下面给出一个新的复数函数一第二类变形复数柱函数 $K_{ip}(x,\theta)$

$$K_{ip}(x,\theta) = K_{ip}(x)e^{in\theta} \tag{7-85}$$

由式（7-63），可得

$$K_{ip}(x,\theta) = x^{ia_{2,n}}e^{in\theta}K_{-b_{2,n}}(x) \tag{7-86}$$

无疑，对于某些各向异性问题，在特征根 $p_{l,n} = a_{l,n} + ib_{l,n}$ 中实部 $a_{l,n}$ 不为 0、虚部 $b_{l,n}$ 是整数情况下，第二类变形复数柱函数就需要计算。根据（7-63）和 $K_0(x)$、$K_n(x)$ 解即可计算第二类变形复数柱函数 $K_{ip}(x,\theta)$

$$K_0(x) = -I_0(x)(\ln\frac{x}{2}+C) + \frac{(x/2)^2}{(1!)^2} + (1+\frac{1}{2})\frac{(x/2)^4}{(2!)^2} + (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})\frac{(x/2)^6}{(3!)^2} + \cdots$$

$$K_1(x) = \frac{1}{z} + I_1(x)(\ln\frac{x}{2}+C) - \frac{x}{2}[\frac{1}{2} + (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2})\frac{(x/2)^2}{1!2!} + (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})\frac{(x/2)^4}{2!3!}$$

$$+(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})\frac{(x/2)^6}{3!4!} + \cdots)$$

$$K_n(x) = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\frac{(n-m-1)!}{m!}(\frac{x}{2})^{2m-n} + (^-1)n+1\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!(n+m)!}(\frac{x}{2})^{2m+n}$$

$$[\ln\frac{x}{2}+C-\frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{m+n}\frac{1}{k+1}+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k})](n=1,2,3,\cdots)$$

其中，$C = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n) = 0.5772\cdots$ 称为欧拉常数。

7.5　第三类变形复数柱多项式函数定义及其递推公式

参照第三类复数柱多项式函数，定义第三类变形复数柱多项式函数

$$\begin{aligned}\hat{H}_{ip}^{(1)}(x) &= \hat{Z}_{ip_{2,n}}(x) + iK_{ip}(x)\\ \hat{H}_{ip}^{(2)}(x) &= \hat{Z}_{ip_{2,n}}(x) - iK_{ip}(x)\end{aligned} \tag{7-87}$$

式中 $\hat{Z}_{ip_{2,n}}(x)$，$K_{ip}(x)$ 分别为第一类、第二类变形复数柱多项式。

根据式（7-15）和（7-63），可得

$$\hat{H}_{ip}^{(1)}(x) = x^{ia_{2,n}}[I_{-b_{2,n}}(x) + iK_{-b_{2,n}}(x)] \tag{7-88}$$

$$\hat{H}_{ip}^{(2)}(x) = x^{ia_{2,n}}[I_{-b_{2,n}}(x) - iK_{-b_{2,n}}(x)] \tag{7-89}$$

$\hat{H}_{ip}^{(1)}(x)$，$\hat{H}_{ip}^{(2)}(x)$ 分别可称为第一种和第二种第三类变形复数柱多项式。

7.6　有关变形复数柱函数的积分公式

有关 $\hat{Z}_{ip}(x)$ 多项式不定积分公式

$$\int x\,(x^{ip})^{*}\,\hat{Z}_{ip}(x)\mathrm{d}x=(x^{ip+1})^{*}\,\hat{Z}_{ip+1}(x)+c \tag{7-90}$$

$$\int \frac{\hat{Z}_{ip}(x)}{x^{ip-1}}\mathrm{d}x=x^{-ip+1}\,\hat{Z}_{ip-1}(x)+c \tag{7-91}$$

有关 $K_{ip}(x)$ 多项式不定积分公式

$$\int x\,(x^{ip})^{*}\,K_{ip}(x)\mathrm{d}x=-(x^{ip+1})^{*}\,K_{ip+1}(x)+c \tag{7-92}$$

$$\int \frac{K_{ip}(x)}{x^{ip-1}}\mathrm{d}x=-x^{-ip+1}K_{ip-1}(x)+c \tag{7-93}$$

证明：

由式（7-53），令 $ip\to ip+1$，可得式（7-90）；由式（7-54），令 $ip\to ip-1$，可得式（7-91）。

类似地，由式（7-64），令 $ip\to ip+1$，可得式（7-92）；由式（7-65），令 $ip\to ip-1$，可得式（7-93）。

有关 $\hat{Z}_{ip}(x)$ 和 $K_{ip}(x)$ 多项式的无穷积分公式

$$\int_0^{\infty} e^{x}K_{ia-b}(x)\mathrm{d}x=-\frac{\Gamma(ia-b+1)\Gamma(ia+b+1)\cos b\pi}{2^{ia+1}\,(3/2)_{ia}\cos(ia\pi)} \tag{7-94}$$

$$\int_0^{\infty} x^{\mu}e^{x}K_{ia-b}(x)\mathrm{d}x=-\frac{\Gamma(ia-b+\mu+1)\Gamma(ia+b+\mu+1)\cos(b\pi)}{2^{ia+\mu+1}\,(3/2)_{ia+\mu}\cos(ia+\mu)\pi} \tag{7-95}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\,\hat{Z}_{ia-b}(x)\mathrm{d}x=\frac{\Gamma(ia-b+1)\Gamma(-1/2-ia)}{\Gamma(1/2)2^{ia}\Gamma(-b-ia)} \tag{7-96}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x}x^{\mu}\,\hat{Z}_{ia-b}(x)\mathrm{d}x=\frac{\Gamma(\mu+ia-b+1)\Gamma(-1/2-\mu-ia)}{\Gamma(1/2)2^{ia+\mu}\Gamma(-b-ia-\mu)} \tag{7-97}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x}K_{ia-b}(x)\mathrm{d}x=\frac{\Gamma(ia-b+1)\Gamma(ia+b+1)}{2^{ia}\,(3/2)_{ia}} \tag{7-98}$$

$$\int_0^{\infty} x^{\mu}e^{-x}K_{ia-b}(x)\mathrm{d}x=\frac{\Gamma(ia-b+\mu+1)\Gamma(ia+b+\mu+1)}{2^{ia+\mu}\,(3/2)_{ia+\mu}} \tag{7-99}$$

式中使用了 Pochhammer 记号 $(\alpha)_k,(\alpha)_0=1,(\alpha)_k=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k-1)$

证明：

由积分 $\int_0^{\infty} e^{x}t^{\mu}\mathrm{K}_{\nu}(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{\Gamma(\mu+\nu+1)\Gamma(\mu-\nu+1)\cos\nu\pi}{2^{\mu+1}\,(3/2)_{\mu}\cos(\mu\pi)}$ 可以得出式（7-94）和（7-95）。

由积分 $\int_0^{\infty} e^{-x}t^{\mu}I_{\nu}(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{\Gamma(\mu+\nu+1)\Gamma(1/2-\mu)}{\Gamma(1/2)2^{\mu}\Gamma(\nu-\mu)}$

其中 $\mathrm{Re}(\mu+\nu)>-1,\mathrm{Re}(\mu)<-1/2$，可以得出式（7-96）和（7-97）。

由积分 $\int_0^{\infty} e^{-x}t^{\mu}\mathrm{K}_{\nu}(x)\mathrm{d}x=\dfrac{\Gamma(\mu+\nu+1)\Gamma(\mu-\nu+1)}{2^{\mu}\,(3/2)_{\mu}}$ 其中 $\mathrm{Re}(\mu+\nu)>-1$，

可以得出式（7-98）和（7-99）。

其他有关变形复数柱函数的公式

$$\hat{Z}_{ip}(x)\hat{Z}_{-ip}(x) = I_{-b}(x)I_b(x) \tag{7-100}$$

$$\hat{Z}_{ip}(x)\hat{Z}_{(ip)^*}(x) = [I_{-b}(x)]^2 \tag{7-101}$$

证明：

由变形复数柱函数定义可得

$$\hat{Z}_{ip}(x) = x^{ia}I_{-b}(x)$$

$$\hat{Z}_{-ip}(x) = x^{-ia}I_b(x)$$

以上两式相乘即可得式（7-100）。

考虑到 $\hat{Z}_{(ip)^*}(x) = \hat{Z}_{[i(a+bi)]^*}(x) = \hat{Z}_{-ia-b}(x) = x^{-ia}I_{-b}(x)$，结合 $\hat{Z}_{ip}(x) = x^{ia}I_{-b}(x)$，可得 $\hat{Z}_{ip}(x)\hat{Z}_{(ip)^*}(x) = [I_{-b}(x)]^2$。

7.7　三维 B 型各向异性圆柱稳态热传导方程——B 型柱多项式

本章 7.2 节研究了 A 型各向异性三维圆柱体稳态温度场问题，本节研究 B 型各向异性圆柱体，这种圆柱体可看成同心的薄圆柱壳（壳面纤维沿 z 方向等角缠绕）套间叠加形成的圆柱体，此时，$k_{12}=0, k_{13}=0, k_{23}\neq 0$。

考虑 B 型曲线型各向异性圆柱，圆柱半径为 R，圆柱体高度为 h，在圆柱边界与外界进行热交换，这样圆柱体温度场分布与 (r,θ,z) 有关。柱坐标下稳态热传导控制偏微分方程为

$$k_{11}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + k_{22}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + k_{33}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + 2k_{23}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta \partial z} + q = 0 \tag{7-102}$$

其中 $T(r,\theta,z)$ 为柱体温度分布函数，q 是热源函数。$k_{jk}(j,k=1,2,3)$ 中的下标 1 为径向 r 方向，下标 2 代表切向 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$，下标 3 代表 z 方向 $(0\leqslant z\leqslant h)$，$k_{jk}(j,k=1,2,3)$ 为热传导系数。三维各向异性圆柱体可以看作是增强纤维缠绕形成的三维柱体。B 型各向异性圆柱体热传导系数计算如下

$$\begin{cases} k_{22} = k_2\cos^2\beta + k_3\sin^2\beta \\ k_{23} = (k_2 - k_3)\sin\beta\cos\beta \\ k_{33} = k_2\sin^2\beta + k_3\cos^2\beta \\ k_{13} = 0 \\ k_{12} = 0 \\ k_{11} = k_1 \end{cases} \tag{7-103}$$

其中 k_1, k_2, k_3 分别为 r 方向，切向 θ 方向，z 方向主热传导系数，β 为平行于 z 轴柱面内的最大热传导方向与 z 向母线的夹角。

引入参数变换式（7-2），方程（7-102）变换为

$$K_{11}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + K_{22}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + K_{33}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + 2K_{23}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta \partial z} = 0 \tag{7-104}$$

设

$$T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} Z_n(r,z) \tag{7-105}$$

其中 n 为整数，λ 为特征根。

当 $n=0$，将式（7－105）代入方程（7－104），可得

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial Z_0(r,z)}{\partial r}\right) + K_{33}\frac{\partial^2 Z_0(r,z)_0}{\partial z^2} + q^* = 0 \tag{7-106a}$$

上式采用常规贝塞尔函数和分离变量法可得解为

$$Z_0(r,z) = \sum_{j=1}^{\infty}(A\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}z} + B\,\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}z})[C\,\mathrm{J}_0(\sqrt{\lambda K_{33}}r) + D\,\mathrm{Y}_0(\sqrt{\lambda K_{33}}r)] + c_0 + d_0\ln r \tag{7-106b}$$

其中 A，B，C，D，c_0，d_0 为实数待定常数；$J_0(x)$，$Y_0(x)$ 分别为 0 阶第一类、第二类贝塞尔函数。

当 $n\neq 0$，设

$$Z_n(r,z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda jz}f(r) \tag{7-107}$$

记 $\lambda_n^{(j)} = j\lambda$，式（7－105）可改写为

$$T = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n^{(j)}z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}f_n(r) \tag{7-108}$$

当 $n\neq 0$，将式（7－108）代入方程（7－104），可得

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2 f_n}{\mathrm{d}r^2} + r\frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}r} + f_n[-K_{33}(\lambda_n^{(j)})^2 r^2 - 2rK_{23}n\lambda_n^{(j)} - K_{22}n^2] = 0 \tag{7-109}$$

方程（7－109）是一新方程，对于各向同性或正交异性热传导问题，$K_{23}=0$，方程（7－109）退化为变形贝塞尔方程。当 $K_{23}\neq 0$，称方程（7－109）为 B 型各向异性柱方程。

引入参数变换

$$x = r\lambda_n^{(j)} \tag{7-110}$$

方程（7－109）可变换为

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2 f_n}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}x} + f_n(-K_{33}x^2 - 2K_{23}nx - K_{22}n^2) = 0 \tag{7-111}$$

设

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}A_{n,j,k}x^{k+\mathrm{i}s} \tag{7-112}$$

其中 k 整数，s 是特征根。$A_{n,j,k}$ 是复数常数，这有别于常规变形贝塞尔函数方法。设计算中 k 最大取为 $2K$。

采用第 5 章类似方法求解，可得 $s_{l,n} = a_{l,n} + \mathrm{i}b_{l,n}$

其中 $l=1$，2。

$$\begin{cases} a_{1,n} = 0 \\ b_{1,n} = n\sqrt{K_{22}} \\ a_{2,n} = 0 \\ b_{2,n} = -n\sqrt{K_{22}} \end{cases} \tag{7-113}$$

和递推公式

$$\begin{cases} A_{1,n,j,k+1} = \dfrac{-2K_{23}nA_{1,n,k} + (\lambda_n^{(j)})^2 K_{33} A_{1,n,k-1}}{(k+1)(k+1-2n\sqrt{K_{22}})} \\ A_{2,n,j,k+1} = \dfrac{-2K_{23}nA_{2,n,k} + (\lambda_n^{(j)})^2 K_{33} A_{2,n,k-1}}{(k+1)(k+1+2n\sqrt{K_{22}})} \end{cases} \tag{7-114}$$

注意上式为考虑 $s_{1,n}, s_{2,n}$ 不同，在待定常数 $A_{n,j,k}$ 引入新的下标 l。

根据式（7-114）进行迭代计算，$A_{l,n,j,k} = A_{l,n,j,0}\lambda_{l,n}^{(j)}X_1(l,n,k)$。实数系数 $X_1(l,n,k)$ 按以下递推公式求解

$$\begin{cases} X_1(1,n,1) = -\dfrac{2K_{23}n}{1-2n\sqrt{K_{22}}}, k = 0 \\ X_1(1,n,k+1) = \dfrac{-2K_{23}nX_1(1,n,k) + K_{33}X_1(1,n,k-1)}{(k+1)(k+1-2n\sqrt{K_{22}})}, k > 0 \\ X_1(2,n,1) = -\dfrac{2K_{23}n}{1+2n\sqrt{K_{22}}}, k = 0 \\ X_1(2,n,k+1) = \dfrac{-2K_{23}nX_1(2,n,k) + K_{33}X_1(2,n,k-1)}{(k+1)(k+1+2n\sqrt{K_{22}})}, k > 0 \end{cases} \tag{7-115}$$

注意上式为考虑 $s_{1,n}, s_{2,n}$ 不同，在待定常数 $A_{n,k}$ 引入新的下标 l。采用 7.2 节求解思路，可以得到

$$f(x) = Z_{l,n}^{(b)}(x)A_{l,n,j,0} \tag{7-116}$$

式中引入 $Z_{l,n}^{(b)}(x)$ 多项式

$$Z_{l,n}^{(b)}(x) = r^{-b_{l,n}}[1 + X_1(l,n,1)x + X_1(l,n,2)x^2 + \cdots + X_1(l,n,k)x^k + \cdots] \tag{7-117}$$

$Z_{l,n}^{(b)}(x)$ 是一个新的实数多项式函数，可称为 B 型柱多项式（注意：$Z_{l,n}^{(b)}(x)$ 为实数多项式，不能称为复数柱多项式）。$Z_{l,n}^{(b)}(x)$ 有 $X_1(l,n,1)$，$X_1(l,n,3)$，… 等奇次项的存在，式（7-117）与贝塞尔函数系列结构不同。但后续研究表明，当 $k_{23} = 0$，$Z_{l,n}^{(b)}(x)$ 可退化为 $-b_{l,n}$ 阶第一类贝塞尔函数 $J_{-b_{l,n}}(x)$，读者可以自行求解。

综合式（7-108）（7-112）（7-116）和（7-117），可得

$$T = \sum_{l=1}^{2}\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=-\infty,j\neq 0}^{\infty} A_{l,n,j,0}\mathrm{e}^{in\theta}\mathrm{e}^{i\lambda_{l,n}^{(j)}z}Z_{l,n}^{(b)}(x) + C(r,\theta) + Z_0(r,z) \tag{7-118}$$

将式（7-118）代入圆柱体侧面边界条件可得特征方程，即可确定特征根 $\lambda_{l,n}^{(j)}$。当 $n=0, j=0$ 对于的函数解可以单独处理，以下只考虑 $n\neq 0, j\neq 0$ 情况下式（7-118）的求解。

7.7.1 柱侧面具有第一类边界条件的 B 型各向异性实心圆柱体稳态问题解

(1) 解析解求解

柱侧面具有第一类边界条件 B 型各向异性实心圆柱体边界条件如下

$$r=R, T(R,\theta,z)=0$$

$$r=0, T(0,\theta,z)\text{ 有限}$$

考虑函数有限自然条件，$n>0$ 时，式（7－118）只能选 $l=2$；$n<0$ 时，式（7－118）只能选 $l=1$，这样可得

$$T=\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=-\infty,j\neq 0}^{\infty}A_{l,n,j,0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}e^{\mathrm{i}\lambda_{l,n}^{(j)}z}Z_{l,n}^{(b)}(x)+C(r,\theta)+Z_0(r,z) \tag{7-119}$$

将式（7－119）代入边界条件，可得

$$Z_{l,n}^{(b)}(x)=0 \tag{7-120}$$

求解式（7－120）可得零点 $\overset{0}{\mu}_{l,n,j}$。

$Z_{l,n}^{(b)}(x)$ 是实数多项式，如果出现虚数根，会对偶出现

$$\overset{0}{\mu}_{l,n,j}=c_{l,n}^{(j)}\pm \mathrm{i}d_{l,n}^{(j)} \tag{7-121}$$

计算时可以将特征根进行排序：当式（7－117）中的 x 幂次最大取 $2K$，$n>0$ 时，可以求得这样 $2K$ 个虚数根 $c_{l,n}^{(1)}+\mathrm{i}d_{l,n}^{(1)},c_{l,n}^{(2)}+\mathrm{i}d_{l,n}^{(2)},\cdots,c_{l,n}^{(K)}+\mathrm{i}d_{l,n}^{(K)},c_{l,n}^{(1)}-\mathrm{i}d_{l,n}^{(1)},c_{l,n}^{(2)}-\mathrm{i}d_{l,n}^{(2)},\cdots,c_{l,n}^{(K)}-\mathrm{i}d_{l,n}^{(K)},\cdots$

其中 $d_{l,n}^{(j)}>0$。

那么 $n<0$ 时，同样可以求得 $2K$ 个虚数根

$-c_{l,n}^{(1)}+\mathrm{i}d_{l,n}^{(1)},-c_{l,n}^{(2)}+\mathrm{i}d_{l,n}^{(2)},\cdots,-c_{l,n}^{(K)}+\mathrm{i}d_{l,n}^{(K)},-c_{l,n}^{(1)}-\mathrm{i}d_{l,n}^{(1)},-c_{l,n}^{(2)}-\mathrm{i}d_{l,n}^{(2)},\cdots,-c_{l,n}^{(K)}-\mathrm{i}d_{l,n}^{(K)},\cdots$

其中 $d_{l,n}^{(j)}>0$。

$$\lambda_{l,n}^{(j)}=\frac{\overset{0}{\mu}_{l,n,j}}{R} \tag{7-122}$$

由此可得

$$T=\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=-\infty,j\neq 0}^{\infty}A_{l,n,j,0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}e^{\mathrm{i}\frac{\overset{0}{\mu}_{l,n,j}}{R}z}Z_{l,n}^{(b)}(\frac{r}{R}\overset{0}{\mu}_{l,n,j})+C(r,\theta)+Z_0(r,z) \tag{7-123}$$

对于 $\frac{\overset{0}{\mu}_{l,n,j}}{R}=c_{l,n}^{(j)}+\mathrm{i}d_{l,n}^{(j)}$，定义

$$\left(\frac{\overset{0}{\mu}_{l,n,j}}{R}\right)^{k-b_{l,n}}=R_{l,n,j,k}+\mathrm{i}I_{l,n,j,k} \tag{7-124}$$

其中 $c_{l,n}^{(j)},d_{l,n}^{(j)}$，$R_{l,n,j,k},I_{l,n,j,k}$ 为实数。

定义：实数多项式 $Z_{l,n,r}^{(b)}(r),Z_{l,n,i}^{(b)}(r)$

$$Z_{l,n,r}^{(b)}(\frac{r}{R}\overset{0}{\mu}_{l,n,j})=r^{-b_{l,n}}[R_{l,n,j,0}+\sum_{k=1}^{\infty}R_{l,n,j,k}X(l,n,k)r^k] \tag{7-125}$$

$$Z_{l,n,i}^{(b)}(\frac{r}{R}\overset{0}{\mu}_{l,n,j})=r^{-b_{l,n}}\sum_{k=1}^{\infty}I_{l,n,j,k}X(l,n,k)r^k \tag{7-126}$$

根据式（7－125）和（7－126），可得

$$Z_{l,n}^{(b)}(\frac{r}{R}\mu_{l,n,j}^{0}) = Z_{l,n,r}^{(b)}(\frac{r}{R}\mu_{l,n,j}^{0}) + iZ_{l,n,i}^{(b)}(\frac{r}{R}\mu_{l,n,j}^{0}) \tag{7-127}$$

根据数学物理实数化原理，$T(r,\theta,z)$ 解应该可以化简为实数函数。根据有关函数关于 n 的奇偶性，可将 $-n$ 对应级数项归并入 n 对应的级数项

$$T = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}4(e^{-\frac{d_{l,n}^{(j)}}{R}z}\{A_{l,n,j,0,r}[Z_{l,n,r}^{(b)}(\frac{r}{R}\mu_{l,n,j}^{0})\cos(z\frac{c_{l,n}^{(j)}}{R}+n\theta) - Z_{l,n,i}^{(b)}(\frac{r}{R}\mu_{l,n,j}^{0})\sin(z\frac{c_{l,n}^{(j)}}{R}+n\theta)] - A_{l,n,j,0,i}[Z_{l,n,r}^{(b)}(\frac{r}{R}\mu_{l,n,j}^{0})\sin(\frac{c_{l,n}^{(j)}}{R}+n\theta) + Z_{l,n,i}^{(b)}(\frac{r}{R}\mu_{l,n,j}^{0})\cos(z\frac{c_{l,n}^{(j)}}{R}+n\theta)]\} + 4e^{\frac{d_{l,n}^{(j)}}{R}z}\{B_{l,n,j,0,r}[Z_{l,n,r}^{(b)}(\frac{r}{R}\mu_{l,n,j}^{0})\cos(z\frac{c_{l,n}^{(j)}}{R}+n\theta) + Z_{l,n,i}^{(b)}(\frac{r}{R}\mu_{l,n,j}^{0})\sin(z\frac{c_{l,n}^{(j)}}{R}+n\theta)] - B_{l,n,j,0,i}[Z_{l,n,r}^{(b)}(\frac{r}{R}\mu_{l,n,j}^{0})\sin(z\frac{c_{l,n}^{(j)}}{R}+n\theta) - Z_{l,n,i}^{(b)}(\frac{r}{R}\mu_{l,n,j}^{0})\cos(z\frac{c_{l,n}^{(j)}}{R}+n\theta)]\}) + Z_0(r,z) + C(r,\theta) \tag{7-128}$$

其中 $A_{l,n,j,0,r}$、$A_{l,n,j,0,i}$、$B_{l,n,j,0,r}$、$B_{l,n,j,0,i}$ $(n=1,\cdots,\infty,j=1,\cdots,\infty)$ 为实数。$Z_0(r,z)$ 为 $n=0$，$j\neq 0$ 时式（7-108）解，具体见本章 7.2 节定义，$Z_0(r,z) = \sum_{j=1}^{\infty}[A_j\ e^{\frac{\mu_j^0}{R\sqrt{K_{33}}}z} + B_j \times e^{-\frac{\mu_j^0}{R\sqrt{K_{33}}}z}]J_0(\frac{\mu_j^0}{R}r)$。$C(r,\theta)$ 为 $j=0$，$n\neq 0$ 时式（7-108）解，解形式及求解可见第五章第 5.2 节，$C(r,\theta)$ 可以单独求解。实际计算中，式（7-128）中 n 不可能取无限大，设 n 最大取为 N，k 最大取得 K，当 $n>0$，j 最大为 $J_{l,n,K}$；$n=0$，$Z_0(r,z)$ 中的贝塞尔函数特征根个数为 J_0。这样（7-128）共有（$4\times N\times J_{l,n,K}+2J_0$）个未知数，将式（7-128）代入柱体 $z=0$ 和 $z=h$ 两个边界条件，可以形成两个方程，将 2 个边界条件方程左右两端进行两步展开，第一步展开为关于 θ 的傅立叶级数，第二步再展开为贝塞尔函数 $J_{-b_{l,n}}(x)$（针对 $n>0$ 级数项）和 $J_0(x)$（针对 $n=0$ 级数项），根据傅立叶—贝塞尔函数正交性可形成（$4\times N\times J_{l,n,K}+2J_0$）个方程，可求解（$4\times N\times J_{l,n,K}+2J_0$）个未知数。至此，此数学物理问题得解。

(2) 数值计算

考虑实心各向异性圆柱体，材料的热传导系数为 $k_1=2.6364$kcal/(m·h·℃)，$k_2=1.301$kcal/(m·h·℃)，$k_3=0.6$kcal/(m·h·℃)，$R=1$m，$h=1$m，$q=0$。柱体上端面（$z_2=1$m）温度分布为 $[10(r-r^3)\cos(0.1\ln r+\theta)]$℃，柱体下端面（$z_1=0$m）温度分布为 $[(r-r^3)\cos(a_{2,1}\ln r+\theta)]$℃。侧面（$r=1$m）温度为 0℃。

1) $X_1(l,n,k)$ 分布情况

系数 $X_1(l,n,k)$ 可以根据式（7-115）计算获得。根据不同的各向异性角 β，计算结果（$2K=60$，$n=1$）见表 7-6 和表 7-7。

表 7-6 $X_1(l,n,k)$ 与 k 的计算趋势($l=1$)

β / k	10°	45°	80°
1	−2.311092062375020E−001	−1.323625958127090	3.111677048648328
2	1.769021702864641E−001	5.372666081743582E−003	3.733080661304837E−001
3	−7.959706723417238E−003	−8.815017788240245E−002	2.537155609537332E−001
4	3.928099566493390E−003	−1.920381871237669E−003	1.686062716238490E−002
5	−8.418616669625086E−005	−1.699939719789093E−003	6.189856518723690E−003
6	3.320693533734841E−005	−3.974189479205515E−005	2.899068390514716E−004
7	−4.284427260856650E−007	−1.535813701824438E−005	7.182352261202586E−005
8	1.472907578810410E−007	−3.384951129388698E−007	2.618876036020744E−006
9	−1.278828036950074E−009	−8.016668883953179E−008	4.858014863177975E−007
10	4.018532262195150E−010	−8.016668883953179E−008	1.456973501167522E−008

表 7-7 $X_1(l,n,k)$ 与 k 的计算趋势($l=2$)

β / k	10°	45°	80°
1	3.799492196506061E−002	1.208119567544075E−001	4.614466463745370E−002
2	3.522266592976936E−002	6.133505171099800E−002	8.241196885413425E−002
3	9.221816024048669E−004	4.750179178825683E−003	2.509662823885235E−003
4	3.885396466096305E−004	1.123662011251683E−003	2.023618550213053E−003
5	7.901801932191550E−006	6.487314037473275E−005	4.697434186384575E−005
6	2.079728958124335E−006	9.775714729055381E−006	2.359026057900144E−005
7	3.490461268754503E−008	4.527034650116896E−007	4.471585525386895E−007
8	6.562517427662675E−009	4.951704894163813E−008	1.601415922727131E−007
9	9.429349205740687E−011	1.921175770498287E−009	2.581324339451682E−009
10	1.364558202292748E−011	1.639440897600227E−010	7.107685392472270E−010

表 7-6，表 7-7 可看出 $X_1(l,n,k)$ 随 k 递减迅速，这也预示着所得级数解收敛是有基础的。

2) $\mu_{l,n}^{(j)}$ 特征根分布情况

根据式（7-120）可以求解特征根 $\mu_{l,n}^{(j)}$。计算结果（$2K=60,n=1$）显示在表 7-8。其他计算同样表明 7—9 中特征根为对偶出现规律是一般情况。确定了特征根和转换系数 $X_1(l,n,k)$，式（7-128）也就确定了，代入边界条件即可求解数学物理问题。

表 7-8　$\mu^0_{l,n,j}$ 变化趋势，$l=2$

k \ β	0°
1	51.104230329838360i
2	46.759650331869140i
3	40.165590654105930i
4	33.577624622884640i
5	26.988396365889460i
6	20.396698041938340i
7	13.799069230754730i
8	7.180121083489487i
9	−7.180121083489487i
10	−13.799069230754730i
11	−20.396698041938340i
12	−26.988396365889460i
13	−33.577624622884640i
14	−40.165590654105930i
15	−46.759650331869140i
16	−51.104230329838360i

表 7-9　$\mu^0_{l,n,j}$ 变化趋势，$l=2$

k \ β	45°
1	−8.667394093733220E−001+i5.423022369216246
2	−9.872026881876477E−001+i39.736942352084970
3	−1.107421668285721+i10.681415892510430
4	−1.252394772046646+i15.925052657682510
5	−1.356332488273230+i21.163773966365400
6	−1.437379322881311+i26.400222992912430
7	−1.503807923615259+i31.635423532945890
8	−1.576144410584373+i36.877199050959530
9	2.659677298904164+i40.815655755486160
10	−4.765875463273634+i40.248176610035170
20	−29.055999293343460+i42.378654153138280
30	−80.962730732920620+i26.856194834580540
31	−8.667394093733220E−001−i5.423022369216246
32	−9.872026881876477E−001−i39.736942352084970
33	−1.107421668285721−i10.681415892510430
34	−1.252394772046646−i15.925052657682510
35	−1.356332488273230−i21.163773966365400
36	−1.437379322881311−i26.400222992912430
37	−1.503807923615259−i31.635423532945890
38	−1.576144410584373−i36.877199050959530
39	2.659677298904164−i40.815655755486160
40	−4.765875463273634−i40.248176610035170
50	−29.055999293343460−i42.378654153138280
60	−80.962730732920620−i26.856194834580540

7.7.2　柱侧面具有第二类边界条件的 B 型各向异性实心柱体热传导解

对于侧面具有第二类边界条件的 B 型各向异性实心柱体热传导问题，可得边界条件

$$q_r\big|_{r=R}=-\left(k_{11}\frac{\partial T}{\partial r}\right)\Big|_{r=R}=0 \tag{7-129}$$

和自然条件 $T(0,\theta,z)$ 为有限值。

考虑函数有限自然条件，$n>0$ 时，式（7-118）只能选 $l=1$；$n<0$ 时，式（7-118）只能选 $l=2$，这样可得

$$T=\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=-\infty,j\neq 0}^{\infty}A_{l,n,j,0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}e^{\mathrm{i}\lambda_j z}Z^{(b)}_{l,n}(x)+Z_0(r,z)+C(r,\theta) \tag{7-130}$$

将式（7-130）代入边界条件（7-129），可得

$$\frac{\partial Z^{(b)}_{l,n}(x)}{\partial x}=0 \tag{7-131}$$

求解式（7-131）可得零点 $\mu^0_{l,n,j}$，进而可以确定问题解。

7.7.3 侧面具有第三类边界条件的 B 型各向异性实心柱体热传导解

第三类边界条件（边界热对流）为

$$[-(k_{11}\frac{\partial T}{\partial r})+h_m T]|_{r=R}=0 \tag{7-132}$$

和自然条件 $T(0,\theta,z)$ 为有限值。h_m 为柱体与外界环境热对流系数。

考虑 $x=r\lambda_j$，式（7－132）可变换为

$$[-(k_{11}\frac{\partial T}{\partial x})\frac{x}{R}+h_m T]|_{x=R\lambda_j\sqrt{K_{33}}}=0 \tag{7-133}$$

考虑函数有限自然条件，n>0 时，式（7－118）只能选 l=1；n<0 时，式（7－118）只能选 l=2。将式（7－130）代入式（7－133），这样可得

$$[-k_{11}\frac{\partial Z_{l,n}^{(b)}(x)}{\partial x}\frac{x}{R}+h_m Z_{l,n}^{(b)}(x)]|_{x=R\lambda_j\sqrt{K_{33}}}=0 \tag{7-134}$$

求解式（7－134）可得零点 $\mu_{l,n,j}^{0}$。$\mu_{l,n,j}^{0}=R\lambda_{l,n}^{(j)}\sqrt{K_{33}}$。根据特征值 $\lambda_{l,n}^{(j)}$ 可以确定特征函数形式，代入边界条件，对比左右两端系数，可以确定问题解。

7.7.4 侧面具有第一类边界条件的 B 型各向异性空心柱体热传导解

对于侧面具有第一类边界条件的空心柱体热传导问题边界条件为

$$\begin{cases}T(r_1,\theta,z)=0\\T(r_2,\theta,z)=0\end{cases} \tag{7-135}$$

将式（7－118）代入式（7－135），可得特征行列式

$$\begin{vmatrix}Z_{1,n}^{(b)}(r_1\lambda_n^{(j)}) & Z_{2,n}^{(b)}(r_1\lambda_n^{(j)})\\Z_{1,n}^{(b)}(r_2\lambda_n^{(j)}) & Z_{2,n}^{(b)}(r_2\lambda_n^{(j)})\end{vmatrix}=0 \tag{7-136}$$

求解式（7－136）可以确定特征值 $\lambda_n^{(j)}$。根据式（7－136）可得

$$A_{2,n,j,0}=-A_{1,n,j,0}\frac{Z_{1,n}^{(b)}(r_1\lambda_n^{(j)})}{Z_{2,n}^{(b)}(r_1\lambda_n^{(j)})} \tag{7-137}$$

将式（7－137）代入式（7－118）可得

$$T=\mathrm{Re}\{\sum_{n=-\infty,n\neq0}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}A_{1,n,j,0}e^{in\theta}e^{i\lambda_n^{(j)}z}[Z_{1,n}^{(b)}(r\lambda_n^{(j)})-Z_{2,n}^{(b)}(r\lambda_n^{(j)})\frac{Z_{1,n}^{(b)}(r_1\lambda_n^{(j)})}{Z_{2,n}^{(b)}(r_1\lambda_n^{(j)})}]\}+T^{*} \tag{7-138}$$

其中 T^{*} 为 n=0 时相应函数解，$T^{*}=Z_0(r,z)+C(r,\theta)$，读者可自行推导。

7.7.5 侧面具有第二类边界条件的 B 型各向异性空心柱体热传导解

对于内外径都是第二类边界条件的空心圆柱边界条件

$$\begin{cases}q_r|_{r=r_1}=-(k_{11}\frac{\partial T}{\partial r})|_{r=r_1}=0\\q_r|_{r=r_2}=-(k_{11}\frac{\partial T}{\partial r})|_{r=r_2}=0\end{cases} \tag{7-139}$$

对于内外径都是第二类边界条件的空心圆柱采取类似的方法可建立特征矩阵行列式，求出特征值 λ_m 和 $A_{2,n,0,j}$，$A_{1,n,0,j}$ 之间关系式。

特征矩阵行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial Z_{1,n}^{(b)}(x)}{\partial x}\Big|_{x=r_1\lambda_n^{(j)}} & \frac{\partial Z_{2,n}^{(b)}(x)}{\partial x}\Big|_{x=r_1\lambda_n^{(j)}} \\ \frac{\partial Z_{1,n}^{(b)}(x)}{\partial x}\Big|_{x=r_2\lambda_n^{(j)}} & \frac{\partial Z_{2,n}^{(b)}(x)}{\partial x}\Big|_{x=r_2\lambda_n^{(j)}} \end{vmatrix} = 0 \tag{7-140}$$

其中 $x = r\lambda_n^{(j)}\sqrt{K_{33}}$。

求解式（7-140）可以确定特征值 $\lambda_n^{(j)}$。根据式（7-140），可得

$$A_{2,n,j,0} = -A_{1,n,j,0}\frac{\left[\frac{\partial Z_{1,n}^{(b)}(x)}{\partial x}\right]\Big|_{x=r_1\lambda_n^{(j)}}}{\left[\frac{\partial Z_{2,n}^{(b)}(x)}{\partial x}\right]\Big|_{x=r_1\lambda_n^{(j)}}} \tag{7-141}$$

将式（7-141）代入式（7-118），可得

$$T = \mathrm{Re}\{\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} A_{1,n,j,0}\mathrm{e}^{in\theta}e^{i\lambda_n^{(j)}z}[Z_{1,n}^{(b)}(r\lambda_n^{(j)}) - Z_{2,n}^{(b)}(r\lambda_n^{(j)})\frac{\frac{\partial Z_{1,n}^{(b)}(x)}{\partial x}\Big|_{x=r_1\lambda_n^{(j)}}}{\frac{\partial Z_{2,n}^{(b)}(x)}{\partial x}\Big|_{x=r_1\lambda_n^{(j)}}}]\} + T^{*} \tag{7-142}$$

其中 T^{*} 为 $n=0$ 时相应函数解，$T^{*} = Z_0(r,z) + C(r,\theta)$，读者可自行推导。

7.7.6 侧面具有第三类边界条件的B型各向异性空心柱体热传导解

对于内外径都是第二类边界条件的空心圆柱边界条件为

$$\begin{cases} q_r\big|_{r=r_1} = [-k_{11}\frac{\partial T}{\partial r} + h_m T]\big|_{r=r_1} = 0 \\ q_r\big|_{r=r_2} = [-k_{11}\frac{\partial T}{\partial r} + h_m T]\big|_{r=r_2} = 0 \end{cases} \tag{7-143}$$

考虑变换 $x = r\lambda_n^{(j)}\sqrt{K_{33}}$，式（7-143）可改写为

$$\begin{cases} (-k_{11}\frac{\partial T}{\partial x}\lambda_n^{(j)}\sqrt{K_{33}} + h_m T)\big|_{x=x_1} = 0 \\ (-k_{11}\frac{\partial T}{\partial x}\lambda_n^{(j)}\sqrt{K_{33}} + h_m T)\big|_{x=x_2} = 0 \end{cases} \tag{7-144}$$

式中 $x_1 = r_1\lambda_n^{(j)}\sqrt{K_{33}}$，$x_2 = r_2\lambda_n^{(j)}\sqrt{K_{33}}$。

将式（7-118）代入式（7-144），根据待定系数 $A_{1,n,j,0}$，$A_{2,n,j,0}$ 不全为0的条件，可得特征行列式：

$$\begin{vmatrix} [-k_{11}\lambda_n^{(j)}\sqrt{K_{33}}(\frac{\partial Z_{1,n}^{(b)}(x)}{\partial x}) + h_m Z_{1,n}^{(b)}(x)]\big|_{x=x_1} & [-k_{11}\lambda_n^{(j)}\sqrt{K_{33}}(\frac{\partial Z_{2,n}^{(b)}(x)}{\partial x}) + h_m Z_{2,n}^{(b)}(x)]\big|_{x=x_1} \\ [-k_{11}\lambda_n^{(j)}\sqrt{K_{33}}(\frac{\partial Z_{1,n}^{(b)}(x)}{\partial x}) + h_m Z_{1,n}^{(b)}(x)]\big|_{x=x_2} & [-k_{11}\lambda_n^{(j)}\sqrt{K_{33}}(\frac{\partial Z_{2,n}^{(b)}(x)}{\partial x}) + h_m Z_{2,n}^{(b)}(x)]\big|_{x=x_2} \end{vmatrix} = 0 \tag{7-145}$$

求解式（7－145）可以确定特征值 $\lambda_n^{(j)}$ 。根据式（7－145），可得

$$A_{2,n,j,0}=-A_{1,n,j,0}\frac{\left[-k_{11}\lambda_n^{(j)}\sqrt{K_{33}}\left(\frac{\partial Z_{1,n}^{(b)}(x)}{\partial x}\right)+h_m Z_{1,n}^{(b)}(x)\right]\Big|_{x=x_1}}{\left[-k_{11}\lambda_n^{(j)}\sqrt{K_{33}}\left(\frac{\partial Z_{2,n}^{(b)}(x)}{\partial x}\right)+h_m Z_{2,n}^{(b)}(x)\right]\Big|_{x=x_1}} \tag{7-146}$$

将式（7－146）代入式（7－118）可得

$$T=T^*+\mathrm{Re}\Big(\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}A_{1,n,j,0}e^{in\theta}e^{i\lambda_n^{(j)}z}\Big\{Z_{1,n}^{(b)}(r\lambda_n^{(j)})-Z_{2,n}^{(b)}(r\lambda_n^{(j)})\frac{\left[-k_{11}\lambda_n^{(j)}\sqrt{K_{33}}\left(\frac{\partial Z_{1,n}^{(b)}(x)}{\partial x}\right)+h_m Z_{1,n}^{(b)}(x)\right]\Big|_{x=x_1}}{\left[-k_{11}\lambda_n^{(j)}\sqrt{K_{33}}\left(\frac{\partial Z_{2,n}^{(b)}(x)}{\partial x}\right)+h_m Z_{2,n}^{(b)}(x)\right]\Big|_{x=x_1}}\Big\}\Big) \tag{7-147}$$

其中 T^* 为 $n=0$ 时相应函数解，$T^*=Z_0(r,z)+C(r,\theta)$ ，读者可自行推导。

7.8　三维 C 型各向异性圆柱稳态热传导方程——C 型复数柱多项式

本节研究三维 C 型各向异性圆柱稳态热传导方程（ $k_{12}=0,k_{13}\neq 0,k_{23}=0$ ）的稳态温度场问题。考虑曲线型各向异性圆柱，圆柱半径为 R，圆柱体高度为 h，在圆柱边界与外界进行热交换，这样圆柱体温度场分布与 (r,θ,z) 有关。柱坐标下稳态热传导控制偏微分方程为

$$k_{11}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+k_{22}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}+k_{33}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+2k_{13}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 T}{\partial r\partial z}+k_{13}\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial z}+q=0 \tag{7-148}$$

其中 $T(r,\theta,z)$ 为柱体温度分布函数，q 是热源函数。$k_{jk}(j,k=1,2,3)$ 中的下标 1 为径向 r 方向，下标 2 代表切向 θ $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 方向，下标 3 代表 z 方向 $(0\leqslant z\leqslant h)$，$k_{jk}(j,k=1,2,3)$ 为热传导系数。三维各向异性圆柱体可以看作是增强纤维缠绕形成的三维柱体。本节计算中 C 型模式圆柱体可以看作是由柱体纵截面内与 z 轴成固定夹角的纤维围绕 z 轴旋转所形成的三维圆柱体。这种模式下圆柱体热传导系数计算如下

$$\begin{cases}k_{11}=k_1\cos^2\beta+k_3\sin^2\beta\\ k_{12}=0\\ k_{22}=k_2\\ k_{13}=(k_3-k_1)\sin\beta\cos\beta\\ k_{23}=0\\ k_{33}=k_1\sin^2\beta+k_3\cos^2\beta\end{cases} \tag{7-149}$$

其中 k_1,k_2,k_3 分别为 r 方向，切向 θ ，z 方向主热传导系数，β 为沿 z 轴纵向截面内的最大热传导方向与 z 向母线的夹角。第 6 章研究的柱对称问题为本节问题的对称情况特例。

引入参数变换（7－2），将方程（7－148）变换为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+K_{22}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}+K_{33}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+2K_{13}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 T}{\partial r\partial z}+K_{13}\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial z}+q=0 \tag{7-150}$$

设

$$T=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\theta}Z_n(r,z) \tag{7-151}$$

其中 n 为整数。

当 $n=0$，$T=Z_0(r,z)=Z_r(r,z)$。

当 $n\neq 0$，设

$$Z_n(r,z)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}e^{i\lambda jz}f_n(r) \tag{7-152}$$

记 $\lambda_n^{(j)}=j\lambda$，式（7－151）可改写为

$$T=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}e^{i\lambda_n^{(j)}z}e^{in\theta}f_n(r) \tag{7-153}$$

将式（7－153）代入方程（7－150），可得

$$r^2\frac{d^2 f_n}{dr^2}+r\frac{df_n}{dr}(2iK_{13}\lambda_n^{(j)}r+K_{11})+f_n[-K_{33}(\lambda_n^{(j)})^2r^2+riK_{13}\lambda_n^{(j)}-K_{22}n^2]=0 \tag{7-154}$$

引入参数变换

$$x=r\lambda_n^{(j)}$$

方程（7－154）可变换为

$$x^2\frac{d^2 f_n}{dx^2}+x\frac{df_n}{dx}(2iK_{13}x+K_{11})+f_n(-K_{33}x^2+iK_{13}x-K_{22}n^2)=0 \tag{7-155}$$

当 $K_{13}=0$，方程（7－155）可退化为变形贝塞尔方程。当 $K_{13}\neq 0$，方程（7－155）为新的常微分方程，可命名为 C 型各向异性柱方程。

设

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}A_{n,j,k}x^{k+is} \tag{7-156}$$

其中 k 整数，s 是特征根。$A_{n,j,k}$ 是复数常数，这有别于常规变形贝塞尔函数方法。计算中 k 最大取为 $2K$。

采用第 5 章类似方法求解，可得 $s_{l,n}=a_{l,n}+ib_{l,n}$

其中 l=1，2。

$$\begin{cases}a_{1,n}=0\\ b_{1,n}=n\sqrt{K_{22}}\\ a_{2,n}=0\\ b_{2,n}=-n\sqrt{K_{22}}\end{cases} \tag{7-157}$$

和递推公式

$$\begin{cases} A_{1,n,k+1} = \dfrac{-\mathrm{i}K_{13}(1-2n\sqrt{K_{22}}+2k)\lambda_n^{(j)}A_{1,n,k}+K_{33})(\lambda_n^{(j)})^2A_{1,n,k-1}}{(k+1)(k+1-2n\sqrt{K_{22}})} \\ A_{2,n,k+1} = \dfrac{-\mathrm{i}K_{13}(1+2n\sqrt{K_{22}}+2k)\lambda_n^{(j)}A_{2,n,k}+K_{33}(\lambda_n^{(j)})^2A_{2,n,k-1}}{(k+1)(k+1+2n\sqrt{K_{22}})} \end{cases} \tag{7-158}$$

根据式（7－158）进行迭代计算，可得

$$\begin{cases} A_{l,n,k} = \mathrm{i}A_{l,n,0}(\lambda_n^{(j)})^kX_2(l,n,k), k=2j-1, j=1,2,3,\cdots \\ A_{l,n,k} = A_{l,n,0}(\lambda_n^{(j)})^kX_1(l,n,k), k=2j, j=1,2,3,\cdots \end{cases} \tag{7-159}$$

式中 $X_1(l,n,k), X_2(l,n,k)$ 可以根据式（7－158）推导出来。

采用 7.2 节求解思路，可以得到

$$f(x) = Z_{l,n}^{(c)}(x)A_{l,n,0} \tag{7-160}$$

式中定义 C 型复数柱多项式 $Z_{l,n}^{(c)}(x)$

$$\begin{aligned} Z_{l,n}^{(c)}(x) = x^{-b_{l,n}}\{&1+X_1(l,n,2)x^2+X_1(l,n,4)x^4+\cdots+X_1(l,n,2k)x^{2k}+\cdots \\ &+\mathrm{i}[X_2(l,n,1)x+X_2(l,n,3)x^3+\cdots+X_2(l,n,2k-1)x^{2k-1}+\cdots] \end{aligned} \tag{7-161}$$

定义：实数多项式 $Y_{l,n,r}^{(c)}(x), Y_{l,n,i}^{(c)}(x)$

$$Y_{l,n,r}^{(c)}(x) = x^{-b_{l,n}}[1+\sum_{k=1}^{\infty}X_1(l,n,2k)x^{2k}] \tag{7-162}$$

$$Y_{l,n,i}^{(c)}(x) = x^{-b_{l,n}}\sum_{k=1}^{\infty}X_2(l,n,2k-1)x^{2k-1}) \tag{7-163}$$

根据式（7－160）（7－161）和（7－162），可得

$$Z_{l,n}^{(c)}(x) = Y_{l,n,r}^{(c)}(x)+\mathrm{i}Y_{l,n,i}^{(c)}(x) \tag{7-164}$$

C 型复数柱多项式（7－164）是一个新的复数多项式函数，显然 $Z_{l,n}^{(c)}(x)$ 与贝塞尔函数系列结构不同。后续研究表明，当 $k_{13}=0$，$Z_{l,n}^{(c)}(x)$ 可变换为 $-b_{l,n}$ 阶第一类变形贝塞尔函数，读者可以自行求解。

根据式（7－153）（7－156）和（7－160），可得

$$T = \sum_{l=1}^{2}\sum_{n=-\infty,n\neq0}^{\infty}\sum_{j=-\infty,j\neq0}^{\infty}A_{l,n,j,0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n^{(j)}z}Z_{l,n}^{(c)}(x)+Z_r(r,z)+C(r,\theta) \tag{7-165}$$

将式（7－165）代入圆柱体侧面边界条件可得特征方程，即可确定特征根 $\lambda_n^{(j)}$。当 $n=0$ 或 $j=0$ 对于的函数解可以单独处理，以下只考虑 $n\neq0, j\neq0$ 时式（7－165）求解。

这样根据柱体侧面的边界条件可以求解特征根，进而确定待定常数，给出方程解。下文分不同情况给出解析解。

7.8.1　侧面具有第一类边界条件的 C 型各向异性实心圆柱体

(1) 解析求解

各向异性实心圆柱体侧面具有第一类边界条件为

$$r=R, T(R,\theta,z)=0$$

$$r=0, T(0,\theta,z) \text{有限}$$

考虑函数有限自然条件，$n>0$ 时，式（7-165）只能选 $l=2$；$n<0$ 时，式（7-165）只能选 $l=1$，这样可得

$$T=\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=-\infty,j\neq 0}^{\infty}A_{l,n,j,0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_{n}^{(j)}z}Z_{l,n}^{(c)}(x)+Z_r(r,z)+C(r,\theta) \tag{7-166}$$

将式（7-166）代入上述边界条件，可得

$$Z_{l,n}^{(c)}(x)=0 \tag{7-167}$$

求解式（7-167）可得零点 $\mu_{l,n,j}^{0}$ 。

$Z_{l,n}^{(c)}(x)$ 是复数多项式，不会出现实数根，其复数根记为

$$\mu_{l,n,j}^{0}=c_{l,n}^{(j)}+\mathrm{i}d_{l,n}^{(j)} \tag{7-168}$$

计算时可以将特征根进行排序：设式（7-156）中的 x 幂次最大取 K，当 $n>0$ 时，可以求得 K 个虚数根 $\lambda_{l,n}^{(j)}$ ：K_1 个纯虚数根 $\mathrm{i}d_{l,n}^{(j)}(j=1,2,\cdots,K_1)$ ，K_2 个虚数根 $c_{l,n}^{(j+K_1)}+\mathrm{i}d_{l,n}^{(j+K_1)}(j=1,2,\cdots,K_2)$ ，K_2 个虚数根 $-c_{l,n}^{(j+K_1+K_2)}+\mathrm{i}d_{l,n}^{(j+K_1+K_2)}(j=1,2,\cdots,K_2)$ 。$K=K_1+2K_2$ ；$c_{l,n}^{(j+K_1)}=c_{l,n}^{(j+K_1+K_2)}$ ，$d_{l,n}^{(j+K_1)}=d_{l,n}^{(j+K_1+K_2)}$ 。当 $n<0$ 时，可以求得 K 个虚数根 $\lambda_{l,n}^{(j)}$ ：K_1 个纯虚数根 $-\mathrm{i}d_{l,n}^{(k)}$ ，K_2 个虚数根 $-c_{l,n}^{(k+K_1)}-\mathrm{i}d_{l,n}^{(k+K_1)}$ ，K_2 个虚数根 $c_{l,n}^{(k+K_1+K_2)}-\mathrm{i}d_{l,n}^{(k+K_1+K_2)}$ 。其中 $K=K_1+2K_2$ 。上式中虚数根标记中 n 为 $|n|$ 。

根据 $\lambda_{l,n}^{(j)}=\dfrac{\mu_{l,n,j}^{0}}{R}$ 和 $x=\dfrac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R}$ ，可得

$$T=\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=-\infty,j\neq 0}^{\infty}A_{l,n,j,0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\mu_{l,n,j}^{0}}{R}z}Z_{l,n}^{(c)}\left(\frac{r}{R}\mu_{l,n,j}^{0}\right)+Z_r(r,z)+C(r,\theta) \tag{7-169}$$

对于 $\mu_{l,n,j}^{0}=c_{l,n}^{(j)}+\mathrm{i}d_{l,n}^{(j)}$ ，定义

$$\left(\frac{\mu_{l,n,j}^{0}}{R}\right)^{k-b_{l,n}}=R_{l,n,j,k}+\mathrm{i}I_{l,n,j,k} \tag{7-170}$$

其中 $c_{l,n}^{(j)},d_{l,n}^{(j)}$ ，$R_{l,n,j,k},I_{l,n,j,k}$ 为实数。

定义实数多项式 $Z_{l,n,r}^{(c)}(r),Z_{l,n,i}^{(c)}(r)$

$$\begin{aligned}Z_{l,n,r}^{(c)}\left(\frac{r}{R}\mu_{l,n,j}^{0}\right)=&R_{l,n,j,0}+r^{-b_{l,n}}\sum_{k=1}^{\infty}[(-R_{l,n,j,0}I_{l,n,j,2k-1}-I_{l,n,j,0}R_{l,n,j,2k-1})X_2(l,n,2k-1)r^{2k-1}+\\&(R_{l,n,j,0}R_{l,n,j,2k}-I_{l,n,j,0}I_{l,n,j,2k})X_1(l,n,2k)r^{2k}]\end{aligned} \tag{7-171a}$$

$$\begin{aligned}Z_{l,n,i}^{(c)}\left(\frac{r}{R}\mu_{l,n,j}^{0}\right)=&r^{-b_{l,n}}\sum_{k=1}^{\infty}[(R_{l,n,j,0}R_{l,n,j,2k-1}-I_{1,n,j,0}I_{1,n,j,2k-1})X_2(l,n,2k-1)r^{2k-1}+\\&(R_{l,n,j,0}I_{l,n,j,2k}+I_{l,n,j,0}R_{l,n,j,2k})X_1(l,n,2k)r^{2k}]\end{aligned} \tag{7-171b}$$

将式（7-171a）和（7-171b）代入式（7-169），可得

$$Z_{l,n}^{(c)}\left(\frac{r}{R}\mu_{l,n,j}^{0}\right)=Z_{l,n,r}^{(c)}\left(\frac{r}{R}\mu_{l,n,j}^{0}\right)+\mathrm{i}Z_{l,n,i}^{(c)}\left(\frac{r}{R}\mu_{l,n,j}^{0}\right)$$

综上所述，可得控制方程的一般解析解为

$$T = \sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=-\infty,j\neq 0}^{\infty}(A_{l,n,j,0,r}+\mathrm{i}A_{l,n,j,0,i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\mu^0_{l,n,j}}{R}z}[Z^{(c)}_{l,n,r}(\frac{r}{R}\mu^0_{l,n,j})+\mathrm{i}Z^{(c)}_{l,n,i}(\frac{r}{R}\mu^0_{l,n,j})]+ Z_r(r,z)+C(r,\theta) \tag{7-172a}$$

其中 $A_{l,n,j,0,r}$,$A_{l,n,j,0,i}$,$B_{l,n,j,0,r}$,$B_{l,n,j,0,i}$ ($n=1,\cdots,\infty,j=1,\cdots,\infty$) 为实数；$Z_r(r,z)$ 为式 (7 -153) 中 $n=0,j\neq 0$ 的解，见第 6 章定义。$C(r,\theta)$ 为式 (7 - 153) 中 $j=0,n\neq 0$ 的解，可单独求解。实际计算中，式 (7 - 172a) 中 n 不可能取无限大，n 最大取为 N，k 最大取得 K，j 最大为 J 。$n=0$，$C_r(r,z)$ 中的 m 取为 $[-M, M]$。式 (7 - 172a) 共有 ($8\times N\times J+4M$) 个未知数。

根据数学物理实数化原理，$T(r,\theta,z)$ 解 (7 - 172a) 应该可以化简为实数函数

$$\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Im}\left\{\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=-\infty,j\neq 0}^{\infty}(A_{l,n,j,0,r}+\mathrm{i}A_{l,n,j,0,i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\mu^0_{l,n,j}}{R}z}[Z^{(c)}_{l,n,r}(\frac{r}{R}\mu^0_{l,n,j})+\mathrm{i}Z^{(c)}_{l,n,i}(\frac{r}{R}\mu^0_{l,n,j})]\right\}+ \mathrm{Im}[Z_r(r,z)]=0 \tag{7-172b}$$

将式 (7 - 172a) 代入柱体 $z=0$ 和 $z=h$ 两个边界条件，可以形成两个方程，将 2 个边界条件方程左右两端进行两步展开，第一步展开为关于 θ 的傅立叶级数，第二步再展开为贝塞尔函数，此数学物理问题可以得解。

(2) 数值计算

考虑 C 型实心各向异性圆柱体，材料的热传导系数为 $k_1=2.6364\mathrm{kcal/(m\cdot h\cdot ℃)}$，$k_2=1.301\mathrm{kcal/(m\cdot h\cdot ℃)}$,$k_3=0.6\mathrm{kcal/(m\cdot h\cdot ℃)}$，$R=1\mathrm{m}$，$h=1\mathrm{m}$，$q=0$。柱体上端面 ($z_2=1\mathrm{m}$) 温度分布为 $[10(r-r^3)\cos(0.1\ln r+\theta)]$℃ ，柱体下端面 ($z_1=0$) 温度分布为 $[(r-r^3)\cos(a_{2,1}\ln r+\theta)]$℃ 。侧面 ($r=1$) 温度为 0℃ 。

1) $X_1(l,n,k)$ 分布情况

系数 $X_1(l,n,k)$ 可以根据式 (7 - 158) 和 (7 - 159) 计算获得。根据不同的各向异性角 β，计算结果 ($2K=60$，$n=1$) 如下：

表 7 - 10　$X_1(l,n,k)$ 与 k 的计算趋势($l=2$)

k \ β	10°	45°
2	1.970883044457364E−001	−1.183321100465329E−001
4	2.898379380584728E−003	−7.155537456636682E−003
6	6.691099244150971E−007	4.977146704675774E−005
8	−1.263233857632067E−007	2.201370140883341E−006
10	−6.576956461915692E−010	2.198165458291458E−009
12	−1.515982411684493E−012	−1.072521315574637E−010
14	−1.850343345388495E−015	−2.595518645782098E−013
16	−1.059169845566837E−018	1.327198440052440E−015
18	1.902967914951980E−022	4.098299705298244E−018
20	8.557531072796415E−025	−4.652878486568518E−021

表 7-11　$X_2(l,n,k)$ 与 k 的计算趋势($l=2$)

k \ β	10°	45°
1	1.352410029349356E−001	6.292176492398960E−001
3	2.747894508426850E−002	8.582218316428546E−003
5	5.605162613471666E−004	−1.178026435391029E−003
7	3.713825021595340E−006	−1.161182104397412E−005
9	1.008391250943228E−008	1.484413499194200E−007
11	8.054819185193778E−012	1.278846546402919E−009
13	−1.837093976649404E−014	−2.752272393157876E−012
15	−5.705133993126129E−017	−3.089037016080688E−014
17	−7.241333409970074E−020	−5.742354076340383E−018
19	−5.294842739562307E−023	2.386770966150947E−019

表 7-10 和表 7-11 可看出 $X_1(l,n,k)$ 和 $X_2(l,n,k)$ 随 k 递减迅速，这也预示着所得级数解收敛是有基础的。

2) $\mu_{l,n}^{(j)}$ 特征根分布情况

根据（7-167）可以求解特征根 $\mu_{l,n,j}^{0}$。计算结果（$K=60, n=1$）显示在表 7-12。

表 7-12　$\mu_{l,n,j}^{0}$ 变化趋势，$l=2$

j \ β	45°
1	i 19.745168099549690
2	i 16.942832188503260
3	i 12.892352601423670
4	i 8.834292991949223
5	i 4.749940115154129
6	−4.749940115148240i
7	−8.834292991965553i
8	−12.892352596932150i
9	−16.942809750960940i
10	−20.990036784493840i
11	−25.035590957436600i
12	−29.082353635531880i
13	−32.762379719059940i
14	−103.649794543535200i
15	1.511039070239813+i 19.881937435853050
16	2.885552153249709 −34.938505639644870i
17	3.166978176268091+i 20.062938452840800
18	4.906731930574039+i 20.149619654289880
19	6.714053470400349+i 20.124946005782850
20	7.668713868031233−i37.329943097043410

续表

β / j	45°
21	8.588681468203703+i 19.979594754154770
22	10.532778809538080+i 19.702536600047620
23	12.548917934292090+i 19.280650365237140
24	13.956039199870560−i 39.889281428658350
25	14.640413296123830+i 18.698219353195490
26	16.811410989629770+i17.936097093495700
27	19.067185307955460+i16.970601652912570
28	21.414550135627180+i15.771850644601280
29	23.262468283139910−42.839777036016100i
30	23.862504004831170+i14.301236389389790
31	26.423288223491610+i12.507398492360820
32	29.114229551058260+i10.319439609851360
33	31.961213191192470+i 7.634655690468119
34	35.005954614138930+i 4.294143803402227
35	38.323666945063420+i 2.738888272997306E−002
36	42.077096779465380 −5.702430770744924i
37	46.769829941309170−14.330052622501310i
38	−1.511039070239813+i 19.881937435853050
39	−2.885552153249709 −34.938505639644870i
40	−3.166978176268091+i 20.062938452840800
41	−4.906731930574039+i 20.149619654289880
42	−6.714053470400349+i 20.124946005782850
43	−7.668713868031233−i37.329943097043410
44	−8.588681468203703+i 19.979594754154770
45	−10.532778809538080+i 19.702536600047620
46	−12.548917934292090+i 19.280650365237140
47	−13.956039199870560−i 39.889281428658350
48	−14.640413296123830+i 18.698219353195490
49	−16.811410989629770+i17.936097093495700
50	−19.067185307955460+i16.970601652912570
51	−21.414550135627180+i15.771850644601280
52	−23.262468283139910−42.839777036016100i
53	−23.862504004831170+i14.301236389389790
54	−26.423288223491610+i12.507398492360820
55	−29.114229551058260+i10.319439609851360
56	−31.961213191192470+i 7.634655690468119
57	−35.005954614138930+i 4.294143803402227
58	−38.32366694506342+i 2.738888272997306E−002
59	−42.077096779465380 −5.702430770744924i
60	−46.769829941309170−14.330052622501310i

其他计算同样表明 7－12 中特征根对偶出现规律是一般情况。确定了特征根和转换系数 $X_1(l,n,k)$，一般解析解形式也就确定了，代入边界条件即可求解数学物理问题。

7.8.2　侧面具有第二类边界条件的 C 型各向异性实心柱体热传导解

对于侧面具有第二类边界条件的实心柱体热传导问题，可得柱侧面边界条件

$$q_r|_{r=R}=-(k_{11}\frac{\partial T}{\partial r}+k_{13}\frac{\partial T}{\partial z})|_{r=R}=0 \tag{7-173}$$

和自然条件 $T(0,\theta,z)$ 为有限值。

考虑函数有限自然条件，$n>0$ 时，式（7－165）只能选 $l=1$；$n<0$ 时，式（7－165）只能选 $l=2$。将 $x=r\lambda_n^{(j)}$ 和式（7－166）代入边界条件（7－173），可得

$$k_{11}\frac{\partial Z_{l,n}^{(c)}(x)}{\partial x}+\mathrm{i}k_{13}Z_{l,n}^{(c)}(x)=0 \tag{7-174}$$

求解式（7－174），可得零点 $\mu_{l,n,j}^{0}$ 。

$$\mu_{l,n,j}^{0}=R\lambda_{l,n}^{(j)} \tag{7-175}$$

根据特征值 $\lambda_{l,n}^{(j)}$ 可以确定特征函数形式，进而确定问题解。

7.8.3　侧面具有第三类边界条件的 C 型各向异性实心柱体热传导稳态解

柱侧面第三类边界条件（边界热对流）为

$$[-(k_{11}\frac{\partial T}{\partial r}+k_{13}\frac{\partial T}{\partial z})+h_m T]|_{r=R}=0 \tag{7-176}$$

和自然条件 $T(0,\theta,z)$ 为有限值。h_m 为柱体与外界环境热对流系数。

考虑函数有限自然条件，$n>0$ 时，$d_0=0$，式（7－165）只能选 $l=1$；$n<0$ 时，式（7－165）只能选 $l=2$。

将式（7－166）和 $x=r\lambda_{l,n}^{(j)}$ 代入边界条件（7－176），可得

$$-k_{11}\lambda_{l,n}^{(j)}\frac{\partial Z_{l,n}^{(c)}(x)}{\partial x}+(h_m-\mathrm{i}k_{13}\lambda_{l,n}^{(j)})Z_{l,n}^{(c)}(x)=0 \tag{7-177}$$

求解式（7－177）可得零点 $\mu_{l,n,j}^{0}$ 。根据 $\mu_{l,n,j}^{0}=R\lambda_n^{(j)}$ ，特征值 $\lambda_{l,n}^{(j)}$ 可以确定。

7.8.4　侧面具有第一类边界条件的 C 型各向异性空心柱体热传导解

对于侧面第一类边界条件的空心柱体热传导问题边界条件为

$$\begin{cases}T(r_1,\theta,z)=0\\T(r_2,\theta,z)=0\end{cases} \tag{7-178}$$

将式（7－165）和 $x=r\lambda_n^{(j)}$ 代入式（7－178），根据待定系数 $A_{1,n,j,0}$，$A_{2,n,j,0}$ 不全为 0 的条件，可得特征行列式

$$\begin{vmatrix}Z_{1,n}^{(c)}(r_1\lambda_n^{(j)}) & Z_{2,n}^{(c)}(r_1\lambda_n^{(j)})\\Z_{1,n}^{(c)}(r_2\lambda_n^{(j)}) & Z_{2,n}^{(c)}(r_2\lambda_n^{(j)})\end{vmatrix}=0 \tag{7-179}$$

求解式（7－179）可以确定特征值 $\lambda_n^{(j)}$ 。根据式（7－179），可得

$$A_{2,n,j,0}=-A_{1,n,j,0}\frac{Z_{1,n}^{(c)}(r_1\lambda_n^{(j)})}{Z_{2,n}^{(c)}(r_1\lambda_n^{(j)})} \tag{7-180}$$

将式（7－180）代入式（7－165），可得

$$T=\mathrm{Re}\{\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=-\infty,j\neq 0}^{\infty}A_{1,n,j,0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n^{(j)}z}[Z_{1,n}^{(c)}(r\lambda_n^{(j)})-Z_{2,n}^{(c)}(r\lambda_n^{(j)})\frac{Z_{1,n}^{(c)}(r_1\lambda_n^{(j)})}{Z_{2,n}^{(c)}(r_1\lambda_n^{(j)})}]\}+T^* \tag{7-181}$$

其中 T^* 为 $n=0$ 或 $j=0$ 时相应函数解，$T^*=Z_r(r,z)+C(r,\theta)$，读者可自行推导。

7.8.5 侧面具有第二类边界条件的 C 型各向异性空心柱体热传导解

对于内外径都是第二类边界条件的空心圆柱侧面边界条件

$$\begin{cases}q_r|_{r=r_1}=-(k_{11}\dfrac{\partial T}{\partial r}+k_{13}\dfrac{\partial T}{\partial z})|_{r=r_1}=0\\[2ex] q_r|_{r=r_2}=-(k_{11}\dfrac{\partial T}{\partial r}+k_{13}\dfrac{\partial T}{\partial z})|_{r=r_2}=0\end{cases} \tag{7-182}$$

对于柱侧面内外径都是第二类边界条件的空心圆柱采取类似的方法可建立特征矩阵行列式。

特征矩阵行列式

$$\begin{vmatrix}[k_{11}\dfrac{\partial Z_{1,n}^{(c)}(x)}{\partial x}+\mathrm{i}k_{13}Z_{1,n}^{(c)}(x)]|_{x=r_1\lambda_n^{(j)}} & [k_{11}\dfrac{\partial Z_{2,n}^{(c)}(x)}{\partial x}+\mathrm{i}k_{13}Z_{2,n}^{(c)}(x)]|_{x=r_1\lambda_n^{(j)}}\\[2ex] [k_{11}\dfrac{\partial Z_{1,n}^{(c)}(x)}{\partial x}+\mathrm{i}k_{13}Z_{1,n}^{(c)}(x)]|_{x=r_2\lambda_n^{(j)}} & [k_{11}\dfrac{\partial Z_{2,n}^{(c)}(x)}{\partial x}+\mathrm{i}k_{13}Z_{2,n}^{(c)}(x)]|_{x=r_2\lambda_n^{(j)}}\end{vmatrix}=0 \tag{7-183}$$

其中 $x=r\lambda_n^{(j)}$。

求解式（7－183）可以确定特征值 $\lambda_n^{(j)}$。根据式（7－183），可得

$$A_{2,n,j,0}=-A_{1,n,j,0}\frac{[k_{11}\dfrac{\partial Z_{1,n}^{(c)}(x)}{\partial x}+\mathrm{i}k_{13}Z_{1,n}^{(c)}(x)]|_{x=r_1\lambda_n^{(j)}}}{[k_{11}\dfrac{\partial Z_{2,n}^{(c)}(x)}{\partial x}+\mathrm{i}k_{13}Z_{2,n}^{(c)}(x)]|_{x=r_1\lambda_n^{(j)}}} \tag{7-184}$$

将式（7－184）代入式（7－165），可得

$$T=T^*+\mathrm{Re}(\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=-\infty,j\neq 0}^{\infty}A_{1,n,j,0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n^{(j)}z}\{Z_{1,n}^{(c)}(r\lambda_n^{(j)})-Z_{2,n}^{(c)}(r\lambda_n^{(j)})\frac{[k_{11}\dfrac{\partial Z_{1,n}^{(c)}(x)}{\partial x}+\mathrm{i}k_{13}Z_{1,n}^{(c)}(x)]|_{x=r_1\lambda_n^{(j)}}}{[k_{11}\dfrac{\partial Z_{2,n}^{(c)}(x)}{\partial x}+\mathrm{i}k_{13}Z_{2,n}^{(c)}(x)]|_{x=r_1\lambda_n^{(j)}}}\}) \tag{7-185}$$

其中 T^* 为 $n=0$ 或 $j=0$ 时相应函数解，$T^*=Z_r(r,z)+C(r,\theta)$，读者可自行推导。

7.8.6 侧面具有第三类边界条件的 C 型各向异性空心柱体热传导解

对于柱侧面内外径都是第三类边界条件的空心圆柱边界条件为

$$\begin{cases} q_r|_{r=r_1} = [-(k_{11}\dfrac{\partial T}{\partial r} + k_{13}\dfrac{\partial T}{\partial z}) + h_m T]|_{r=r_1} = 0 \\ q_r|_{r=r_2} = [-(k_{11}\dfrac{\partial T}{\partial r} + k_{13}\dfrac{\partial T}{\partial z}) + h_m T]|_{r=r_2} = 0 \end{cases} \tag{7-186}$$

对于柱内外径侧面都是第三类边界条件的空心圆柱采取类似的方法可建立特征矩阵行列式。

特征矩阵行列式

$$\begin{vmatrix} [-k_{11}\lambda_n^{(j)}\dfrac{\partial Z_{1,n}^{(c)}(x)}{\partial x} + (h_m - \mathrm{i}k_{13}\lambda_n^{(j)})Z_{1,n}^{(c)}(x)]|_{x=r_1\lambda_n^{(j)}} & [-k_{11}\lambda_n^{(j)}\dfrac{\partial Z_{2,n}^{(c)}(x)}{\partial x} + (h_m - \mathrm{i}k_{13}\lambda_n^{(j)})Z_{2,n}^{(c)}(x)]|_{x=r_1\lambda_n^{(j)}} \\ [-k_{11}\lambda_n^{(j)}\dfrac{\partial Z_{1,n}^{(c)}(x)}{\partial x} + (h_m - \mathrm{i}k_{13}\lambda_n^{(j)})Z_{1,n}^{(c)}(x)]|_{x=r_2\lambda_n^{(j)}} & [-k_{11}\lambda_n^{(j)}\dfrac{\partial Z_{2,n}^{(c)}(x)}{\partial x} + (h_m - \mathrm{i}k_{13}\lambda_n^{(j)})Z_{2,n}^{(c)}(x)]|_{x=r_2\lambda_n^{(j)}} \end{vmatrix} = 0 \tag{7-187}$$

其中 $x = r\lambda_n^{(j)}$ 。

求解式（7-187）可以确定特征值 $\lambda_n^{(j)}$ 。根据式（7-187），可得

$$A_{2,n,j,0} = -A_{1,n,j,0}\frac{[-k_{11}\lambda_n^{(j)}\dfrac{\partial Z_{1,n}^{(c)}(x)}{\partial x} + (h_m - \mathrm{i}k_{13}\lambda_n^{(j)})\dot{Z}_{1,n}^{(c)}(x)]|_{x=r_1\lambda_n^{(j)}}}{[-k_{11}\lambda_n^{(j)}\dfrac{\partial Z_{2,n}^{(c)}(x)}{\partial x} + (h_m - \mathrm{i}k_{13}\lambda_n^{(j)})Z_{2,n}^{(c)}(x)]|_{x=r_1\lambda_n^{(j)}}} \tag{7-188}$$

将式（7-188）代入式（7-165），可得

$$T = T^* + \mathrm{Re}(\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=-\infty,j\neq 0}^{\infty} A_{1,n,j,0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n^{(j)}z}\{Z_{1,n}^{(c)}(r\lambda_n^{(j)}) - Z_{2,n}^{(c)}(r\lambda_n^{(j)}) \\ \frac{[-k_{11}\lambda_n^{(j)}\dfrac{\partial Z_{1,n}^{(c)}(x)}{\partial x} + (h_m - \mathrm{i}k_{13}\lambda_n^{(j)})Z_{1,n}^{(c)}(x)]|_{x=r_1\lambda_n^{(j)}}}{[-k_{11}\lambda_n^{(j)}\dfrac{\partial Z_{2,n}^{(c)}(x)}{\partial x} + (h_m - \mathrm{i}k_{13}\lambda_n^{(j)})Z_{2,n}^{(c)}(x)]|_{x=r_1\lambda_n^{(j)}}}\}) \tag{7-189}$$

其中 T^* 为 $n=0$ 或 $j=0$ 时 相应函数解，$T^* = Z_r(r,z) + C(r,\theta)$ ，读者可自行推导。

7.9　一般三维各向异性圆柱稳态热传导方程

本节研究一般各向异性（$k_{12}\neq 0, k_{23}\neq 0, k_{13}\neq 0$）的三维圆柱体稳态温度场问题。

考虑曲线型各向异性圆柱，圆柱半径为 R，圆柱体高度为 h，在圆柱边界与外界进行热交换，这样圆柱体温度场分布与 (r,θ,z) 有关。柱坐标下稳态热传导控制偏微分方程为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial T}{\partial r}) + 2K_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 T}{\partial r\partial\theta} + K_{22}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2} + \\ K_{33}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + 2K_{13}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 T}{\partial r\partial z} + K_{13}\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial z} + 2K_{23}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta\partial z} + \frac{q}{k_{11}} = 0 \tag{7-190}$$

设

$$T = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}Z_n(r,z) \tag{7-191}$$

其中 n 为整数。

当 $n=0$，$T=Z_0(r,z)=Z_r(r,z)$（见第 6 章）。

当 $n\neq 0$，设

$$Z_n(r,z)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}e^{i\lambda jz}f_n(r) \tag{7-192}$$

记 $\lambda_n^{(j)}=j\lambda$，式（7 - 191）可写为

$$T=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}e^{i\lambda_n^{(j)}z}e^{in\theta}f_n(r) \tag{7-193}$$

当 $n\neq 0$，将式（7 - 193）代入式（7 - 190），可得

$$r^2\frac{d^2f_n}{dr^2}+r\frac{df_n}{dr}(1+2K_{12}in+2iK_{13}\lambda r)+f_n[-K_{33}(\lambda_n^{(j)})^2r^2+r\lambda_n^{(j)}(iK_{13}-2K_{23}n)-K_{22}n^2]=0 \tag{7-194}$$

引入参数变换

$$x=r\lambda_n^{(j)}$$

式（7 - 194）可变换为

$$x^2\frac{d^2f_n}{dx^2}+x\frac{df_n}{dx}(2iK_{13}x+1+2K_{12}in)+f_n[-K_{33}x^2+x(iK_{13}-2K_{23}n)-K_{22}n^2]=0 \tag{7-195}$$

方程（7 - 195）是一新方程，可称为一般各向异性柱方程，当其中系数简化以后一般各向异性柱方程可分别退化为变形 Z_{ip} 方程，B 型各向异性柱方程，C 型各向异性柱方程。

设

$$f_n(r)=\sum_{k=0}^{\infty}A_{n,k}r^{k+is} \tag{7-196}$$

其中 k 整数，s 是特征根。$A_{n,k}$ 是复数常数。

将式（7 - 196）代入方程（7 - 195），可得 $s_{l,n}=a_{l,n}+ib_{l,n}$

其中 $l=1$、2 。

$$\begin{cases}a_{1,n}=-nK_{12}\\ b_{1,n}=n\sqrt{(K_{22}-K_{12}{}^2)}\\ a_{2,n}=-nK_{12}\\ b_{2,n}=-n\sqrt{(K_{22}-K_{12}{}^2)}\end{cases} \tag{7-197a}$$

和递推公式

$$\begin{cases}A_{1,n,k+1}=\dfrac{[(-2K_{13}K_{12}-2K_{23})n-iK_{13}(1-2n\sqrt{K_{22}-K_{12}^2}+2k]\lambda_n^{(j)}A_{1,n,k}+(\lambda_n^{(j)})^2K_{33}A_{1,n,k-1}}{(k+1)(k+1-2n\sqrt{K_{22}})}\\[2ex] A_{2,n,k+1}=\dfrac{[(-2K_{13}K_{12}-2K_{23})n-iK_{13}(1+2n\sqrt{K_{22}-K_{12}^2}+2k]\lambda_n^{(j)}A_{2,n,k}+(\lambda_n^{(j)})^2K_{33}A_{2,n,k-1}}{(k+1)(k+1+2n\sqrt{K_{22}})}\end{cases} \tag{7-197b}$$

根据式（7 - 197a）和（7 - 197b）进行迭代计算，可得

$$A_{l,n,k}=A_{l,n,0}(\lambda_n^{(j)})^k[X_1(l,n,k)+iX_2(l,n,k)] \tag{7-198}$$

式中 $X_1(l,n,k),X_2(l,n,k)$ 为实数递推系数，可以根据式（7 - 197a）和（7 - 197b）推导得出。

采用本章 7.6 节求解思路，可以得到

$$f(x) = Z_{l,n}^{(g)}(x)A_{l,n,0} \tag{7-199}$$

式中定义复数多项式 $Z_{l,n}^{(g)}(x)$，可称为复数一般各向异性柱多项式，具体为

$$\begin{aligned} Z_{l,n}^{(g)}(x) = \\ x^{-b_{l,n}}\{&1+X_1(l,n,1)x+X_1(l,n,2)x^2+X_1(l,n,3)x^3+X_1(l,n,4)x^4+\cdots+X_1(l,n,k)x^k+\cdots \\ &+\mathrm{i}[X_2(l,n,1)x+X_2(l,n,2)x^2+X_2(l,n,3)x^3+X_2(l,n,4)x^4+\cdots+X_2(l,n,k)x^k+\cdots]\}\end{aligned} \tag{7-200}$$

定义：多项式 $Y_{l,n,r}^{(g)}(x),Y_{l,n,i}^{(g)}(x)$

$$Y_{l,n,r}^{(g)}(x) = x^{-b_{l,n}}[1+\sum_{k=1}^{\infty}X_1(l,n,k)x^k] \tag{7-201}$$

$$Y_{l,n,i}^{(g)}(x) = x^{-b_{l,n}}\sum_{k=1}^{\infty}X_2(l,n,k)x^k \tag{7-202}$$

根据式（7 - 199）～（7 - 202），可得

$$Z_{l,n}^{(g)}(x) = Y_{l,n,r}^{(g)}(x)+\mathrm{i}Y_{l,n,i}^{(g)}(x) \tag{7-203}$$

$Z_{l,n}^{(g)}(x)$ 是一般的复数多项式，当热传导系数简化，$Z_{l,n}^{(g)}(x)$ 可分别退化为变形贝塞尔函数，变形复数柱多项式 $\hat{Z}_{ip}(x)$，B 型柱多项式 $Z_{l,n}^{(b)}(x)$，C 型复数柱多项式 $Z_{l,n}^{(c)}(x)$。

综上所述，可得

$$T = \sum_{l=1}^{2}\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=-\infty,j\neq 0}^{\infty}A_{l,n,j,0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n^{(j)}z}Z_{l,n}^{(g)}(x)+Z_r(r,z)+C(r,\theta) \tag{7-204}$$

将式（7 - 204）代入圆柱体侧面边界条件可得特征方程，即可确定特征根 $\lambda_n^{(j)}$。当 $n=0,j\neq 0$ 和 $n\neq 0,j=0$ 时式（7 - 193）对应解 $(Z_r(r,z),C(r,\theta))$，需要叠加到一般解析解中，但由于其可以单独处理，以下只考虑 $n\neq 0,j\neq 0$ 时式（7 - 204）求解。

这样，根据柱体侧面的边界条件可以求解特征根，进而确定待定常数，给出方程解。下文分不同情况给出解析解。

7.9.1　柱侧面具有第一类边界条件的一般各向异性实心圆柱体稳态解

(1) 解析求解

对于实心圆柱体侧面具有第一类边界条件为

$$\begin{cases} r=R,T(R,\theta,z)=0 \\ r=0,T(0,\theta,z)\text{ 有限} \end{cases}$$

考虑函数有限自然条件，$n>0$ 时，式（7 - 204）只能选 $l=2$；$n<0$ 时，式（7 - 204）只能选 $l=1$。这样可得

$$T = \sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=-\infty,j\neq 0}^{\infty}A_{l,n,j,0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_{l,n}^{(j)}z}Z_{l,n}^{(g)}(x)+Z_r(r,z)+C(r,\theta) \tag{7-205}$$

其中 $x=r\lambda_{l,n}^{(j)}$。

将式（7－205）代入边界条件，可得

$$Z_{l,n}^{(g)}(x)=0 \tag{7-206}$$

求解式（7－206），可得零点 $\mu_{l,n,j}^{0}$ ，$\mu_{l,n,j}^{0}=R\lambda_{l,n}^{(j)}$ ，$x=\frac{r}{R}\mu_{l,n,j}^{0}$ 。

$Z_{l,n}^{(j)}(x)$ 是复数多项式，不会出现实数根，其复数根记为

$$\mu_{l,n,j}^{0}=c_{l,n}^{(j)}+\mathrm{i}d_{l,n}^{(j)} \tag{7-207}$$

综上所述，综合推导可得控制方程（7－190）的一般解析解为

$$T=\left\{\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=-\infty,j\neq 0}^{\infty}(A_{l,n,j,0,r}+\mathrm{i}A_{l,n,j,0,i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\mu_{l,n,j}^{0}}{R}z}Z_{l,n}^{(g)}\left(\frac{r}{R}\mu_{l,n,j}^{0}\right)\right\}+Z_{r}(r,z)+C(r,\theta) \tag{7-208}$$

其中 $A_{l,n,j,0,r}$、$A_{l,n,j,0,i}$ $(n=1,\cdots,\infty,j=1,\cdots,\infty)$ 为实数；$Z_{r}(r,z)$ 为 $n=0,j\neq 0$ 的式（7－193）对应解，见第6章定义，$C(r,\theta)$ 为 $j=0,n\neq 0$ 的式（7－193）解，见第5章第2节定义。

根据数学物理的实数化定理，温度函数解（7－208）应该可以化简为实数函数

$$\mathrm{Im}(T)=\mathrm{Im}\left\{\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=-\infty,j\neq 0}^{\infty}(A_{l,n,j,0,r}+\mathrm{i}A_{l,n,j,0,i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\mu_{l,n,j}^{0}}{R}z}Z_{l,n}^{(g)}\left(\frac{r}{R}\mu_{l,n,j}^{0}\right)\right\}+\mathrm{Im}[Z_{r}(r,z)]=0 \tag{7-209}$$

将式（7－208）代入柱体 $z=0$ 和 $z=h$ 两个边界条件，可以形成两个方程，将2个边界条件方程左右两端分别展开为复数柱函数展开式，根据复数柱函数的正交性和式（7－209），可以求解未知数。

7.9.2 柱侧面具有第二类边界条件的一般各向异性实心柱体热传导解

对于柱侧面具有第二类边界条件的实心柱体热传导问题，可得边界条件

$$q_{r}\big|_{r=R}=-\left(k_{11}\frac{\partial T}{\partial r}+k_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial\theta}+k_{13}\frac{\partial T}{\partial z}\right)\Big|_{r=R}=0 \tag{7-210}$$

$$r=0,T(0,\theta,z)\text{ 有限}$$

考虑函数有限自然条件，$n>0$ 时，$d_{0}=0$ ，式（7－204）只能选 $l=1$；$n<0$ 时，式（7－204）只能选 $l=2$。将式（7－205）和 $x=r\lambda_{l,n}^{(j)}$ 代入边界条件（7－210），可得

$$\left[k_{11}\frac{\partial Z_{l,n}^{(g)}(x)}{\partial x}\lambda_{l,n}^{(j)}+Z_{l,n}^{(g)}(x)\left(\frac{k_{12}}{R}\mathrm{i}n+\mathrm{i}k_{13}\lambda_{l,n}^{(j)}\right)\right]\Big|_{x=R\lambda_{l,n}^{(j)}}=0 \tag{7-211}$$

求解式（7－211）可得零点 $\lambda_{l,n}^{(j)}$ 。根据特征值 $\lambda_{l,n}^{(j)}$ 可以确定特征函数形式，进而确定问题解。

7.9.3 柱侧面具有第三类边界条件的一般各向异性实心柱体热传导解

实心各向异性圆柱体侧面第三类边界条件（边界热对流）为

$$\left[-\left(k_{11}\frac{\partial T}{\partial r}+k_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial\theta}+k_{13}\frac{\partial T}{\partial z}\right)+h_{m}T\right]\Big|_{r=R}=0 \tag{7-212}$$

$$r=0,T(0,\theta,z)\text{ 有限}$$

其中 h_m 为柱体与外界环境热对流系数。

将式（7-205）代入边界条件（7-212），可得

$$\left[k_{11}\frac{\partial Z_{l,n}^{(g)}(x)}{\partial x}\lambda_{l,n}^{(j)}+Z_{l,n}^{(g)}(x)\left(\frac{k_{12}}{R}in+ik_{13}\lambda_{l,n}^{(j)}-h_m\right)\right]\Big|_{x=R\lambda_{l,n}^{(j)}}=0 \tag{7-213}$$

求解式（7-213）可得零点 $\lambda_{l,n}^{(j)}$。根据特征值 $\lambda_{l,n}^{(j)}$ 可以确定特征函数形式，进而确定问题解。

7.9.4　柱侧面具有第一类边界条件的一般各向异性空心柱体热传导解

对于侧面具有第一类边界条件的空心柱体热传导问题侧面边界条件为

$$\begin{cases}T(r_1,\theta,z)=0\\T(r_2,\theta,z)=0\end{cases} \tag{7-214}$$

定义 $x=r\lambda_n^{(j)}$。将式（7-204）代入式（7-214），根据待定系数 $A_{1,n,j,0}$，$A_{2,n,j,0}$ 不全为 0 的条件，可得特征行列式

$$\begin{vmatrix}Z_{1,n}^{(g)}(r_1\lambda_n^{(j)}) & Z_{2,n}^{(g)}(r_1\lambda_n^{(j)})\\Z_{1,n}^{(g)}(r_2\lambda_n^{(j)}) & Z_{2,n}^{(g)}(r_2\lambda_n^{(j)})\end{vmatrix}=0 \tag{7-215}$$

求解式（7-215）可以确定特征值 $\lambda_n^{(j)}$。根据式（7-215）特征矩阵可得

$$A_{2,n,j,0}=-A_{1,n,j,0}\frac{Z_{1,n}^{(g)}(r_1\lambda_n^{(j)})}{Z_{2,n}^{(g)}(r_1\lambda_n^{(j)})} \tag{7-216}$$

将式（7-216）代入式（7-204），可得

$$T=\mathrm{Re}\left\{\sum_{n=-\infty,n\neq0}^{\infty}\sum_{j=-\infty,j\neq0}^{\infty}A_{1,n,j,0}e^{in\theta}e^{i\lambda_n^{(j)}z}\left[Z_{1,n}^{(g)}(r\lambda_n^{(j)})-Z_{2,n}^{(g)}(r\lambda_n^{(j)})\frac{Z_{1,n}^{(g)}(r_1\lambda_n^{(j)})}{Z_{2,n}^{(g)}(r_1\lambda_n^{(j)})}\right]\right\}+T^* \tag{7-217}$$

其中 T^* 为 $n=0$ 或 $j=0$ 时相应函数解之和，$T^*=Z_r(r,z)+C(r,\theta)$，读者可根据第 5、6 章方法自行推导。

7.9.5　柱侧面具有第二类边界条件的一般各向异性空心柱体热传导解

对于内外径都是第二类边界条件的空心圆柱侧面边界条件为

$$\begin{cases}q_r|_{r=r_1}=-\left(k_{11}\dfrac{\partial T}{\partial r}+k_{12}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T}{\partial\theta}+k_{13}\dfrac{\partial T}{\partial z}\right)\Big|_{r=r_1}=0\\q_r|_{r=r_2}=-\left(k_{11}\dfrac{\partial T}{\partial r}++k_{12}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T}{\partial\theta}k_{13}\dfrac{\partial T}{\partial z}\right)\Big|_{r=r_2}=0\end{cases} \tag{7-218}$$

对于内外径都是第二类边界条件的空心圆柱采取类似的方法可建立特征矩阵行列式，求出特征值 λ_m。

特征矩阵行列式

$$\begin{vmatrix}\left[k_{11}\dfrac{\partial Z_{1,n}^{(g)}(x)}{\partial x}\lambda_n^{(j)}+Z_{1,n}^{(g)}(x)\left(\dfrac{k_{12}}{R}in+ik_{13}\lambda_n^{(j)}\right)\right]\Big|_{x=r_1\lambda_n^{(j)}} & \left[k_{11}\dfrac{\partial Z_{2,n}^{(g)}(x)}{\partial x}\lambda_n^{(j)}+Z_{2,n}^{(g)}(x)\left(\dfrac{k_{12}}{R}in+ik_{13}\lambda_n^{(j)}\right)\right]\Big|_{x=r_1\lambda_n^{(j)}}\\\left[k_{11}\dfrac{\partial Z_{1,n}^{(g)}(x)}{\partial x}\lambda_n^{(j)}+Z_{1,n}^{(g)}(x)\left(\dfrac{k_{12}}{R}in+ik_{13}\lambda_n^{(j)}\right)\right]\Big|_{x=r_2\lambda_n^{(j)}} & \left[k_{11}\dfrac{\partial Z_{2,n}^{(g)}(x)}{\partial x}\lambda_n^{(j)}+Z_{2,n}^{(g)}(x)\left(\dfrac{k_{12}}{R}in+ik_{13}\lambda_n^{(j)}\right)\right]\Big|_{x=r_2\lambda_n^{(j)}}\end{vmatrix}=0 \tag{7-219}$$

其中 $x = r\lambda_n^{(j)}$ 。

求解式（7－219）可以确定特征值 $\lambda_n^{(j)}$ 。根据（7－219），可得

$$A_{2,n,j,0} = -A_{1,n,j,0} \frac{\left[k_{11} \frac{\partial Z_{1,n}^{(g)}(x)}{\partial x}\lambda_n^{(j)} + Z_{1,n}^{(g)}(x)\left(\frac{k_{12}}{R}\text{i}n + \text{i}k_{13}\lambda_n^{(j)}\right)\right]\Big|_{x=r_1\lambda_n^{(j)}}}{\left[k_{11} \frac{\partial Z_{2,n}^{(g)}(x)}{\partial x}\lambda_n^{(j)} + Z_{2,n}^{(g)}(x)\left(\frac{k_{12}}{R}\text{i}n + \text{i}k_{13}\lambda_n^{(j)}\right)\right]\Big|_{x=r_1\lambda_n^{(j)}}} \tag{7-220}$$

将式（7－220）代入式（7－204）可得

$$T = T^* + \text{Re}\Bigg(\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=-\infty,j\neq 0}^{\infty} A_{1,n,j,0}\,\text{e}^{\text{i}n\theta}\text{e}^{\text{i}\lambda_n^{(j)}z}\Bigg\{Z_{1,n}^{(g)}(r\lambda_n^{(j)}) - Z_{2,n}^{(g)}(r\lambda_n^{(j)})\frac{\left[k_{11} \frac{\partial Z_{1,n}^{(g)}(x)}{\partial x}\lambda_n^{(j)} + Z_{1,n}^{(g)}(x)\left(\frac{k_{12}}{R}\text{i}n + \text{i}k_{13}\lambda_n^{(j)}\right)\right]\Big|_{x=r_1\lambda_n^{(j)}}}{\left[k_{11} \frac{\partial Z_{2,n}^{(g)}(x)}{\partial x}\lambda_n^{(j)} + Z_{2,n}^{(g)}(x)\left(\frac{k_{12}}{R}\text{i}n + \text{i}k_{13}\lambda_n^{(j)}\right)\right]\Big|_{x=r_1\lambda_n^{(j)}}}\Bigg\}\Bigg) \tag{7-221}$$

其中 T^* 为 $n=0$ 或 $j=0$ 时相应函数解，$T^* = Z_r(r,z) + C(r,\theta)$ ，读者可自行推导。

7.9.6 柱侧面具有第三类边界条件的一般各向异性空心柱体热传导解

对于柱侧面内外径都是第三类边界条件的空心圆柱侧面边界条件

$$\begin{cases} q_r\big|_{r=r_1} = \left[-\left(k_{11}\frac{\partial T}{\partial r} + k_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} + k_{13}\frac{\partial T}{\partial z}\right) + h_m T\right]\Big|_{r=r_1} = 0 \\ q_r\big|_{r=r_2} = \left[-\left(k_{11}\frac{\partial T}{\partial r} + k_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} + k_{13}\frac{\partial T}{\partial z}\right) + h_m T\right]\Big|_{r=r_2} = 0 \end{cases} \tag{7-222}$$

记 $x = r\lambda_n^{(j)}$ 。对于柱侧面内外径都是第三类边界条件的空心圆柱采取类似的方法可建立特征矩阵行列式，求出特征值 λ_m 。

特征矩阵行列式

$$\begin{vmatrix} \left[k_{11}\frac{\partial Z_{1,n}^{(g)}(x)}{\partial x}\lambda_n^{(j)} + Z_{1,n}^{(g)}(x)\left(\frac{k_{12}}{R}\text{i}n + \text{i}k_{13}\lambda_n^{(j)} - h_m\right)\right]\Big|_{x=r_1\lambda_n^{(j)}} & \left[k_{11}\frac{\partial Z_{2,n}^{(g)}(x)}{\partial x}\lambda_n^{(j)} + Z_{2,n}^{(g)}(x)\left(\frac{k_{12}}{R}\text{i}n + \text{i}k_{13}\lambda_n^{(j)} - h_m\right)\right]\Big|_{x=r_1\lambda_n^{(j)}} \\ \left[k_{11}\frac{\partial Z_{1,n}^{(g)}(x)}{\partial x}\lambda_n^{(j)} + Z_{1,n}^{(g)}(x)\left(\frac{k_{12}}{R}\text{i}n + \text{i}k_{13}\lambda_n^{(j)} - h_m\right)\right]\Big|_{x=r_2\lambda_n^{(j)}} & \left[k_{11}\frac{\partial Z_{2,n}^{(g)}(x)}{\partial x}\lambda_n^{(j)} + Z_{2,n}^{(g)}(x)\left(\frac{k_{12}}{R}\text{i}n + \text{i}k_{13}\lambda_n^{(j)} - h_m\right)\right]\Big|_{x=r_2\lambda_n^{(j)}} \end{vmatrix} = 0 \tag{7-223}$$

求解式（7－223）可以确定特征值 $\lambda_n^{(j)}$ 。根据式（7－223），可得

$$A_{2,n,j,0} = -A_{1,n,j,0} \frac{\left[k_{11} \frac{\partial Z_{1,n}^{(g)}(x)}{\partial x}\lambda_n^{(j)} + Z_{1,n}^{(g)}(x)\left(\frac{k_{12}}{R}\text{i}n + \text{i}k_{13}\lambda_n^{(j)} - h_m\right)\right]\Big|_{x=r_1\lambda_n^{(j)}}}{\left[k_{11} \frac{\partial Z_{2,n}^{(g)}(x)}{\partial x}\lambda_n^{(j)} + Z_{2,n}^{(g)}(x)\left(\frac{k_{12}}{R}\text{i}n + \text{i}k_{13}\lambda_n^{(j)} - h_m\right)\right]\Big|_{x=r_1\lambda_n^{(j)}}} \tag{7-224}$$

将式（7－224）代入式（7－205），可得

$$T = T^{*} + \mathrm{Re}\Big(\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=-\infty,j\neq 0}^{\infty} A_{1,n,j,0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n^{(j)}z}\{Z_{1,n}^{(g)}(r\lambda_n^{(j)}) - Z_{2,n}^{(g)}(r\lambda_n^{(j)})$$

$$\frac{[k_{11}\dfrac{\partial Z_{1,n}^{(g)}(x)}{\partial x}\lambda_n^{(j)} + Z_{1,n}^{(g)}(x)(\dfrac{k_{12}}{R}\mathrm{i}n + \mathrm{i}k_{13}\lambda_n^{(j)} - h_m)]|_{x=r_1\lambda_n^{(j)}}}{[k_{11}\dfrac{\partial Z_{2,n}^{(g)}(x)}{\partial x}\lambda_n^{(j)} + Z_{2,n}^{(g)}(x)(\dfrac{k_{12}}{R}\mathrm{i}n + \mathrm{i}k_{13}\lambda_n^{(j)} - h_m)]|_{x=r_1\lambda_n^{(j)}}}\Big) \tag{7-225}$$

其中 T^{*} 为 $n=0$ 或 $j=0$ 相应函数解，$T^{*} = Z_r(r,z) + C(r,\theta)$，读者可自行推导。

7.10 各向异性柱方程与合流超几何方程的关系

各向异性柱方程

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(2\mathrm{i}K_{13}x + 1 + 2K_{12}\mathrm{i}n) + f[-K_{33}x^2 + x(\mathrm{i}K_{13} - 2K_{23}n) - K_{22}n^2] = 0$$

是一个一般方程。对比合流超几何方程

$$z^2\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2} + (\gamma - z)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} - \alpha f = 0 \tag{7-226}$$

可以发现

当 $K_{12}=0, K_{13}=0, K_{33}=0, K_{23}=0$ 时，各向异性柱方程简化为

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} - K_{22}n^2 f = 0 \tag{7-227}$$

令 $x=\mathrm{i}z$，代入式（7-227）可得

$$z^2\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2} - z\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} - K_{22}n^2 f = 0 \tag{7-228}$$

当 $\alpha = K_{22}n^2, \gamma = 0$，式（7-226）和（7-228）是一致的，也就是说合流超几何方程是各向异性柱方程的特例。

第 8 章　三维各向异性圆柱体非稳态热传导方程——复数柱体函数

三维圆柱体非稳态温度场的计算是一个复杂三维数学物理初值边值问题。即使对于各向同性三维圆柱体，其温度场初值边值问题求解也不简单。三维圆柱体是工程中常用结构，其物理场的理论和工程价值大。三维圆柱体非稳态温度场偏微分方程是数学物理学科重要方程，其解析求解十分重要。在第 7 章稳态各向异性柱体温度场求解基础上，采用复数分离变量法求解思想，给出了三维柱体温度场初值边值问题求解方法，提出了复数三维柱体函数，这种柱体函数在柱体范围内关于 r 正交，由此本章给出了复数三维柱体函数展开定理，依据所得解析解和复数三维柱体函数展开定理，给出三维各向异性圆柱非稳态问题的一般解析解。

8.1　三维各向异性圆柱体非稳态温度场偏微分方程及求解

考虑曲线型各向异性圆柱体，圆柱体底面半径为 R，圆柱体高度为 L，在圆柱体边界与外界进行热交换，这样圆柱体温度场分布与 (r,θ,z) 有关。柱坐标下稳态热传导控制偏微分方程为

$$\begin{aligned}&k_{11}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+2k_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 T}{\partial r\partial\theta}+k_{22}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2}+\\&k_{33}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+2k_{13}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 T}{\partial r\partial z}+k_{13}\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial z}+2k_{23}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta\partial z}+q=\rho C_p\frac{\partial T}{\partial t}\end{aligned}\tag{8-1}$$

式中 $T(r,\theta,z,t)$ 为柱体温度分布函数；q 是热源函数；$k_{jk}(j,k=1,2,3)$ 为热传导系数，下标 1 为径向 r（$0\leqslant r\leqslant R$）方向，下标 2 代表切向 θ（$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$）方向，下标 3 代表 z 方向（$0\leqslant z\leqslant L$）；ρ 为密度；C_p 为材料比热。三维各向异性圆柱体可以看作是增强纤维缠绕形成的三维柱体，第七章定义了四种模式铺设缠绕方式，本章主要针对 A 模式各向异性圆柱非稳态热传导问题求解。

A 模式下各向异性圆柱体热传导系数计算如下

$$\begin{aligned}k_{11}&=k_1\cos^2\beta+k_2\sin^2\beta\\k_{12}&=(k_1-k_2)\sin\beta\cos\beta\\k_{22}&=k_1\sin^2\beta+k_2\cos^2\beta\\k_{13}&=0\\k_{23}&=0\\k_{33}&=k_3\end{aligned}$$

式中 k_1,k_2,k_3 为 r 方向，切向 θ，z 方向主热传导系数，β 为平面 (r,θ) 内的最大热传导轴

方向与径向 r 的夹角。

实心圆柱几何边界包括外侧面边界和上下边界，对于空心圆柱体还包括内侧面边界。温度场边界条件分为第一、二、三类边界条件，在热传导计算中第一类边界条件为边界给定值，第二类边界条件为边界热绝缘，第三类边界条件为给定热对流，对于实心圆柱体还有 $r=0$ 处温度为有限值。实际计算中，柱体边界条件为三种边界条件在侧面和上下端面的组合，具体计算可分别确定。对于热传导问题，柱体初始条件为时间为 0 时，柱体温度场给定柱体内部温度场分布即可。而对于其他类型（波动）方程，还有导数类型的初始条件。

本章假设圆柱内没有热源，即 $q=0$。对于有热源问题，我们可以推导得到对应热源函数 q 的热传导偏微分方程特解，将特解代入后面求得一般解析解一并求解即可。下面求解三维圆柱体各向异性热传导方程非稳态问题解析解。

引入参数变换，

$$K_{11}=1,K_{12}=\frac{k_{12}}{k_{11}},K_{22}=\frac{k_{22}}{k_{11}},K_{33}=\frac{k_{33}}{k_{11}},K_{23}=\frac{k_{23}}{k_{11}},K_{13}=\frac{k_{13}}{k_{11}},q^{*}=\frac{q}{k_{11}},\alpha=\frac{k_{11}}{\rho C_{p}} \tag{8-2}$$

代入方程（8－1）可得

$$\begin{aligned}&K_{11}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial T}{\partial r})+2K_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial^{2}T}{\partial r\partial\theta}+K_{22}\frac{1}{r^{2}}\frac{\partial^{2}T}{\partial\theta^{2}}+\\&K_{33}\frac{\partial^{2}T}{\partial z^{2}}+2K_{13}\frac{1}{r}\frac{\partial^{2}T}{\partial r\partial z}+K_{13}\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial z}+2K_{23}\frac{1}{r}\frac{\partial^{2}T}{\partial\theta\partial z}+q=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}\end{aligned} \tag{8-3}$$

对于 A 横式圆柱体非稳态热传导问题，有

$$\begin{cases}k_{13}=0\\k_{23}=0\end{cases} \tag{8-4}$$

设研究区域无热源，$q=0$。对于有热源区域，求得方程（8－1）特解并叠加到后文所得级数解式（8－46）或（8－59）一并展开处理即可。

根据式（8－4），方程（8－3）简化为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial T}{\partial r})+2K_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial^{2}T}{\partial r\partial\theta}+K_{22}\frac{1}{r^{2}}\frac{\partial^{2}T}{\partial\theta^{2}}+K_{33}\frac{\partial^{2}T}{\partial z^{2}}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \tag{8-5}$$

设

$$T(r,\theta,z,t)=u(r,\theta,z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{8-6}$$

将式（8－6）代入方程（8－5）可得

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r})+2K_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial^{2}u}{\partial r\partial\theta}+K_{22}\frac{1}{r^{2}}\frac{\partial^{2}u}{\partial\theta^{2}}+K_{33}\frac{\partial^{2}u}{\partial z^{2}}-\frac{\mathrm{i}\omega}{\alpha}u=0 \tag{8-7}$$

设

$$u(r,z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}Z_{n}(r,z) \tag{8-8}$$

其中 n 为整数。

当 $n=0$，将式（8－8）代入方程（8－7），可得

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial Z_0}{\partial r})+K_{33}\frac{\partial^2 Z_0}{\partial z^2}-\frac{i\omega}{\alpha}Z_0=0 \tag{8-9}$$

设

$$Z_0(r,z)=e^{i\lambda z}f_0(r) \tag{8-10}$$

式中 λ 为特征根

将式（8-10）代入方程（8-9）可得

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{df_0}{dr})-f_0(K_{33}\lambda^2+\frac{i\omega}{\alpha})=0 \tag{8-11a}$$

记

$$s^2=-(K_{33}\lambda^2+\frac{i\omega}{\alpha}) \tag{8-11b}$$

方程（8-11a）可写为

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{df_0}{dr})+f_0 s^2=0 \tag{8-11c}$$

方程（8-11c）为 0 阶贝塞尔方程，可以写为

$$r^2\frac{d^2 f_0}{dr^2}+r\frac{df_0}{dr}+f_0 s^2 r^2=0 \tag{8-12}$$

侧面、柱底端和顶端第一类边界条件和初始条件如下

$$r=R,T(R,\theta,z,t)=0 \tag{8-13a}$$

$$z=0,T(r,\theta,0,t)=0 \tag{8-13b}$$

$$z=L,T(r,\theta,L,t)=0 \tag{8-13c}$$

$$r=0,T(0,\theta,z,t)\text{ 有限值} \tag{8-13d}$$

$$T(r,\theta,z,0)=\varphi(r,\theta,z) \tag{8-13e}$$

设初始条件 $\varphi(r,\theta,z)$ 含有独立的 $\varphi_0(r,z)$，即

$$\varphi(r,\theta,z)=\varphi_0(r,z)+\varphi_1(r,\theta,z)+\varphi_2(r,\theta) \tag{8-14}$$

结合式（8-10），考虑到方程（8-12）含有 λ 的平方，那么 $-\lambda$ 对应的解也满足式（8-11a），这样有

$$Z_0(r,z)=A_1 e^{i\lambda z}f_0(r)+A_2 e^{-i\lambda z}f_0(r) \tag{8-15}$$

将式（8-15）代入式（8-13b）和（8-13c），可得

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{i\lambda L} & e^{-i\lambda L} \end{vmatrix}=0 \tag{8-16}$$

$$\sin\lambda L=0$$

$$\lambda=\frac{k\pi}{L},k=0,1,2,\cdots \tag{8-17}$$

考虑到实心圆柱体中心温度有限性，方程（8-12）有解

$$f_0=c_0 J_0(rs) \tag{8-18}$$

式中 c_0 为待定实数。令 $x=rs$ 。$J_0(x)$ 为 0 阶第一类贝塞尔函数，其零点为 $\mu_m^0(m=1,2,\cdots)$。可有

$$Rs = \mu_m^0 \tag{8-19}$$

$$\omega = \mathrm{i}\alpha[K_{33}\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}\right)^2] \tag{8-20}$$

这样，可得方程（8-5）的解析解

$$T_0(r,z,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} A_{m,k} J_0\left(\frac{r\mu_m^0}{R}\right)\sin\frac{k\pi z}{L}\mathrm{e}^{-\alpha[K_{33}(\frac{k\pi}{L})^2+(\frac{\mu_m^0}{R})^2]t} \tag{8-21}$$

当 $n \neq 0$，设

$$Z_n(r,z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\lambda_k z} f_{nk}(r)$$

其中 $\lambda_k = k\lambda$，k 为整数。

将上式代入方程（8-7），可得

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2 f_{nk}}{\mathrm{d}r^2} + r\frac{\mathrm{d}f_{nk}}{\mathrm{d}r}(1+2K_{12}\mathrm{i}n) + f_{nk}\{[-K_{33}(\lambda_k)^2 - \frac{\mathrm{i}\omega}{\alpha}]r^2 - K_{22}n^2\} = 0 \tag{8-22a}$$

将式（8-11b）代入到方程（8-22a），可得

$$r^2\frac{d^2 f_{nk}}{\mathrm{d}r^2} + r\frac{\mathrm{d}f_{nk}}{\mathrm{d}r}(1+2K_{12}\mathrm{i}n) + f_{nk}(s^2r^2 - K_{22}n^2) = 0 \tag{8-22b}$$

引用

$$x = rs \tag{8-22c}$$

式中 $s^2 = -(K_{33}\lambda_k{}^2 + \frac{\mathrm{i}\omega}{\alpha})$。

这样（8-22b）可写为

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2 f_{nk}}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}f_{nk}}{\mathrm{d}x}(1+2K_{12}\mathrm{i}n) + f_{nk}(x^2 - K_{22}n^2) = 0 \tag{8-22d}$$

方程（8-22d）与第 5 章中（5-10）即

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2 f_n}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}x}(1+2K_{12}\mathrm{i}n) + f_n(x^2 - K_{22}n^2) = 0$$

结构相同，这样可沿用第 5 章相关结论，得到方程（8-22d）的解如下

$$f_{nk} = \sum_{m=0}^{\infty} A_{l,n,m}x^{2m+\mathrm{i}p_{l,n}} = A_{l,n,0}Z_{\mathrm{i}p_{l,n}}(x) \tag{8-23}$$

其中 k 为整数，$p_{l,n} = a_{l,n} + \mathrm{i}b_{l,n}$ 是特征根，l=1，2。$A_{l,n,0}$ 是复数常数。式中

$$\begin{cases} a_{1,n} = -nK_{12} \\ b_{1,n} = n\sqrt{K_{22} - K_{12}^2} \\ a_{2,n} = -nK_{12} \\ b_{2,n} = -n\sqrt{K_{22} - K_{12}^2} \end{cases} \tag{8-24}$$

综合式（8-8）（8-10）和（8-23），可得方程（8-7）解如下

$$u_{l,n,k}(r,\theta,z) = A_{l,n,k,0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}e^{\mathrm{i}\lambda_k z}Z_{\mathrm{i}p_{l,n}}(x) \tag{8-25}$$

其中 $n \neq 0$。

将式（8-25）代入圆柱体底部、顶部端面边界条件和侧面边界条件，即可确定特征

根 λ_k 和 ω 。

下面针对柱侧面、柱底端和顶端均具有第一类边界条件的 A 型各向异性实心圆柱非稳态热传导问题进行解析求解。此问题边界条件见式（8－13）。

考虑式（8－13d），式（8－25）只能选 $l=2(n>0), l=1(n<0)$，这样针对（8－25）可得

$$A_{1,n,k,0}=0 \quad (n>0) \tag{8-26}$$

将式（8－25）代入式（8－13a），可得

$$Z_{ip_{l,n}}(x)=0 \tag{8-27}$$

求解 $Z_{ip_{l,n}}(x)=0$，可得零点 $\mu^0_{l,n,j}$

$$\left(\frac{\mu^0_{l,n,j}}{R}\right)^2=-\left(K_{33}\lambda_k^2+\frac{\mathrm{i}\omega}{\alpha}\right) \tag{8-28}$$

由此可改写式（8－25）如下

$$u_{l,n,k}(r,\theta,z)=A_{l,n,k,j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}e^{\mathrm{i}\lambda_k z}Z_{ip_{l,n}}\left(\frac{r}{R}\mu^0_{l,n,j}\right) \tag{8-29}$$

下面考虑 z 方向边界条件满足情况，将式（8－29）代入边界条件（8－13b）和（8－13c）。考虑到式（8－11b），一个 $\mu^0_{l,n,j}$ 对应于 $\pm\lambda_k$，可将 $u_{l,n,k,j}+u_{l,n,-k,j}=A_{l,n,k,j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}e^{\mathrm{i}\lambda_k z}Z_{ip_{l,n}}\left(\frac{r}{R}\mu^0_{l,n,j}\right)+A_{l,n,-k,j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}e^{-\mathrm{i}\lambda_k z}Z_{ip_{l,n}}\left(\frac{r}{R}\mu^0_{l,n,j}\right)$ 代入 z 方向边界条件

$$z=0, u(r,\theta,0)=0; z=L, u(r,\theta,L)=0$$

这样可得特征行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_k L} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda_k L} \end{vmatrix}=0 \tag{8-30}$$

和

$$\sin\lambda_k L=0 \tag{8-31}$$

这样可得

$$\lambda_k=\frac{k\pi}{L}, k=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{8-32}$$

根据式（8－11b），可得

$$\left(\frac{\mu^0_{l,n,j}}{R}\right)^2=-\left[K_{33}(\lambda_k)^2+\frac{\mathrm{i}\omega}{\alpha}\right] \tag{8-33}$$

和

$$\mathrm{i}\omega=-\left[\left(\frac{\mu^0_{l,n,j}}{R}\right)^2+K_{33}\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2\right]\alpha \tag{8-34}$$

结合式（5－41b）（8－21）（8－26）（8－27）（8－29）（8－32）和（8－34），可得

$$T=\mathrm{Re}\left\{\sum_{n=-\infty,n\neq0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=-\infty,k\neq0}^{\infty}A_{l,n,j,k,0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{L}z}Z_{ip_{l,n}}\left(\frac{r}{R}\mu^0_{l,n,j}\right)\mathrm{e}^{-\left[\left(\frac{\mu^0_{l,n,j}}{R}\right)^2+K_{33}\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2\right]\alpha t}\right\}+T_0(r,z,t)+T(r,\theta,t) \tag{8-35}$$

其中 $T(r,\theta,t)$ 为 $k=0,n\neq0$ 的解，见式（5－42b），按第五章方法单独求解。式（8－35）

中 $l=2$ ($n>0$)，$l=1$ ($n<0$)。

考虑到 $A_{l,n,j,k,0}$，$e^{in\theta}$ 和 $r^{ia_{l,n}}$ 为虚数，可有

$$\begin{cases} A_{l,n,j,k,0} = A_{l,n,j,k,0,r} + iA_{l,n,j,k,0,i} \\ e^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta \\ r^{ia_{l,n}} = e^{ia_{l,n}\ln(r)} = \cos(a_{l,n}\ln r) + i\sin(a_{l,n}\ln r) \end{cases} \tag{8-36}$$

根据式 (8-35)(8-36)(5-39c) 和 (5-42b)，可得

$$\begin{aligned} T = {} & T_0(r,z,t) + T(r,\theta,t) + \\ & 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\{A_{l,n,j,k,0,r}[Z_{l,n}^{(j,1)}(r)\cos(n\theta+\frac{k\pi}{L}z+a_{l,n}\ln r) - Z_{l,n}^{(j,2)}(r)\sin(n\theta+\frac{k\pi}{L}z+a_{l,n}\ln r)] + \\ & A_{l,n,j,k,0,i}[-Z_{l,n}^{(j,2)}(r)\cos(n\theta+\frac{k\pi}{L}z+a_{l,n}\ln(r) - Z_{l,n}^{(j,1)}(r)\sin(n\theta+\frac{k\pi}{L}z+a_{l,n}\ln r]\}e^{-[(\frac{\overset{0}{\mu}_{l,n,j}}{R})^2+K_{33}(\frac{k\pi}{L})^2]\alpha t} \end{aligned} \tag{8-37}$$

其中 $l=2$。$Z_{l,n}^{(j,1)}(r)$，$Z_{l,n}^{(j,2)}(r)$ 是实数多项式，定义如下

$$\begin{aligned} & Z_{l,n}^{(j,1)}(r) = \\ & r^{-b_{l,n}}[Z_{l,n,0}R_{l,n,j,0} + Z_{l,n,2}R_{l,n,j,1}r^2 + \cdots + Z_{l,n,2(M-1)}R_{l,n,j,M-1}r^{2(M-1)} + Z_{l,n,2M}R_{l,n,j,M}r^{2M} + \cdots] \\ & Z_{l,n}^{(j,2)}(r) = \\ & r^{-b_{l,n}}[Z_{l,n,0}I_{l,n,j,0} + Z_{l,n,2}I_{l,n,j,1}r^2 + \cdots + Z_{l,n,2(M-1)}I_{l,n,j,M-1}r^{2(M-1)} + Z_{l,n,2M}I_{l,n,j,M}r^{2M} + \cdots] \end{aligned}$$

式中 $\overset{0}{\mu}_{l,n,j}$ 为求解 $Z_{ip_{l,n}}(x)=0$ 所得零点，$R_{l,n,j,m} + iI_{l,n,j,m} = (\frac{\overset{0}{\mu}_{l,n,j}}{R})^{2m-b_{l,n}+ia_{l,n}}$。计算中只选取虚部为正的纯虚数根。

实际计算中，式 (8-37) 中 n、k、j 不可能取无限大，设 n 取值在 [1，N] 之间，k 取值在 [1，K] 之间，对于一组 (n，k)，$Z_{ip_{l,n}}(x)=0$ 有 $N_{n,j}$ 个特征根；$J_0(x)$ 计算选取 N_0 个特征根，这样式 (8-37) 共有 ($2\times N_{n,j}\times N\times K + N_0K$) 个未知数即 $[(A_{l,n,k,j,0,r}$，$A_{l,n,k,j,0,i}(n=1,2,\cdots,N;k=1,2,\cdots,K;j=1,2,\cdots,N_{n,j});A_{m,k}(m=1,2,\cdots,N_0;k=1,2,\cdots,K)]$。将式 (8-37) 代入柱体初始条件 $T(r,\theta,z,0)=\varphi(r,\theta,z)$，可得

$$\begin{aligned} & 2\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{N_j}\{A_{l,n,k,j,0,r}[Z_{l,n}^{(j,1)}(r)\cos(n\theta+\frac{k\pi}{L}z+a_{l,n}\ln r) - Z_{l,n}^{(j,2)}(r)\sin(n\theta+\frac{k\pi}{L}z+a_{l,n}\ln r)] + \\ & A_{l,n,k,j,0,i}[-Z_{l,n}^{(j,2)}(r)\cos(n\theta+\frac{k\pi}{L}z+a_{l,n}\ln r) - Z_{l,n}^{(j,1)}(r)\sin(n\theta+\frac{k\pi}{L}z+a_{l,n}\ln r)]\} \\ & + T_0(r,z,0) + T(r,\theta,0) = \varphi_0(r,z) + \varphi_1(r,\theta,z) + \varphi_2(r,\theta) \end{aligned} \tag{8-38}$$

可得

$$\begin{aligned} & 2\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{N_j}\{A_{l,n,k,j,0,r}[Z_{l,n}^{(j,1)}(r)\cos(n\theta+\frac{k\pi}{L}z+a_{l,n}\ln r) - Z_{l,n}^{(j,2)}(r)\sin(n\theta+\frac{k\pi}{L}z+a_{l,n}\ln r)] + \\ & A_{l,n,k,j,0,i}[-Z_{l,n}^{(j,2)}(r)\cos(n\theta+\frac{k\pi}{L}z+a_{l,n}\ln r) - Z_{l,n}^{(j,1)}(r)\sin(n\theta+\frac{k\pi}{L}z+a_{l,n}\ln r)]\} = \varphi_1(r,\theta,z) \end{aligned} \tag{8-39}$$

$$T_0(r,z,0) = \varphi_0(r,z) \tag{8-40a}$$

$$T(r,\theta,0) = \varphi_2(r,\theta) \tag{8-40b}$$

方程（8－40a）可以采用贝塞尔－傅立叶级数方法独立求解，方程（8－40b）可采用第5章复数柱函数展开方法独立求解。如何求解方程（8－39）是个新问题。下面从 $e^{in\theta}e^{i\frac{k\pi}{L}z}Z_{ip_{l,n}}(\frac{r}{R}\mu^0_{l,n,j})$ 函数系的正交性开始求解。

8.2　复数柱体函数展开定理

(1) $e^{in\theta}e^{i\frac{k\pi}{L}z}Z_{ip_{l,n}}(\frac{r}{R}\mu^0_{l,n,j})$ 函数系的正交性

$e^{in\theta}e^{i\frac{k\pi}{L}z}Z_{ip_{l,n}}(\frac{r}{R}\mu^0_{l,n,j})$ 函数系在圆柱体域内（$0\leqslant r<R$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，$0\leqslant z\leqslant L$）带 r 正交。根据在横截圆面（$0\leqslant r<R$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$）上复数柱函数 $e^{in\theta}Z_{ip_{l,n}}(\frac{r}{R}\mu^0_{l,n,j})$ 正交性，再结合傅立叶级数 $e^{i\frac{k\pi}{L}z}$ 在区间（$0\leqslant z\leqslant L$）上的正交性，可证明 $e^{in\theta}e^{i\frac{k\pi}{L}z}Z_{ip_{l,n}}(\frac{r}{R}\mu^0_{l,n,j})$ 函数系在圆柱体域内（$0\leqslant r<R$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，$0\leqslant z\leqslant L$）带 r 正交。

证明：

根据复数柱函数 $e^{in\theta}Z_{ip_{l,n}}(\frac{r}{R}\mu^0_{l,n,j})$ 展开定理证明可得

当 $\mu^0_{l,n,j_1}\neq\mu^0_{l,n,j_2}$，有

$$\int_0^R rZ_{ip_{l,n}}(\frac{\mu^0_{l,n,j_1}}{R}r)\left[Z_{ip_{l,n}}(\frac{\mu^0_{l,n,j_2}}{R}r)\right]^* \mathrm{d}r = 0, j_1\neq j_2 \tag{8-41a}$$

当 $\mu^0_{1,n,j_2}\neq\mu^0_{2,n,j_1}$，有

$$\int_0^R rZ_{ip_{2,n}}(\frac{\mu^0_{2,n,j_1}}{R}r)e^{in\theta}\left[Z_{ip_{1,n}}(\frac{r\mu^0_{1,n,j_2}}{R})e^{in\theta}\right]^* \mathrm{d}r = 0 \tag{8-41b}$$

对式（8－41a）进行如下积分，根据 $e^{in\theta}$ 在区间（$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$）和 $e^{i\frac{k\pi}{L}z}$ 在区间（$0\leqslant z\leqslant L$）的正交性，当 $j_1\neq j_2$ 或 $n_1\neq n_2$ 或 $k_1\neq k_2$ 时，有下式成立

$$\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^L Z_{ip_{l,n}}(\frac{\mu^0_{l,n,j_1}}{R}r)e^{in_1\theta}e^{i\frac{k_1\pi}{L}z}\left[Z_{ip_{l,n}}(\frac{\mu^0_{l,n,j_2}}{R}r)e^{in_2\theta}e^{i\frac{k_2\pi}{L}z}\right]^* r\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = 0 \tag{8-42}$$

对式（8－41b）进行如下积分，根据 $e^{in\theta}$ 和 $e^{i\frac{k\pi}{L}z}$ 的有关正交性，当 $j_1\neq j_2$ 或 $n_1\neq n_2$ 或 $k_1\neq k_2$ 时，有下式成立

$$\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^L Z_{ip_{2,n}}(\frac{\mu^0_{l,n,j_1}}{R}r)e^{in_1\theta}e^{i\frac{k_1\pi}{L}z}\left[Z_{ip_{1,n}}(\frac{\mu^0_{l,n,j_2}}{R}r)e^{in_2\theta}e^{i\frac{k_2\pi}{L}z}\right]^* r\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = 0 \tag{8-43}$$

根据式（8－42）和（8－43），可得结论：

$e^{in\theta}e^{i\frac{k\pi}{L}z}Z_{ip_{l,n}}(\frac{r}{R}\mu^0_{l,n,j})$ 函数系在圆柱体域内（$0\leqslant r<R$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，$0\leqslant z\leqslant L$）带 r 正交。

定义：复数柱体函数 $C_{l,n,k,j}(r,\theta,z)$

$$C_{l,n,k,j}(r,\theta,z) = e^{in\theta} e^{i\frac{k\pi}{L}z} Z_{ip_{l,n}}(\frac{r}{R}\mu^{0}_{l,n,j}) \tag{8-44}$$

其中 $p_{l,n} = a_{l,n} + ib_{l,n}$ $a_{1,n} = -nK_{12}, b_{1,n} = n\sqrt{K_{22} - K_{12}^2}, a_{2,n} = -nK_{12}, b_{2,n} = -n\sqrt{K_{22} - K_{12}^2}$，$\mu^{(j)}_{l,n}$ 为 $Z_{ip_{l,n}}(x) = 0$ 的根。

根据施图姆－刘维尔理论和复数柱体函数 $C_{l,n,k,j}(r,\theta,z)$ 函数系在圆柱体域内（$0 \leqslant r < R$，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$，$0 \leqslant z \leqslant L$）带权 r 正交性，有复数柱体函数展开定理。

(2) 复数柱体函数定理

复数柱体函数 $C_{l,n,k,j}(r,\theta,z)$ 级数展开

若 $f(r,\theta,z)$ 在柱坐标下实圆柱体域内（$0 \leqslant r < R$，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$，$0 \leqslant z \leqslant L$）分段光滑，且 $f(r,\theta,z)$ 为三个坐标耦合函数，$f(R,\theta,z) = 0$，$f(r,\theta,0) = 0$，$f(r,\theta,L) = 0$，那么 $f(r,\theta,z)$ 在柱体域内有 $C_{l,n,k,j}(r,\theta,z)$ 级数展开

$$f(r,\theta,z) = \sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_{l,n,k,j,0} e^{in\theta} e^{i\frac{k\pi}{L}z} Z_{ip_{l,n}}(\frac{r}{R}\mu^{0}_{l,n,j}) \tag{8-45}$$

其中 $B_{l,n,k,j} = B_{l,n,k,j,r} + iB_{l,n,k,j,i}$；$p_{l,n} = a_{l,n} + ib_{l,n}$；$a_{l,n} = -nK_{12}, b_{l,n} = -|n|\sqrt{K_{22} - K_{12}^2}$；$\mu^{(j)}_{l,n}$ 为 $Z_{ip_{l,n}}(x) = 0$ 的根，且有

$$B_{l,n,k,j,0} = \frac{\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^L [e^{in\theta} e^{i\frac{k\pi}{L}z} Z_{ip_{l,n}}(\frac{r}{R}\mu^{0}_{l,n,j})]^* f(r,\theta,z) r dz d\theta dr}{\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^L [e^{in\theta} e^{i\frac{k\pi}{L}z} Z_{ip_{l,n}}(\frac{r}{R}\mu^{0}_{l,n,j})]^* e^{in\theta} e^{i\frac{k\pi}{L}z} Z_{ip_{l,n}}(\frac{r}{R}\mu^{0}_{l,n,j}) r dz d\theta dr} \tag{8-46}$$

定理完毕。

8.3　求解模式及数值实验

设 $\varphi(r,\theta,z) = \varphi_0(r,z) + \varphi_1(r,\theta,z) + \varphi_2(r,\theta)$。将式（8－37）代入柱体初始条件 $T(r,\theta,z,0) = \varphi(r,\theta,z)$，将 $\varphi_1(r,\theta,z)$ 展开为复数柱体函数 $C_{l,n,k,j}(r,\theta,z)$，根据式（8－46）给出 $B_{l,n,k,j,0,r}, B_{l,n,k,j,0,i}$。根据 $B_{l,n,k,j,0,r} = A_{l,n,k,j,0,r}, B_{l,n,k,j,0,i} = A_{l,n,k,j,0,i}$，可确定式（8－37）中待定常数 $A_{l,n,k,j,0,r}, A_{l,n,k,j,0,i}$。将 $\varphi_0(r,z)$ 展开为贝塞尔－傅立叶级数，可以确定 $T_0(r,z,t)$ 中相应待定常数。将 $\varphi_2(r,\theta)$ 展开为复数柱函数，可以确定 $T(r,\theta,t)$ 中相应待定常数。确定所有待定常数后，根据式（8－37）确定函数值，问题得解。

数值实验表明：本章级数解收敛性很好，初始条件和边界条件满足很好，复数柱体函数解求解是正确的。

8.4　其他边界条件下的 A 型各向异性柱体热传导非稳态问题

8.4.1　柱侧面具有第二类边界条件、顶（底）端为第一类边界条件实心柱体

对于柱侧面具有第二类边界条件的实心柱体热传导问题，可得边界条件

$$\begin{cases} q_r|_{r=R} = -(k_{11}\dfrac{\partial T}{\partial r} + k_{12}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T}{\partial \theta})|_{r=R} = 0 \\ T(r,\theta,0,t) = 0 \\ T(r,\theta,L,t) = 0 \end{cases} \tag{8-47a}$$

和自然条件 $T(0,\theta,z,t)$ 为有限值。令 $x = rs$ 。将式（8－25）代入式（8－47a）第一式，可得

$$[k_{11}x\frac{\mathrm{d}Z_{ip_{l,n}}(x)}{\mathrm{d}x} + k_{12}\mathrm{i}nZ_{ip_{l,n}}(x)]|_{x=Rs} = 0 \tag{8-47b}$$

式中 $l = 2$ 。

求解特征方程（8－47b），可得 s ，进而确定问题解。

8.4.2　柱侧面具有第三类边界条件、顶（底）端为第一类边界条件的实心柱体

第三类边界条件（边界热对流）为

$$\begin{cases} [-(k_{11}\dfrac{\partial T}{\partial r} + k_{12}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T}{\partial \theta}) + h_m T]|_{r=R} = 0 \\ T(r,\theta,0,t) = 0 \\ T(r,\theta,L,t) = 0 \end{cases} \tag{8-48}$$

和自然条件 $T(0,\theta,z,t)$ 为有限值。h_m 为柱体与外界环境热对流系数。

将式（8－25）代入式（8－48），可得

$$[-k_{11}s\frac{\mathrm{d}Z_{ip_{l,n}}(x)}{\mathrm{d}x} + (h_m - k_{12}\frac{\mathrm{i}n}{R})Z_{ip_{l,n}}(x)]|_{x=Rs} = 0 \tag{8-49}$$

求解特征方程（8－49），可得 s ，进而确定问题解。

8.4.3　柱侧面具有第一类边界条件、顶（底）端为第一类边界条件空心柱体

对于柱侧面具有第一类边界条件的空心柱体热传导问题边界条件为

$$\begin{cases} T(r_1,\theta,z,t) = 0 \\ T(r_2,\theta,z,t) = 0 \\ T(r,\theta,0,t) = 0 \\ T(r,\theta,L,t) = 0 \end{cases} \tag{8-50}$$

根据式（8－25），将 $u_{1,n,k} + u_{2,n,k} = A_{1,n,k,0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}e^{\mathrm{i}\lambda_k z}Z_{ip_{1,n}}(x) + A_{2,n,k,0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}e^{\mathrm{i}\lambda_k z}Z_{ip_{2,n}}(x)$ 代入式（8－50）的第一、二式，根据待定系数 $A_{1,n,k,0}$ 、$A_{2,n,k,0}$ 不全为 0 的条件，可得特征行列式

$$\begin{vmatrix} Z_{ip_{1,n}}(x)|_{x=r_1 s} & Z_{ip_{2,n}}(x)|_{x=r_1 s} \\ Z_{ip_{1,n}}(x)|_{x=r_2 s} & Z_{ip_{2,n}}(x)|_{x=r_2 s} \end{vmatrix} = 0 \tag{8-51}$$

其中 $x = rs$ 。

求解特征方程（8－51），可得 $s_n^{(j)}$ 和待定系数关系式

$$A_{2,n,k,j,0} = -A_{1,n,k,j,0}\frac{Z_{ip_{1,n}}(x)|_{x=r_1 s_n^{(j)}}}{Z_{ip_{2,n}}(x)|_{x=r_1 s_n^{(j)}}} \tag{8-52}$$

将式（8-52）代入式（8-25），综合推导可得

$$T = \mathrm{Re}\{ \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty} A_{1,n,k,j,0} \mathrm{e}^{in\theta} \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{L}z} e^{-[(s_n^{(j)})^2 + K_{33}(\frac{k\pi}{L})^2]at} \left[Z_{ip_{1,n}}(\frac{r}{R}s_n^{(j)}) - Z_{ip_{2,n}}(\frac{r}{R}s_n^{(j)}) \frac{Z_{ip_{1,n}}(x)|_{x=r_1 s_n^{(j)}}}{Z_{ip_{2,n}}(x)|_{x=r_1 s_n^{(j)}}} \right] \} + T^* \tag{8-53}$$

其中 T^* 为 $n=0$ 和 $k=0$ 时相应函数解，$T^* = T_0(r,z,t) + T(r,\theta,t)$，读者可参照本章和第 5 章方法自行推导

8.4.4 柱侧面具有第二类边界条件、顶（底）端为第一类边界条件空心柱体

对于内外径都是第二类边界条件的空心圆柱边界条件

$$\begin{cases} q_r|_{r=r_1} = -(k_{11}\dfrac{\partial T}{\partial r} + k_{12}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T}{\partial \theta})|_{r=r_1} = 0 \\ q_r|_{r=r_2} = -(k_{11}\dfrac{\partial T}{\partial r} + k_{12}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T}{\partial \theta})|_{r=r_2} = 0 \\ T(r,\theta,0,t) = 0 \\ T(r,\theta,L,t) = 0 \end{cases} \tag{8-54}$$

对于内外径都是第二类边界条件的空心圆柱采取类似的方法可建立特征矩阵行列式，求出特征值 λ_m 和 $A_{2,n,0,j}, A_{1,n,0,j}$ 之间关系式。令 $x = rs$。

特征矩阵行列式

$$\begin{vmatrix} [k_{11}s\dfrac{\mathrm{d}Z_{ip_{1,n}}(x)}{\mathrm{d}x} + k_{12}\dfrac{in}{r_1}Z_{ip_{1,n}}(x)]|_{x=r_1 s} & [k_{11}s\dfrac{\mathrm{d}Z_{ip_{2,n}}(x)}{\mathrm{d}x} + k_{12}\dfrac{in}{r_1}Z_{ip_{2,n}}(x)]|_{x=r_1 s} \\ [k_{11}s\dfrac{\mathrm{d}Z_{ip_{1,n}}(x)}{\mathrm{d}x} + k_{12}\dfrac{in}{r_2}Z_{ip_{1,n}}(x)]|_{x=r_2 s} & [k_{11}s\dfrac{\mathrm{d}Z_{ip_{2,n}}(x)}{\mathrm{d}x} + k_{12}\dfrac{in}{r_2}Z_{ip_{2,n}}(x)]|_{x=r_2 s} \end{vmatrix} = 0 \tag{8-55}$$

求解式（8-55）可以确定 $s_n^{(j)}$。根据式（8-55），可得

$$A_{2,n,k,j,0} = -A_{1,n,k,j,0}\frac{[k_{11}s_n^{(j)}\dfrac{\mathrm{d}Z_{ip_{1,n}}(x)}{\mathrm{d}x} + k_{12}\dfrac{in}{r_1}Z_{ip_{1,n}}(x)]|_{x=r_1 s_n^{(j)}}}{[k_{11}s_n^{(j)}\dfrac{\mathrm{d}Z_{ip_{2,n}}(x)}{\mathrm{d}x} + k_{12}\dfrac{in}{r_1}Z_{ip_{2,n}}(x)]|_{x=r_1 s_n^{(j)}}} \tag{8-56}$$

将式（8-56）代入式（8-25），推导可得

$$T = \mathrm{Re}(\sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{1,n,k,j,0} \mathrm{e}^{in\theta} \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{L}z} e^{-[(s_n^{(j)})^2 + K_{33}(\frac{k\pi}{L})^2]at} \{ Z_{ip_{1,n}}(\frac{r}{R}s_n^{(j)}) - Z_{ip_{2,n}}(\frac{r}{R}s_n^{(j)}) \frac{[k_{11}s_n^{(j)}\dfrac{dZ_{ip_{1,n}}(x)}{dx} + k_{12}\dfrac{in}{r_1}Z_{ip_{1,n}}(x)]|_{x=r_1 s_n^{(j)}}}{[k_{11}s_n^{(j)}\dfrac{dZ_{ip_{2,n}}(x)}{dx} + k_{12}\dfrac{in}{r_1}Z_{ip_{2,n}}(x)]|_{x=r_1 s_n^{(j)}}} \}) + T^* \tag{8-57}$$

其中 T^* 为 $n=0, k=0$ 时相应函数解，$T^* = T_0(r,z,t) + T(r,\theta,t)$，读者可参照本章和第 5 章方法自行推导

8.4.5 柱侧面具有第三类边界条件、顶（底）端为第一类边界条件空心柱体

对于内外径都是第三类边界条件的空心圆柱边界条件

$$\begin{cases} q_r|_{r=r_1} = [-(k_{11}\dfrac{\partial T}{\partial r} + k_{12}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T}{\partial \theta}) + h_m T]|_{r=r_1} = 0 \\ q_r|_{r=r_2} = [-(k_{11}\dfrac{\partial T}{\partial r} + k_{12}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T}{\partial \theta}) + h_m T]|_{r=r_2} = 0 \\ z = 0, T(r,\theta,0,t) = 0 \\ z = L, T(r,\theta,L,t) = 0 \end{cases} \tag{8-58}$$

令 $x = rs$ 。对于内外径都是第三类边界条件的空心圆柱采取类似的方法可建立特征矩阵行列式。

特征矩阵行列式为

$$\begin{vmatrix} [-k_{11}s\dfrac{dZ_{ip_{1,n}}(x)}{dx} + (h_m - k_{12}\dfrac{in}{r_1})Z_{ip_{1,n}}(x)]|_{x=r_1}, & [-k_{11}s\dfrac{dZ_{ip_{2,n}}(x)}{dx} + (h_m - k_{12}\dfrac{in}{r_1})Z_{ip_{2,n}}(x)]|_{x=r_1}, \\ [-k_{11}s\dfrac{dZ_{ip_{1,n}}(x)}{dx} + (h_m - k_{12}\dfrac{in}{r_2})Z_{ip_{1,n}}(x)]|_{x=r_2}, & [-k_{11}s\dfrac{dZ_{ip_{2,n}}(x)}{dx} + (h_m - k_{12}\dfrac{in}{r_2})Z_{ip_{2,n}}(x)]|_{x=r_2}, \end{vmatrix} = 0 \tag{8-59}$$

求解式（8-59）可以确定 $s_n^{(j)}$ 。根据式（8-59），可得

$$A_{2,n,k,j,0} = -A_{1,n,k,j,0}\frac{[-k_{11}s_n^{(j)}\dfrac{dZ_{ip_{1,n}}(x)}{dx} + (h_m - k_{12}\dfrac{in}{r_1})Z_{ip_{1,n}}(x)]|_{x=r_1 s_n^{(j)}}}{[-k_{11}s_n^{(j)}\dfrac{dZ_{ip_{2,n}}(x)}{dx} + (h_m - k_{12}\dfrac{in}{r_1})Z_{ip_{2,n}}(x)]|_{x=r_1 s_n^{(j)}}} \tag{8-60}$$

将式（8-60）代入式（8-25）可得

$$T = \mathrm{Re}(\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_{1,n,k,j,0}e^{in\theta}e^{i\frac{k\pi}{L}z}e^{-[(s_n^{(j)})^2+K_{33}(\frac{k\pi}{L})^2]at}\{Z_{ip_{1,n}}(\frac{r}{R}s_n^{(j)}) - Z_{ip_{2,n}}(\frac{r}{R}s_n^{(j)})\frac{[-k_{11}s_n^{(j)}\dfrac{dZ_{ip_{1,n}}(x)}{dx} + (h_m - k_{12}\dfrac{in}{r_1})Z_{ip_{1,n}}(x)]|_{x=r_1 s_n^{(j)}}}{[-k_{11}s_n^{(j)}\dfrac{dZ_{ip_{2,n}}(x)}{dx} + (h_m - k_{12}\dfrac{in}{r_1})Z_{ip_{2,n}}(x)]|_{x=r_1 s_n^{(j)}}}\}) + T^* \tag{8-61}$$

其中 T^* 为 $n=0, k=0$ 时相应函数解，$T^* = T_0(r,z,t) + T(r,\theta,t)$ ，读者可参照本章和第 5 章方法自行推导。

8.5 特征值 λ 的求解

对于 A 型各向异性情况的柱体，z 方向的特征值 λ_k 可以独立求解，具体求解要根据顶端和底端边界条件来确定。对于顶、底端均为第一类边界条件的 λ_k 用式（8-17）计算。

对于如下边界条件

$$\begin{cases} z=0, \dfrac{\partial u}{\partial z}(r,\theta,0)=0 \\ z=L, \dfrac{\partial u}{\partial z}(r,\theta,L)=0 \end{cases} \tag{8-62}$$

将 $Z_n(r,z)=A_1 e^{i\lambda_k z} f_{nk}(r)+A_2 e^{-i\lambda_k z} f_{nk}(r)$ 代入式（8-62），可得特征行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ e^{i\lambda_k L} & -e^{-i\lambda_k L} \end{vmatrix}=0 \tag{8-63}$$

$$\sin\lambda_k L=0 \tag{8-64}$$

$$\lambda_k=\frac{k\pi}{L}, k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots, \tag{8-65}$$

对于如下边界条件

$$\begin{cases} z=0, u(r,\theta,0)=0 \\ z=L, \dfrac{\partial u}{\partial z}(r,\theta,L)=0 \end{cases} \tag{8-66}$$

将 $Z_n(r,z)=A_1 e^{i\lambda_k z} f_{nk}(r)+A_2 e^{-i\lambda_k z} f_{nk}(r)$ 代入式（8-66）可得特征行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{i\lambda_k L} & -e^{-i\lambda_k L} \end{vmatrix}=0 \tag{8-67}$$

$$\cos\lambda_k L=0 \tag{8-68}$$

$$\lambda_k=\frac{(k+0.5)\pi}{L}, k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots \tag{8-69}$$

各向异性三维柱体非稳态热传导问题涉及了 3 个几何坐标变量和 1 个时间变量，实际为 4 维问题。随着各向异性的不同，各有关边界条件和初始条件均有差异，由此根据本章求解思路，可以构建出丰富多彩的三维柱体非稳态热传导问题解。

第9章　表面与环境换热的各向异性圆薄板稳态热传导方程——变形复数球柱多项式与变形复数球柱函数

各向异性圆薄板与外界环境热传导问题是工程中经常遇到的问题，分析表明：此问题在数学上也提供了新的数学物理方程类型。无限长沿 z 方向温度不变化的圆柱体横截面温度场计算（第5章讨论的问题）与本章研究的圆薄板温度场计算均可采用极坐标进行，但对于各向异性问题来说，两个问题控制方程是不同的。本章提出了变形复数球柱函数 $e^{in\theta}\hat{C}_{ip}(x)$ 用于求解与外界换热的各向异性二维圆薄板稳态热传导问题。研究表明变形复数球柱多项式与变形球贝塞尔函数相关联。本章针对具体各向异性薄圆板热传导问题进行了数值计算，还对系列变形复数柱多项式的特性进行了研究分析。

9.1　极坐标下的板面与外界换热圆薄板稳态热传导控制方程

考虑圆形薄板，圆板半径为 R，厚度为 h，由于薄板厚度远小于半径，并与外径换热，可以简化温度场分布与 z 无关，仅在圆板边界和圆板面与外界环境进行热交换。极坐标 (r,θ) 下各向异性圆形薄板稳态热传导控制偏微分方程为

$$k_{22}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2}+k_{11}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+2k_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta\partial r}+k_{12}\frac{1}{r^2}\frac{\partial T}{\partial\theta}-2\frac{h_a}{\delta}(T-T_a)=q \tag{9-1}$$

其中 k_{11}、k_{12}、k_{22} 为热传导系数

$$k_{11}=k_1\cos^2\beta+k_2\sin^2\beta$$
$$k_{12}=(k_1-k_2)\sin\beta\cos\beta$$
$$k_{22}=k_1\sin^2\beta+k_2\cos^2\beta$$

式 $T(r,\theta)$ 为圆域内温度分布函数；q 是热源函数；下标1为径向 r 方向，下标2代表角度 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 方向；k_1、k_2 分别为 r 方向主热传导系数、切向 θ 方向主传导系数，β 为最大热传导轴方向与径向 r 的夹角。

引入以下参数变换

$$K_{11}=1,K_{12}=\frac{k_{12}}{k_{11}},K_{22}=\frac{k_{22}}{k_{11}},\lambda=2\frac{h_a}{\delta k_{11}},q*=\frac{q-2T_a\frac{h_a}{\delta}}{k_{11}},x=r\sqrt{\lambda} \tag{9-2}$$

这样可以得到以下控制偏微分方程

$$K_{22}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial T}{\partial x}\right)+2K_{12}x\frac{\partial^2 T}{\partial\theta\partial x}+K_{12}\frac{\partial T}{\partial\theta}-x^2T=x^2q* \tag{9-3}$$

9.2　变形复数球柱多项式、变形球 Z_{ip} 方程及各向异性圆板热传导解

9.2.1　变形 Z_{ip} 方程和变形复数柱多项式

设方程（9-3）有解

$$T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \tag{9-4}$$

其中 $\mathrm{i}^2=-1$；n 为整数。

当 $n=0$，方程（9-3）简化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}) - x^2 T = 0 \tag{9-5}$$

式（9-5）是 0 阶变形球贝塞尔方程，其解为

$$T* = c_0 i_0(x) + d_0 k_0(x) \tag{9-6}$$

其中 c_0, d_0 为待定常数。$i_0(x)$ 是 0 阶第一类变形球贝塞尔函数，$k_0(x)$ 是 0 阶第二类变形球贝塞尔函数

$$\begin{cases} i_0(x) = \dfrac{\sinh(x)}{x} \\ k_0(x) = \dfrac{\pi e^{-x}}{2x} \end{cases}$$

对于 $n \neq 0$，式（9-4）代入方程（9-3）可得

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2 f_n}{\mathrm{d}x^2} + 2x\frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}x}(1+K_{12}\mathrm{i}n) + f_n(-x^2 - K_{22}n^2 + \mathrm{i}K_{12}n) = 0 \tag{9-7}$$

方程（9-7）是一个新方程，方程的特点是系数都是 x 的多项式函数并且出现复数系数。对于各向同性或正交异性热传导问题，$K_{12}=0$，方程（9-7）退化为变形球贝塞尔方程

$$z^2\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2} + 2z\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} - f(z^2+\nu^2) = 0$$

当 $K_{12} \neq 0$，方程（9-7）可命名为变形球 Z_{ip} 方程，此方程为一个典型数学物理方程。

设

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{n,k} x^{k+\mathrm{i}p} \tag{9-8}$$

式中 k 为整数，p 为特征根。$A_{n,k}$ 复数常数，这与变形贝塞尔函数不同。

结合式（9-4）和（9-8）可得

$$T = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A_{n,k} x^{k+\mathrm{i}p}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \tag{9-9}$$

式中 $n \neq 0$。

式（9-9）是复数函数。9.3 节给出简略证明：如 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A_{n,k} x^{k+\mathrm{i}p}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ 是实数函数，那

么可以推得当 $n \neq 0$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A_{n,k}x^{k+\mathrm{i}p}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A_{n,k}x^{k+\mathrm{i}p}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$$

分析方程（9－7）结构和式（9－9）级数结构，可得

$$k = 2m, m = 0,1,2,\cdots,\infty \tag{9-10}$$

将式（9－9）代入方程（9－3），化简可得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}x^{\mathrm{i}p}\{-A_{n,0}[p^2+(-\mathrm{i}+2nK_{12})p+K_{22}n^2-\mathrm{i}K_{12}n]+\{-A_{n,2}[p^2+p(-5\mathrm{i}+2K_{12}n)-6+K_{22}n^2-5\mathrm{i}K_{12}n]-A_{n,0}\}x^2+\cdots+\{-A_{n,2m}[p^2+p(2K_{12}n-4\mathrm{i}m-\mathrm{i})+K_{22}n^2-2m-4\mathrm{i}K_{12}nm-4m^2-\mathrm{i}K_{12}n]-A_{n,2(m-1)}\}x^{2m}+\cdots\}=0 \tag{9-11}$$

其中 $A_{n,0} \neq 0$，$A_{n,2m}$ 下标 $2m$ 代表 2 和 m 之积。

设方程（9－11）中 $x^{\mathrm{i}p},x^{2+\mathrm{i}p},x^{4+\mathrm{i}p},\cdots,x^{2(m-1)+\mathrm{i}p},x^{2m+\mathrm{i}p},\cdots$ 前系数为 0，可得

$$p^2+(-\mathrm{i}+2nK_{12})p+K_{22}n^2-\mathrm{i}K_{12}n=0 \tag{9-12}$$

$$A_{n,2m}=\frac{A_{n,2(m-1)}}{-[p^2+p(2K_{12}n-4\mathrm{i}m-\mathrm{i})+K_{22}n^2-2m-4\mathrm{i}K_{12}nm-4m^2-\mathrm{i}K_{12}n]} \tag{9-13}$$

求解方程（9－12）特征根 p，记为 $p_{l,n}=a_{l,n}+\mathrm{i}b_{l,n}$ 。l=1，2。

$$\begin{cases}p_{1,n}=a_{1,n}+\mathrm{i}b_{1,n}\\ p_{2,n}=a_{1,n}+\mathrm{i}b_{2,n}\end{cases} \tag{9-14}$$

$$\begin{cases}a_{1,n}=a_{2,n}=-nK_{12}\\ b_{1,n}=0.5+\sqrt{\dfrac{1}{4}+n^2[K_{22}-(K_{12})^2]}\\ b_{2,n}=0.5-\sqrt{\dfrac{1}{4}+n^2[K_{22}-(K_{12})^2]}\end{cases} \tag{9-15}$$

式（9－9）改写为

$$T=\sum_{l=1}^{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}A_{l,n,2m}x^{2m+\mathrm{i}p_{l,n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \tag{9-16}$$

综合推导可得

$$\begin{cases}A_{l,n,0}=A_{l,n,2}(f_{1,l,n,2}+f_{2,l,n,2}\mathrm{i})\\ \cdots\\ A_{l,n,2(m-1)}=A_{l,n,2m}(f_{1,l,n,2m}+f_{2,l,n,2m}\mathrm{i})\end{cases} \tag{9-17}$$

其中 $f_{2,l,n,2m}=0$

$$f_{1,1,n,2m}=2^2m[m-\sqrt{\frac{1}{4}+n^2K_{22}-n^2(K_{12})^2}] \tag{9-18}$$

$$f_{1,2,n,2m}=2^2m[m+\sqrt{\frac{1}{4}+n^2K_{22}-n^2(K_{12})^2}] \tag{9-19}$$

$$A_{l,n,2m}=A_{l,n,2m,r}+\mathrm{i}A_{l,n,2m,i} \tag{9-20}$$

式中 $A_{l,n,0,r}$, $A_{l,n,0,i}$, …, $A_{l,n,2(m-1),r}$, $A_{l,n,2(m-1),i}$, $A_{l,n,2m,r}$, $A_{l,n,2m,i}$ 为实数。

根据式（9－17）（9－18）和（9－19），可得

$$\begin{bmatrix} A_{l,n,2m,r} \\ A_{l,n,2m,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{f_{1,l,n,2m}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{f_{1,l,n,2m}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{l,n,2(m-1),r} \\ A_{l,n,2(m-1),i} \end{bmatrix} \tag{9-21}$$

由此，可得递推矩阵

$$\begin{bmatrix} A_{l,n,2m,r} \\ A_{l,n,2m,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{l,n,2m} & 0 \\ 0 & Y_{l,n,2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{l,n,0,r} \\ A_{l,n,0,i} \end{bmatrix} \tag{9-22}$$

由式（9－16）～（9－22）可得

$$T_{l,n} = \sum_{m=0}^{\infty} A_{l,n,m} x^{2m+\mathrm{i}p_{l,n}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = A_{l,n,0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \hat{C}_{\mathrm{i}p_{l,n}}(x) \tag{9-23}$$

$$T_{l,n} = (A_{l,n,0,r} + \mathrm{i}A_{l,n,0,i}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \hat{C}_{\mathrm{i}p_{l,n}}(x) \tag{9-24}$$

式中定义了变形复数球柱多项式 $\hat{C}_{\mathrm{i}p_{l,n}}(x)$

$$\hat{C}_{\mathrm{i}p_{l,n}}(x) = x^{\mathrm{i}a_{l,n}} \sum_{m=0}^{\infty} Y_{l,n,2m} x^{2m-b_{l,n}} \tag{9-25}$$

其中

$$\begin{cases} Y_{1,n,0} = 1 \\ Y_{1,n,2} = \dfrac{1}{2^2\left(1-\sqrt{\dfrac{1}{4}+n^2K_{22}-n^2(K_{12})^2}\right)} \\ Y_{1,n,4} = \dfrac{1}{2^2\times 2\left(2-\sqrt{\dfrac{1}{4}+n^2K_{22}-n^2(K_{12})^2}\right)2^2\times 1\left(1-\sqrt{\dfrac{1}{4}+n^2K_{22}-n^2(K_{12})^2}\right)} \\ \cdots \\ Y_{1,n,2m} = \dfrac{1}{2^{2m}m!\left(m-\sqrt{\dfrac{1}{4}+n^2K_{22}-n^2(K_{12})^2}\right)\left(m-1-\sqrt{\dfrac{1}{4}+n^2K_{22}-n^2(K_{12})^2}\right)\cdots\left(1-\sqrt{\dfrac{1}{4}+n^2K_{22}-n^2(K_{12})^2}\right)} \\ Y_{2,n,0} = 1 \\ Y_{2,n,2} = \dfrac{1}{2^2\left(1+\sqrt{\dfrac{1}{4}+n^2K_{22}-n^2(K_{12})^2}\right)} \\ Y_{2,n,4} = \dfrac{1}{2^2\times 2\left(2+\sqrt{\dfrac{1}{4}+n^2K_{22}-n^2(K_{12})^2}\right)2^2\times 1\left(1+\sqrt{\dfrac{1}{4}+n^2K_{22}-n^2(K_{12})^2}\right)} \\ \cdots \\ Y_{2,n,2m} = \dfrac{1}{2^{2m}m!\left(m+\sqrt{\dfrac{1}{4}+n^2K_{22}-n^2(K_{12})^2}\right)\left(m-1+\sqrt{\dfrac{1}{4}+n^2K_{22}-n^2(K_{12})^2}\right)\cdots\left(1+\sqrt{\dfrac{1}{4}+n^2K_{22}-n^2(K_{12})^2}\right)} \end{cases} \tag{9-26}$$

此外，定义 $Y_n^{(l)}(x)$

$$Y_n^{(l)}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} Y_{l,n,2m} x^{2m-b_{l,n}} \quad (l=1,2) \tag{9-27}$$

由式（9－25）（9－27）可得

$$\hat{C}_{ip_{l,n}}(x) = x^{ia_{l,n}} Y_n^{(l)}(x) \tag{9-28}$$

变形球 Z_{ip} 方程（9－7）的解为

$$f_n(x) = A_{1,n,0}\hat{C}_{ip_{1,n}}(x) + A_{2,n,0}\hat{C}_{ip_{2,n}}(x)$$

式中 $A_{1,n,0}$，$A_{2,n,0}$ 为复数常数。

根据线性偏微分方程可叠加性原理，可得方程（9－3）解析解。

$$T = \sum_{l=1}^{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[(A_{l,n,0,r} + iA_{l,n,0,i})e^{in\theta}\hat{C}_{ip_{l,n}}(x)] + c_0 \mathrm{i}_0(x) + d_0 \mathrm{k}_0(x) \tag{9-29}$$

其中 $n \neq 0$。

根据复变函数理论，可得

$$\begin{cases} x^{ia_{l,n}} = e^{ia_{l,n}\ln x} \\ x^{ia_{l,n}} = \cos(a_{l,n}\ln x) + i\sin(a_{l,n}\ln x) \end{cases} \tag{9-30}$$

根据式（9－29）和（9－30）可得

$$T = T_0 + c_0 \mathrm{i}_0(x) + d_0 \mathrm{k}_0(x) + \sum_{l=1}^{2}\sum_{n=1}^{\infty}[A_{l,n,0,r}Y_n^{(l)}(x)\cos(n\theta + a_{l,n}\ln x) - A_{l,n,0,i}Y_n^{(l)}(x)\sin(n\theta + a_{l,n}\ln x)] \tag{9-31}$$

其中 $A_{l,n,0,r}$，$A_{l,n,0,i}(l = 1,2; n = 1,\cdots,\infty)$，$c_0$，$d_0$ 为待定实数常数，T_0 为方程（9－3）特解。

9.2.2 表面与环境换热的各向异性圆板热传导解

式（9－31）可以求解与外界换热圆形薄板温度场问题。在实际计算中，n 不可能取无穷大，取 n 最多取到 N，$Y_n^{(l)}(x)$ 中 m 最多取到 M。这样一般解可以有 $4N+2$ 个未知数（即 $A_{l,n,0,r}$，$A_{l,n,0,i}(l = 1,2; n = 1,\cdots,\infty)$，$c_0$，$d_0$）。对于环形域每边有 1 个边界条件，在每个边界条件所建立的方程中，将非傅立叶级数的部分展开成为傅立叶级数，根据级数的正交性可得到 $4M+2$ 方程，可求得 $4M+2$ 个未知数。

对于实心圆形板，根据中心处温度、热流为有限值的条件，可将待定常数削减一半（具体忽略在式（9－14）和（9－15）对应于 $l=1$ 的解项，只保留对应于 $l=2$ 的解项），再根据圆形板外边界的 1 个边界条件建立 $2M+1$ 线性代数方程，可以求解 $2M+1$ 个未知数。这样，与外界换热各向异性圆形薄板稳态温度场问题得解。

作为作业，求解各向同性圆形板与外界换热的稳态热传导问题。

各向同性圆形板与外界换热的稳态热传导控制偏微分方程为

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \frac{\partial T}{\partial x}\right) - x^2 T = x^2 q * \tag{9-32}$$

由式（9－15）可得

$$\begin{cases} p_{1,n} = \mathrm{i}(0.5 + \sqrt{\dfrac{1}{4} + n^2}) \\ p_{2,n} = \mathrm{i}(0.5 - \sqrt{\dfrac{1}{4} + n^2}) \end{cases} \tag{9-33}$$

将 $k_{11} = k_{22} = k, k_{12} = 0$ 代入式（9-26）可得

$$\begin{cases} Y_{1,n,0} = 1 \\ Y_{1,n,2} = \dfrac{1}{2^2(1 - \sqrt{\dfrac{1}{4} + n^2})} \\ Y_{1,n,4} = \dfrac{1}{2^2 \times 2(2 - \sqrt{\dfrac{1}{4} + n^2})2^2 \times 1(1 - \sqrt{\dfrac{1}{4} + n^2})} \\ \cdots \\ Y_{1,n,2m} = \dfrac{1}{2^{2m} m!(m - \sqrt{\dfrac{1}{4} + n^2})(m - 1 - \sqrt{\dfrac{1}{4} + n^2}) \cdots (1 - \sqrt{\dfrac{1}{4} + n^2})} \\ Y_{2,n,0} = 1 \\ Y_{2,n,2} = \dfrac{1}{2^2(1 + \sqrt{\dfrac{1}{4} + n^2})} \\ Y_{2,n,4} = \dfrac{1}{2^2 \times 2(2 + \sqrt{\dfrac{1}{4} + n^2}))2^2 \times 1(1 + \sqrt{\dfrac{1}{4} + n^2})} \\ \cdots \\ Y_{2,n,2m} = \dfrac{1}{2^{2m} m!(m + \sqrt{\dfrac{1}{4} + n^2})(m - 1 + \sqrt{\dfrac{1}{4} + n^2}) \cdots (1 + \sqrt{\dfrac{1}{4} + n^2})} \end{cases}$$

这样可得各向同性圆形板表面与外界换热的稳态热传导解析解

$$T = c_0 \mathrm{i}_0(x) + d_0 \mathrm{k}_0(x) + \sum_{l=1}^{2} \sum_{n=1}^{\infty} [A_{l,n,0,r} Y_n^{(l)}(x) \cos n\theta - A_{l,n,0,i} Y_n^{(l)}(x) \sin n\theta] + T_0 \tag{9-34}$$

9.2.3　多项式函数 $Y_n^{(l)}(x)$ 和变形复数球柱多项式 $\hat{C}_{ip_{l,n}}(x)$ 关系

设 $n=0$，由式（9-26）和（9-27）可以推得

$$\begin{cases} Y_0^{(1)}(x) = \dfrac{2^{-\frac{1}{2}} \Gamma(\dfrac{1}{2})}{\sqrt{x}} I_{-\frac{1}{2}}(x) \\ Y_0^{(2)}(x) = \dfrac{2^{\frac{1}{2}} \Gamma(1 + \dfrac{1}{2})}{\sqrt{x}} I_{\frac{1}{2}}(x) \end{cases} \tag{9-35}$$

其中 $I_\nu(x)$ 为变形贝塞尔函数

$$I_\nu(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{\nu+2m}}{2^{\nu+2m}m!\Gamma(\nu+m+1)}$$

根据经典特殊函数理论，可得

$$i_\nu(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}I_{\nu+\frac{1}{2}}(x) \tag{9-36}$$

其中 $i_\nu(x)$ 为 ν 阶变形球贝塞尔函数。

考虑到 $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$，$\Gamma(\frac{1}{2}+1)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，根据式（9－35）和（9－36）可得

$$\begin{cases}Y_0^{(1)}(x)=\mathrm{i}_{-1}(x)\\ Y_0^{(2)}(x)=\mathrm{i}_0(x)\end{cases} \tag{9-37}$$

考虑圆板表面与外界换热的各向同性圆形板热传导问题，$K_{22}=1, K_{12}=0$，这样可得变形贝塞尔函数与 $Y_n^{(l)}(x)$ 关系式和变形球贝塞尔函数与 $Y_n^{(l)}(x)$ 关系式

$$\begin{cases}Y_n^{(1)}(x)=\dfrac{2^{-\sqrt{\frac{1}{4}+n^2}}\Gamma(1-\sqrt{\frac{1}{4}+n^2})}{\sqrt{x}}I_{-\sqrt{\frac{1}{4}+n^2}}(x)\\ Y_n^{(2)}(x)=\dfrac{2^{\sqrt{\frac{1}{4}+n^2}}\Gamma(1+\sqrt{\frac{1}{4}+n^2})}{\sqrt{x}}I_{\sqrt{\frac{1}{4}+n^2}}(x)\end{cases} \tag{9-38}$$

$$\begin{cases}Y_n^{(1)}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}2^{-\sqrt{\frac{1}{4}+n^2}}\Gamma(1-\sqrt{\frac{1}{4}+n^2})i_{-0.5-\sqrt{\frac{1}{4}+n^2}}(x)\\ Y_n^{(2)}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}2^{\sqrt{\frac{1}{4}+n^2}}\Gamma(1+\sqrt{\frac{1}{4}+n^2})i_{-0.5+\sqrt{\frac{1}{4}+n^2}}(x)\end{cases} \tag{9-39}$$

考虑圆板表面与外界换热的各向异性圆形板热传导问题，同样可得变形贝塞尔函数与 $Y_n^{(l)}(x)$ 关系式和变形球贝塞尔函数与 $Y_n^{(l)}(x)$ 关系式

$$\begin{cases}Y_n^{(1)}(x)=\dfrac{2^{-\sqrt{\frac{1}{4}+n^2(K_{22}-(K_{12})^2)}}\Gamma(1-\sqrt{\frac{1}{4}+n^2(K_{22}-(K_{12})^2)})}{\sqrt{x}}I_{-b_{1,n}+\frac{1}{2}}(x)\\ Y_n^{(2)}(x)=\dfrac{2^{\sqrt{\frac{1}{4}+n^2(K_{22}-(K_{12})^2)}}\Gamma(1+\sqrt{\frac{1}{4}+n^2(K_{22}-(K_{12})^2)})}{\sqrt{x}}I_{-b_{2,n}+\frac{1}{2}}(x)\end{cases} \tag{9-40a}$$

$$\begin{cases}Y_n^{(1)}(x)=2^{-\sqrt{\frac{1}{4}+n^2(K_{22}-(K_{12})^2)}}\Gamma(1-\sqrt{\frac{1}{4}+n^2(K_{22}-(K_{12})^2)})\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}i_{-b_{1,n}}(x)\\ Y_n^{(2)}(x)=2^{\sqrt{\frac{1}{4}+n^2(K_{22}-(K_{12})^2)}}\Gamma(1+\sqrt{\frac{1}{4}+n^2(K_{22}-(K_{12})^2)})\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}i_{-b_{2,n}}(x)\end{cases} \tag{9-40b}$$

其中 $b_{1,n}=0.5+\sqrt{\frac{1}{4}+n^2(K_{22}-(K_{12})^2)}$，$b_{2,n}=0.5-\sqrt{\frac{1}{4}+n^2(K_{22}-(K_{12})^2)}$。

总的来说，可以得到以下结论：多项式函数 $Y_n^{(l)}(x), l=1,2$ 是与 ν 阶变形球贝塞尔函数 $i_\nu(x)$ 关联，$Y_n^{(l)}(x)$ 是一常数与第一类 $-b_{l,n}$ 阶变形球贝塞尔函数 $i_{-b_{l,n}}(x)$ 之积。值得注意的是，各向同性热传导问题中 $a_{l,n}=0$ ，这样式（9－34）与球贝塞尔函数相应解是一致的。在表面换热的各向异性圆薄板热传导稳态问题求解中，$Y_n^{(l)}(x)$ 等于一常数与第一类 $-b_{l,n}$ 阶变形球贝塞尔函数 $i_{-b_{l,n}}(x)$ 之积。此外，由于 $x^{ia_{l,n}}$ 存在，$\hat{C}_{ip_{l,n}}(x)$ 为复数函数。这样物理特性（各向异性和各向同性）就和数学函数一变形复数球柱多项式（$\hat{C}_{ip_{l,n}}(x)$ 和球贝塞尔函数联系起来。

9.2.4　数值实验

研究在板表面与外界环境换热曲线型各向异性圆形薄板，材料热传导系数与薄板和外界热交换系数为 $k_1=0.30\text{kcal/(m}\cdot\text{h}\cdot℃)$ ，$k_2=0.11\text{kcal/(m}\cdot\text{h}\cdot℃)$，$h_a=0.26\text{kcal/(m}^2\cdot\text{h}\cdot℃)$，其他计算参数为 $T_a=0, h=0.01\text{m}$ ，$R=1\text{m}$，$q=0$，圆板外边界（$r_2=1\text{m}$）温度边界条件为 $(4\sin\theta+3\cos\theta+7)$℃ ，圆板内边界（$r_1=0.1\text{m}$）温度边界条件为 $(2\sin\theta+\cos\theta+5)$℃ 。

（1）特征根分布

特征根 $p_{1,n}$，$p_{2,n}$ 可以根据式（9－14）计算，计算结果见表 9－1。

表 9－1　$p_{1,n}$，$p_{2,n}(n=1, 2, 3)$ 随 β 变换情况

p \ β	10°	45°	90°
$p_{1,1}$	i1.285281	－0.4634146＋i1.517471	i2.225478
$p_{2,1}$	－i0.2852812	－0.4634146－i0.5174708	－i1.225478
$p_{1,2}$	i1.810216	－0.9268293＋i2.341463	i3.840523
$p_{2,2}$	－i0.8102163	－0.9268293－i1.341463	－i2.840523
$p_{1,3}$	i2.384144	－1.390244－i2.205036	i5.479503
$p_{2,3}$	－i1.384144	－1.390244＋i3.205036	－i4.479503

其他计算结果可以表明，对于各向异性问题，特征根 $p_{1,n}$，$p_{2,n}$ 为复数根。$p_{1,n}$，$p_{2,n}$ 的虚部交叉正值、负值，这就为求解实心圆形板热传导问题提供了基础。这样圆心温度函数有限值条件，可以消减一半待定未知常数（$2N+1$）。

（2）$Y_n^{(l)}(x)$ 多项式系数分布

考虑 $Y_n^{(l)}(x)$ 多项式，研究关键是多项式系数 $Y_{l,n,2m}(l=1,2)$ 。选取各向异性角 $\beta=0°$ 和 $\beta=45°$ 两种情况进行计算系数 $Y_{l,n,2m}$ $(l=1,2)$ ，结果见表 9－2、表 9－3。

表 9-2 $\beta=0°$ 的系数 $Y_{l,n,2m}$

m \ n	1(l = 1)	2(l = 1)	1(l = 2)	2(l = 2)
1	1.164314	−8.058894E−001	1.400340E−001	1.082150E−001
2	1.198131E−001	−1.460402E−001	6.284552E−003	4.086401E−003
3	4.508214E−003	−7.202116E−003	1.383550E−004	7.900612E−005
4	8.764791E−005	−1.673489E−004	1.807039E−006	9.298835E−007
5	1.039784E−006	−2.267733E−006	1.561755E−008	7.368079E−009
6	8.308083E−009	−2.014781E−008	9.590338E−011	4.199647E−011
7	4.774428E−011	−1.264661E−010	4.399482E−013	1.804856E−013
8	2.068007E−013	−5.907612E−013	1.564934E−015	6.058048E−016
9	6.992891E−016	−2.134005E−015	4.442425E−018	1.632159E−018
10	1.897207E−018	−6.139407E−018	1.029743E−020	3.607709E−021

表 9-3 $\beta=45°$ 的系数 $Y_{l,n,2m}$

m \ n	1(l = 1)	2(l = 1)	1(l = 2)	2(l = 2)
1	−14.309571	−2.971015E−001	1.239175E−001	8.798283E−002
2	−1.820502	−2.342531E−001	5.133336E−003	2.862933E−003
3	−7.652271E−002	−1.684978E−002	1.064794E−004	4.927803E−005
4	−1.603562E−003	−4.878821E−004	1.326358E−006	5.272441E−007
5	−2.013246E−005	−7.723230E−006	1.102090E−008	3.853299E−009
6	−1.683587E−007	−7.738329E−008	6.543725E−011	2.047502E−011
7	−1.005062E−009	−5.357506E−010	2.914940E−013	8.270698E−014
8	−4.498110E−012	−2.718537E−012	1.010171E−015	2.626228E−016
9	−1.565262E−014	−1.054893E−014	2.8011379E−018	6.728869E−019
10	−4.356406E−017	−3.232482E−017	6.356124E−021	1.420616E−021

从表 9-2、表 9-3 可以发现，$Y_{l,n,2m}$ 衰减得很快。

(3) 收敛性验证计算

选 $\beta=45°$ 和 $\beta=0°$ 的各向异性圆环薄板进行计算检验式 (9-31) 级数解收敛性，计算参数与上节相同。首先，通过增加 M 研究圆板内 $T(0.5,0)$(℃) 变化情况。计算结果在表 9-4、9-5。

表 9-4 $\beta=45°$ 的各向异性圆板内 $T(0.5,0)$(℃) 收敛性验证计算

M	20	24	30	50	60
$T(0.5,0)$	0.010581	0.009183	0.009183	0.009183	0.009183

表 9-5　$\beta=0°$ 的各向异性圆板内 $T(0.5,0)$(℃) 收敛性验证计算

M	16	18	20	50	60
$T(0.5,0)$	0.03580	0.03370	0.03366	0.03366	0.03366

表 9-4 和表 9-5 表明（9-31）解随着 M 增加收敛稳定。

（4）圆环板各向异性温度场分布情况

本节选取 3 个各向异性角（$\beta=0°$，$\beta=45°$，$\beta=90°$）的各向异性圆环板进行计算板内温度。$M=60$，其他计算参数同上节，θ 单位为（°），r 单位为 m。计算结果见表 9-6～表 9-8。

表 9-6　$\beta=0°$ 的各向异性圆板温度场 $T(r,\theta)$（℃）

r \ θ	0	45	90	180	270	315
0.1	6.0000	7.1210	7.0000	4.0000	3.0000	4.2930
0.2	0.7993	0.9430	0.9273	0.5427	0.4147	0.5805
0.3	0.1455	0.1713	0.1682	0.0987	0.0759	0.1060
0.5	0.0337	0.0400	0.0373	0.0154	0.0117	0.0219
0.7	0.2749	0.3283	0.3023	0.1108	0.0834	0.1735
0.8	0.8972	1.0720	0.9867	0.3603	0.2709	0.5655
0.9	2.9770	3.5570	3.2740	1.1930	0.8955	1.8750
1.0	10.0000	11.9500	11.0000	4.0000	3.0000	6.2930

表 9-7　$\beta=45°$ 的各向异性圆板温度场 $T(r,\theta)$（℃）

r \ θ	0	45	90	180	270	315
0.1	6.0000	7.1210	7.0000	4.0000	3.0000	4.2930
0.2	0.5382	0.6755	0.7150	0.4789	0.3021	0.3835
0.3	0.0682	0.0879	0.0967	0.0703	0.0419	0.0492
0.5	0.0092	0.0102	0.0092	0.0040	0.0040	0.0066
0.7	0.1271	0.1436	0.1252	0.0412	0.0432	0.0856
0.8	0.5364	0.6186	0.5504	0.1875	0.1735	0.3521
0.9	2.3010	2.7040	2.4490	0.8627	0.7147	1.4770
1.0	10.0000	11.9500	11.0000	4.0000	3.0000	6.2930

根据以上计算结果，可以得到以下结论：

本节所得解析解收敛性好，很好地满足定解条件（边界条件）。各向异性显著地影响了圆形板温度场分布。各向异性角变化时，圆板温度场就显著地变化，这样也提示可以设计各向异性角获取有益的结构形式。

9.3 变形复数球柱函数实数化分析

定义：变形复数球柱函数 $\hat{C}_{ip}(x,\theta)$

$$\hat{C}_{ip}(x,\theta) = e^{in\theta}\hat{C}_{ip}(x)$$

根据式（9－14）和（9－15），可得

$$p_{1,n} = a_{1,n} + ib_{1,n} \tag{9-41}$$

$$p_{2,n} = a_{1,n} + ib_{2,n} \tag{9-42}$$

$$p_{1,-n} = -a_{1,n} + ib_{1,n} \tag{9-43}$$

$$p_{2,-n} = -a_{1,n} + ib_{2,n} \tag{9-44}$$

关于 $p_{l,n} = a_{l,n} + ib_{l,n}$ 的 $e^{in\theta}\hat{C}_{ip_{l,n}}(x)$ 函数解项为

$$\begin{aligned}
T_l &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A_{l,n,m} x^{2m+p_{l,n}} e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{l,n,0} e^{in\theta}\hat{C}_{ip_{l,n}}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{l,n,0} e^{in\theta} x^{ia_{l,n}} Y_n^{(l)}(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} Y_n^{(l)}(x)[A_{l,n,0,r}\cos(n\theta + a_{l,n}\ln x) - A_{l,n,0,i}\sin(n\theta + a_{l,n}\ln x)] + \\
&\quad i\sum_{n=1}^{\infty} Y_n^{(l)}(x)[A_{l,n,0,i}\cos(n\theta + a_{l,n}\ln x) + A_{l,n,0,r}\sin(n\theta + a_{l,n}\ln x)] + \\
&\quad \sum_{n=-\infty}^{-1} Y_n^{(l)}(x)[A_{l,n,0,r}\cos(n\theta + a_{l,n}\ln x) - A_{l,n,0,i}\sin(n\theta + a_{l,n}\ln x)] + \\
&\quad i\sum_{n=-\infty}^{-1} Y_n^{(l)}(x)[A_{l,n,0,i}\cos(n\theta + a_{l,n}\ln x) + A_{l,n,0,r}\sin(n\theta + a_{l,n}\ln x)]
\end{aligned} \tag{9-45}$$

其中 $A_{l,n,m} = A_{l,n,m,r} + iA_{l,n,m,i}$ 。

因此，可得

$$\begin{aligned}
T_l &= \sum_{n=1}^{\infty} Y_n^{(l)}(x)[A_{l,n,0,r}\cos(n\theta + a_{l,n}\ln x) - A_{l,n,0,i}\sin(n\theta + a_{l,n}\ln x)] + \\
&\quad i\sum_{n=1}^{\infty} Y_n^{(l)}(x)[A_{l,n,0,i}\cos(n\theta + a_{l,n}\ln x) + A_{l,n,0,r}\sin(n\theta + a_{l,n}\ln x)] + \\
&\quad \sum_{n=1}^{\infty} Y_{-n}^{(l)}(x)[A_{l,-n,0,r}\cos(n\theta + a_{l,n}\ln x) + A_{l,-n,0,i}\sin(n\theta + a_{l,n}\ln x)] + \\
&\quad i\sum_{n=1}^{\infty} Y_{-n}^{(l)}(x)[A_{l,-n,0,i}\cos(n\theta + a_{l,n}\ln x) - A_{l,-n,0,r}\sin(n\theta + a_{l,n}\ln x)]
\end{aligned} \tag{9-46}$$

根据式（9－41）～（9－44）可得

$$Y_n^{(l)}(x) = Y_{-n}^{(l)}(x) \tag{9-47}$$

全部解写为

$$T = T_1 + T_2 + T^*$$

其中 T^* 为方程（9－3）当 $n = 0$ 的解。

根据式（9－46），由 $\mathrm{Im}(T_l) = 0$ 可得

$$\begin{cases} A_{1,-n,0,i} = -A_{1,n,0,i} \\ A_{1,-n,0,r} = A_{1,n,0,r} \\ A_{2,-n,0,i} = -A_{2,n,0,i} \\ A_{2,-n,0,r} = A_{2,n,0,r} \end{cases} \tag{9-48}$$

将式（9－48）代入式（9－46）可得

$$T = 2\sum_{l=1}^{2}\sum_{n=1}^{\infty} Y_n^{(l)}(x)[A_{l,n,0,r}\cos(n\theta + a_{l,n}\ln x) - A_{l,n,0,i}\sin(n\theta + a_{l,n}\ln x)] + T^*$$

9.4　变形复数球柱多项式特性分析

9.4.1 变形复数球柱多项式 $\hat{C}_{ip_{l,n}}(x)$ 与变形球贝塞尔函数、变形复数柱多项式的关系

在式（9－26）中，取

$$\begin{cases} Y_{1,n,0} = \dfrac{1}{2^{-\sqrt{\frac{1}{4}+n^2(K_{22}-(K_{12})^2)}}\Gamma\left(1-\sqrt{\frac{1}{4}+n^2(K_{22}-(K_{12})^2)}\right)}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \\ Y_{2,n,0} = \dfrac{1}{2^{\sqrt{\frac{1}{4}+n^2(K_{22}-(K_{12})^2)}}\Gamma\left(1+\sqrt{\frac{1}{4}+n^2(K_{22}-(K_{12})^2)}\right)}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \end{cases} \tag{9-49}$$

利用 $\Gamma(x)$ 的递推特性，式（9－27）中一般项系数变为

$$\begin{cases} Y_{1,n,2m} = \dfrac{1}{2^{2m}m!\Gamma\left(-\sqrt{\frac{1}{4}+n^2(K_{22}-(K_{12})^2)}+m+1\right)}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \\ Y_{2,n,2m} = \dfrac{1}{2^{2m}m!\Gamma\left(\sqrt{\frac{1}{4}+n^2(K_{22}-(K_{12})^2)}+m+1\right)}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \end{cases} \tag{9-50}$$

根据式（9－27）和（9－50）可得

$$\begin{cases} Y_n^{(1)}(x) = \mathrm{i}_{-b_{1,n}}(x) \\ Y_n^{(2)}(x) = \mathrm{i}_{-b_{2,n}}(x) \end{cases} \tag{9-51}$$

根据式（9－28）和（9－51）可得

$$\hat{C}_{ip_{l,n}}(x) = x^{\mathrm{i}a_{l,n}}\mathrm{i}_{-b_{l,n}}(x) \tag{9-52}$$

式（9－52）建立了变形复数球柱多项式 $\hat{C}_{ip_{l,n}}(x)$ 和第一类变形球贝塞尔多项式 $\mathrm{i}_{-b_{l,n}}(x)$ 关系。$\hat{C}_{ip_{l,n}}(x)$ 也可称为第一类变形复数球柱多项式。对于各向同性热传导、正交

异性热传导问题，$K_{12}=0$，$a_{l,n}=0$

$$\hat{C}_{ip_{l,n}}(x)=\mathrm{i}_{-b_{l,n}}(x) \tag{9-53}$$

即在各向同性热传导、正交异性热传导问题中，变形复数球柱多项式和变形球贝塞尔多项式一致的。

根据式（7-15）（9-36）和（9-53）可得

$$\hat{C}_{ip_{l,n}}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\hat{Z}_{ip_{l,n}+\frac{1}{2}}(x) \tag{9-54}$$

式（9-54）建立了变形复数球柱多项式 $\hat{C}_{ip_{l,n}}(x)$ 和变形复数柱多项式 $\hat{Z}_{ip_{l,n}+\frac{1}{2}}(x)$ 关系，显然，变形复数球柱多项式 $\hat{C}_{ip_{l,n}}(x)$ 和变形复数柱多项式 $\hat{Z}_{ip_{l,n}+\frac{1}{2}}(x)$ 之间关系，与变形球贝塞尔函数与变形贝塞尔函数之间关系类似，后者是前者的特例。无论是各向同性热传导、正交异性热传导问题，还是各向异性热传导问题，式（9-54）都是存在的。

根据复变函数理论，可得

$$x^{\mathrm{i}a_{l,n}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}a_{l,n}\ln x}=\cos(a_{l,n}\ln x)+\mathrm{i}\sin(a_{l,n}\ln x)$$

$$(x^{\mathrm{i}a_{l,n}})^*=\cos(a_{l,n}\ln x)-\mathrm{i}\sin(a_{l,n}\ln x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a_{l,n}\ln x}=x^{-\mathrm{i}a_{l,n}}$$

其中 $(x^{\mathrm{i}a_{l,n}})^*$ 为 $x^{\mathrm{i}a_{l,n}}$ 的共轭函数。而且有

$$\hat{C}_{ip_{l,n}}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}=x^{\mathrm{i}a_{l,n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{i}_{-b_{l,n}}(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\theta+a_{l,n}\ln x)}\mathrm{i}_{-b_{l,n}}(x)$$

$$\hat{C}_{ip_{l,n}}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}=\mathrm{i}_{-b_{l,n}}(x)[\cos(n\theta+a_{l,n}\ln x)+\mathrm{i}\sin(n\theta+a_{l,n}\ln x)]$$

应用式（9-51），可以将式（9-31）进行改写为

$$T=T_0+c_0\mathrm{i}_0(x)+d_0\mathrm{k}_0(x)+2\sum_{l=1}^{2}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{i}_{-b_{l,n}}(x)[A_{l,n,0,r}\cos(n\theta+a_{l,n}\ln x)-A_{l,n,0,i}\sin(n\theta+a_{l,n}\ln x)]$$

9.4.2 $\hat{C}_{ip_{l,n}}(x)$ 多项式的微分公式、递推关系式和有关积分公式研究

如同不同阶的变形球贝塞尔函数，不同阶的变形复数球柱多项式之间也存在关联的微分公式、递推公式和有关积分公式。

(1) $\hat{C}_{ip}(x)$ 多项式的微分公式

$\hat{C}_{ip}(x)$ 多项式有如下微分公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^{\mathrm{i}p+1})^*\hat{C}_{ip}(x)]=(x^{\mathrm{i}p+1})^*\hat{C}_{ip-1}(x) \tag{9-55}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-\mathrm{i}p}\hat{C}_{ip}(x)]=-x^{-\mathrm{i}p}\hat{C}_{ip+1}(x) \tag{9-56}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^k[(x^{\mathrm{i}p+1})^*\hat{C}_{ip}(x)]=(x^{\mathrm{i}p+1})^*x^{-k}\hat{C}_{ip-k}(x) \tag{9-57}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^k\left[\frac{\hat{C}_{ip}(x)}{x^{\mathrm{i}p}}\right]=(-1)^k\frac{\hat{C}_{ip+k}(x)}{x^{\mathrm{i}p+k}} \tag{9-58}$$

证明：

由式（7-53）可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^{\mathrm{i}p})^* \hat{Z}_{ip}(x)] = (x^{\mathrm{i}p})^* \hat{Z}_{ip-1}(x)$$

将式（9-54）代入上式，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^{\mathrm{i}p+1})^* \hat{C}_{ip}(x)] = (x^{\mathrm{i}p+1})^* \hat{C}_{ip-1}(x)$$

式（9-55）得证。

由式（7-54）可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-\mathrm{i}p_{l,n}} \hat{Z}_{\mathrm{i}p_{l,n}}(x)] = x^{-\mathrm{i}p_{l,n}} \hat{Z}_{\mathrm{i}p_{l,n}+1}(x)$$

将式（9-54）代入上式，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-\mathrm{i}p} \hat{C}_{ip}(x)] =- x^{-\mathrm{i}p} \hat{C}_{ip+1}(x)$$

式（9-56）得证。

由式（7-55）可得

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^k[(x^{\mathrm{i}p})^* \hat{Z}_{ip}(x)] = (x^{\mathrm{i}p})^* x^{-k} \hat{Z}_{ip-k}(x)$$

将式（9-54）代入上式，可得

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^k[(x^{\mathrm{i}p+1})^* \hat{C}_{ip}(x)] = (x^{\mathrm{i}p+1})^* x^{-k} \hat{C}_{ip-k}(x)$$

式（9-57）得证。

由式（7-56）可得

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^k\left[\frac{\hat{Z}_{ip}(x)}{x^{\mathrm{i}p}}\right] = \frac{\hat{Z}_{ip+k}(x)}{x^{\mathrm{i}p+k}}$$

将式（9-54）代入上式，可得

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^k\left[\frac{\hat{C}_{ip}(x)}{x^{ip}}\right] = (-1)^k \frac{\hat{C}_{ip+k}(x)}{x^{ip+k}}$$

式（9-58）得证。

（2）$\hat{C}_{ip}(x)$ 多项式递推关系式

$$x\frac{\mathrm{d}\hat{C}_{ip}(x)}{\mathrm{d}x} + (\mathrm{i}p+1)^* \hat{C}_{ip}(x) = x\hat{C}_{ip-1}(x) \tag{9-59}$$

$$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\hat{C}_{ip}(x)] - \mathrm{i}p\hat{C}_{ip}(x) = x\hat{C}_{ip+1}(x) \tag{9-60}$$

$$\hat{C}_{ip-1}(x) - \hat{C}_{ip+1}(x) = \frac{\mathrm{i}p + (\mathrm{i}p)^* + 1}{x}\hat{C}_{ip}(x) \tag{9-61}$$

$$\frac{\mathrm{i}p - (\mathrm{i}p)^* - 1}{x}\hat{C}_{ip}(x) + \hat{C}_{ip-1}(x) + \hat{C}_{ip+1}(x) = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\hat{C}_{ip}(x)] \tag{9-62}$$

证明：

由式（7－57）可得

$$x\frac{\mathrm{d}\hat{Z}_{ip}(x)}{\mathrm{d}x}+(\mathrm{i}p)^{*}\hat{Z}_{ip}(x)=x\hat{Z}_{ip-1}(x)$$

将式（9－54）代入上式，可得

$$x\frac{\mathrm{d}\hat{C}_{ip}(x)}{\mathrm{d}x}+(\mathrm{i}p+1)^{*}\hat{C}_{ip}(x)=x\hat{C}_{ip-1}(x)$$

式（9－59）得证。

由式（7－58）可得

$$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\hat{Z}_{ip}(x)]-\mathrm{i}p\hat{Z}_{ip}(x)=x\hat{Z}_{ip+1}(x)$$

将式（9－54）代入上式，可得

$$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\hat{C}_{ip}(x)]-\mathrm{i}p\hat{C}_{ip}(x)=x\hat{C}_{ip+1}(x)$$

式（9－60）得证。

由式（7－59）可得

$$\hat{Z}_{ip-1}(x)-\hat{Z}_{ip+1}(x)=-\frac{2b}{x}\hat{Z}_{ip}(x)$$

将式（9－54）代入上式，并考虑到 $p=a+\mathrm{i}b$，$\mathrm{i}p=\mathrm{i}a-b$，$(\mathrm{i}p)^{*}+\mathrm{i}p=-2b$，可得

$$\hat{C}_{ip-1}(x)-\hat{C}_{ip+1}(x)=\frac{\mathrm{i}p+(\mathrm{i}p)^{*}+1}{x}\hat{C}_{ip}(x)$$

式（9－61）得证。

由式（7－60）可得

$$\frac{2\mathrm{i}a}{x}\hat{Z}_{ip}(x)+\hat{Z}_{ip-1}(x)+\hat{Z}_{ip-1}(x)=2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\hat{Z}_{ip}(x)]$$

将式（9－54）代入上式，考虑到 $p=a+\mathrm{i}b$，$\mathrm{i}p=\mathrm{i}a-b$，$\mathrm{i}p-(\mathrm{i}p)^{*}=2\mathrm{i}a$，可得

$$\frac{\mathrm{i}p-(\mathrm{i}p)^{*}-1}{x}\hat{C}_{ip}(x)+\hat{C}_{ip-1}(x)+\hat{C}_{ip+1}(x)=2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\hat{C}_{ip}(x)]$$

式（9－62）得证。

根据式（9－61），如果已知 $\hat{C}_{ip-1}(x)$，$\hat{C}_{ip}(x)$ 即可计算出 $\hat{C}_{ip+1}(x)$。根据式（9－60），如果已知 $\hat{C}_{ip+1}(x)$，$\hat{C}_{ip}(x)$ 即可计算出导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\hat{C}_{ip}(x)]$。

式（9－59）～（9－62）为复数球柱多项式 $\hat{C}_{ip}(x)$ 的递推公式。

可以容易证明变形球贝塞尔函数的微分公式和递推公式是变形复数球柱函数 $\hat{C}_{ip}(x)$ 微分公式和递推公式的特殊情况。

(3) 有关 $\hat{C}_{ip}(x)$ 的积分公式

有关 $\hat{C}_{ip}(x)$ 多项式不定积分公式

$$\int (x^{ip+2})^{*}\ \hat{C}_{ip}(x)\mathrm{d}x = (x^{ip+2})^{*}\ \hat{C}_{ip+1}(x) + c \tag{9-63}$$

$$\int \frac{\hat{C}_{ip}(x)}{x^{ip-1}}\mathrm{d}x = -x^{-ip+1}\ \hat{C}_{ip-1}(x) + c \tag{9-64}$$

$$\int \frac{x\hat{C}_{ip-1}(x) - (ip+1)^{*}\ \hat{C}_{ip}(x)}{x}\mathrm{d}x = \hat{C}_{ip}(x) + c \tag{9-65}$$

$$\int \frac{ip\hat{C}_{ip}(x) + x\hat{C}_{ip+1}(x)}{x}\mathrm{d}x = \hat{C}_{ip}(x) + c \tag{9-66}$$

$$\int \frac{1}{2}\left[\frac{ip-(ip)^{*}-1}{x}\hat{C}_{ip}(x) + \hat{C}_{ip-1}(x) + \hat{C}_{ip+1}(x)\right]\mathrm{d}x = \hat{C}_{ip}(x) + c \tag{9-67}$$

证明：

由式（9－55），令（9－55）右式 x 的幂次 $ip \to ip+1$，$\hat{C}_{ip-1}(x)$ 中的 $ip-1 \to ip$，然后对所得公式两边进行积分，可得式（9－63）；由式（9－56），令（9－56）右式 x 的幂次 $-ip \to -ip+1$，$\hat{C}_{ip+1}(x)$ 中 $ip+1 \to ip$，然后对所得公式两边进行积分，可得式（9－64）。

类似地，可由式（9－59）积分可得式（9－65）。由式（9－60）积分可得式（9－66）。由式（9－62）积分可得式（9－67）。

有关 $\hat{C}_{ip}(x)$ 多项式定积分公式

$$\int_0^t (x^{ip+2})^{*}\ \hat{C}_{ip}(x)\mathrm{d}x = (t^{ip+2})^{*}\ \hat{C}_{ip+1}(t) \tag{9-68}$$

$$\int_0^t \frac{\hat{C}_{ip}(x)}{x^{ip-1}}\mathrm{d}x = -t^{-ip+1}\ \hat{C}_{ip-1}(t) \tag{9-69}$$

$$\int_0^t \frac{x\hat{C}_{ip-1}(x) - (ip+1)^{*}\ \hat{C}_{ip}(x)}{x}\mathrm{d}x = \hat{C}_{ip}(t) - C_{ip}(0) \tag{9-70}$$

$$\int_0^t \frac{ip\hat{C}_{ip}(x) + x\hat{C}_{ip+1}(x)}{x}\mathrm{d}x = \hat{C}_{ip}(t) - \hat{C}_{ip}(0) \tag{9-71}$$

$$\int_0^t \frac{1}{2}\left[\frac{ip-(ip)^{*}-1}{x}\hat{C}_{ip}(x) + \hat{C}_{ip-1}(x) + \hat{C}_{ip+1}(x)\right]\mathrm{d}x = \hat{C}_{ip}(t) - \hat{C}_{ip}(0) \tag{9-72}$$

9.5　第二类变形复数球柱多项式定义及其微分公式、递推公式

对于各向异性问题，有些情况下需要定义第二类变形复数球柱函数 $k_{ip}(x)$

$$k_{ip}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}K_{ip+\frac{1}{2}}(x) \tag{9-73}$$

其中 $K_{ip+\frac{1}{2}}(x)$ 为 $(ip+\frac{1}{2})$ 阶第二类变形复数柱多项式，具体见式（7－61）。

变形球 Z_{ip} 方程（9－7）的解为

$$f_n(x) = A_{1,n,0} k_{ip}(x) + A_{2,n,0} \hat{C}_{ip_{2,n}}(x)$$

式中 $A_{1,n,0}$ 、$A_{2,n,0}$ 为复数常数。

显然，第二类变形球贝塞尔函数是第二类变形复数球柱多项式的特殊情况。

类似地，由于 $k_{ip}(x)$ 为复数函数，$e^{ip\theta}$ 也是复数函数，在许多情况下 $k_{ip}(x)$ 和 $e^{ip\theta}$ 是互相耦合，由此给出新的复数函数一第二类变形复数球柱函数 $k_{ip}(x,\theta)$

$k_{ip}(x,\theta) = k_{ip}(x)e^{ip\theta}$

如同不同阶的第二类变形复数柱多项式之间有一定联系，不同阶的第二类变形复数球柱多项式也存在这种联系的微分公式和递推公式。

(1) $k_{ip}(x)$ 多项式的微分公式

$k_{ip}(x)$ 多项式有如下微分公式

$$\frac{d}{dx}[(x^{ip+1})^* k_{ip}(x)] = -(x^{ip+1})^* k_{ip-1}(x) \tag{9-74}$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-ip} k_{ip}(x)] = -x^{-ip} k_{ip+1}(x) \tag{9-75}$$

$$\left(\frac{d}{xdx}\right)^k [(x^{ip+1})^* k_{ip}(x)] = (x^{ip+1})^* x^{-k} (-1)^k k_{ip-k}(x) \tag{9-76}$$

$$\left(\frac{d}{xdx}\right)^k \left[\frac{k_{ip}(x)}{x^{ip}}\right] = (-1)^k \frac{k_{ip+k}(x)}{x^{ip+k}} \tag{9-77}$$

证明：

由式（7-64）可得

$$\frac{d}{dx}[(x^{ip})^* K_{ip_n}(x)] = -(x^{ip})^* K_{ip_n-1}(x)$$

将式（9-73）代入上式，可得

$$\frac{d}{dx}[(x^{ip+1})^* k_{ip}(x)] = -(x^{ip+1})^* k_{ip-1}(x)$$

式（9-74）得证。

由式（7-65）可得

$$\frac{d}{dx}[x^{-ip} K_{ip_n}(x)] = -x^{-ip} K_{ip_n+1}(x)$$

将式（9-73）代入上式，可得

$$\frac{d}{dx}[x^{-ip} k_{ip}(x)] = -x^{-ip} k_{ip+1}(x)$$

式（9-75）得证。

由式（7-66）可得

$$\left(\frac{d}{xdx}\right)^k [(x^{ip})^* K_{ip_n}(x)] = (-1)^k (x^{ip})^* x^{-k} K_{ip_n-k}(x)$$

将式（9-73）代入上式，可得

$$\left(\frac{d}{xdx}\right)^k [(x^{ip+1})^* k_{ip}(x)] = (x^{ip+1})^* x^{-k} (-1)^k k_{ip-k}(x)$$

式（9-76）得证。

由式（7-67）可得

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^{k}\left[\frac{K_{ip}(x)}{x^{\mathrm{i}p}}\right]=(-1)^{k}\frac{K_{ip+k}(x)}{x^{\mathrm{i}p+k}}$$

将式（9-73）代入上式，可得

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^{k}\left[\frac{k_{ip}(x)}{x^{\mathrm{i}p}}\right]=(-1)^{k}\frac{k_{ip+k}(x)}{x^{\mathrm{i}p+k}}$$

式（9-77）得证。

（2）$k_{ip}(x)$ 多项式递推关系式

$$x\frac{\mathrm{d}k_{ip}(x)}{\mathrm{d}x}+(\mathrm{i}p+1)^{*}k_{ip}(x)=-xk_{ip-1}(x) \tag{9-78}$$

$$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[k_{ip}(x)]+(\mathrm{i}p+1)^{*}k_{ip}(x)=-xk_{ip-1}(x) \tag{9-79}$$

$$k_{ip-1}(x)-k_{ip+1}(x)=-\frac{\mathrm{i}p+(\mathrm{i}p)^{*}+1}{x}k_{ip}(x) \tag{9-80}$$

$$\frac{\mathrm{i}p-(\mathrm{i}p)^{*}-1}{x}k_{ip}(x)-k_{ip-1}(x)-k_{ip+1}(x)=2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[k_{ip}(x)] \tag{9-81}$$

证明：

由式（7-68）可得

$$-(\mathrm{i}p)^{*}\frac{K_{ip}(x)}{x}-K_{ip-1}(x)=\frac{\mathrm{d}K_{ip}(x)}{\mathrm{d}x}$$

将式（9-73）代入上式，可得

$$x\frac{\mathrm{d}k_{ip}(x)}{\mathrm{d}x}+(\mathrm{i}p+1)^{*}k_{ip}(x)=-xk_{ip-1}(x)$$

式（9-78）得证。

由式（7-69）可得

$$(\mathrm{i}p)\frac{K_{ip}(x)}{x}-K_{ip+1}(x)=\frac{\mathrm{d}K_{ip}(x)}{\mathrm{d}x}$$

将式（9-73）代入上式，可得

$$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[k_{ip}(x)]+(\mathrm{i}p+1)^{*}k_{ip}(x)=-xk_{ip-1}(x)$$

式（9-79）得证。

由式（7-70）可得

$$K_{ip-1}(x)-K_{ip+1}(x)=\frac{2b}{x}K_{ip}(x)$$

将式（9-73）代入上式，并考虑到 $p=a+\mathrm{i}b$，$\mathrm{i}p=\mathrm{i}a-b$，$(\mathrm{i}p)^{*}+\mathrm{i}p=-2b$，可得

$$k_{ip-1}(x)-k_{ip+1}(x)=-\frac{\mathrm{i}p+(\mathrm{i}p)^{*}+1}{x}k_{ip}(x)$$

式（9-80）得证。

由式（7 - 71）可得

$$\frac{\mathrm{i}a}{x}K_{ip}(x)-[K_{ip-1}(x)+K_{ip+1}(x)]\frac{1}{2}=\frac{\mathrm{d}K_{ip}(x)}{\mathrm{d}x}$$

将式（9 - 73）代入上式，考虑到 $p=a+\mathrm{i}b$, $\mathrm{i}p=\mathrm{i}a-b$, $\mathrm{i}p-(\mathrm{i}p)^{*}=2\mathrm{i}a$ ，可得

$$\frac{\mathrm{i}p-(\mathrm{i}p)^{*}-1}{x}k_{ip}(x)-k_{ip-1}(x)-k_{ip+1}(x)=2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[k_{ip}(x)]$$

式（9 - 81）得证。

根据式（9 - 78），如果已知 $k_{ip-1}(x)$, $k_{ip}(x)$ 即可计算出导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[k_{ip}(x)]$ 。根据式（9 -80），如果已知 $k_{ip-1}(x)$, $k_{ip}(x)$ 即可计算出 $k_{ip+1}(x)$ 。可以容易证明第二类变形球贝塞尔函数的微分公式和递推公式是第二类变形复数球柱函数 $k_{ip}(x)$ 微分公式和递推公式的特殊情况。

（3）有关 $k_{ip}(x)$ 的积分公式

有关 $k_{ip}(x)$ 多项式不定积分公式

$$\int(x^{\mathrm{i}p+2})^{*}k_{ip}(x)\mathrm{d}x=-(x^{\mathrm{i}p+2})^{*}k_{ip+1}(x)+c \tag{9-82}$$

$$\int\frac{k_{ip}(x)}{x^{\mathrm{i}p-1}}\mathrm{d}x=-x^{-\mathrm{i}p+1}k_{ip-1}(x)+c \tag{9-83}$$

$$\int\frac{-xk_{ip-1}(x)-(\mathrm{i}p+1)^{*}k_{ip}(x)}{x}\mathrm{d}x=k_{ip}(x)+c \tag{9-84}$$

$$\int\frac{-(\mathrm{i}p+1)^{*}k_{ip}(x)-xk_{ip+1}(x)}{x}\mathrm{d}x=k_{ip}(x)+c \tag{9-85}$$

$$\int\frac{1}{2}[\frac{\mathrm{i}p-(\mathrm{i}p)^{*}-1}{x}k_{ip}(x)-k_{ip-1}(x)-k_{ip+1}(x)]\mathrm{d}x=k_{ip}(x)+c \tag{9-86}$$

第 10 章　各向异性二维圆薄板非稳态热传导方程——复数球柱多项式与复数球柱函数

第 9 章研究了表面换热的薄圆板稳态热传导问题，给出了变形复数球柱函数。本章就圆板非稳态热传导问题进行研究，提出了复数球柱函数，并采用复数球柱函数求解极坐标下的各向异性圆薄板非稳态热传导偏微分方程。在第一类边界条件下，给出相应公式后，求解复数球柱多项式 $C_{ip_{l,n}}(x)=0$，可以确定特征值 $\mu_{l,n,j}^{0}$。根据可叠加性原理，将特征函数 $C_{ip_{l,n}}(x)e^{in\theta}$ 叠加起来形成一般解析解，将一般解析解代入初始条件，根据球柱函数 $C_{ip_{l,n}}(x)e^{in\theta}$ 关于权函数 r^2 在圆域内正交特性确定待定常数。本章给出数值计算结果，验证了所得解的收敛性和稳定性。研究表明复数球柱多项式 $C_{ip_{l,n}}(r\frac{\mu_{l,n,j}^{0}}{R})$ 函数与第一类球贝塞尔函数相关联。本章对复数球柱函数特性进行了研究，给出了微分公式、递推公式和有关积分公式，并定义了第二类复数球柱函数并给出有关公式。

10.1 各向异性二维圆薄板非稳态热传导偏微分方程

考虑圆形薄板，圆板半径为 R，厚度为 h，由于薄板厚度远小于半径，并与外径换热，可以简化温度场分布与 z 无关，仅在圆板边界与外界进行热交换。为简化，假设圆板面与外界没有热交换。极坐标 (r,θ) 下各向异性圆形薄板非稳态热传导控制偏微分方程为

$$k_{22}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2}+k_{11}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial T}{\partial r})+2k_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta\partial r}+k_{12}\frac{1}{r^2}\frac{\partial T}{\partial\theta}+q=\rho C_p\frac{\partial T}{\partial t} \tag{10-1}$$

式中 $T(r,\theta,t)$ 为圆域内温度分布函数，q 是热源函数。k_{11}、k_{12}、k_{22} 为热传导系数。

$$k_{11}=k_1\cos^2\beta+k_2\sin^2\beta$$

$$k_{12}=(k_1-k_2)\sin\beta\cos\beta$$

$$k_{22}=k_1\sin^2\beta+k_2\cos^2\beta$$

其中 k_1,k_2 分别为 r 方向主热传导系数，切向 θ 方向主传导系数；k_{11},k_{12},k_{22} 中的下标 1 为径向 r 方向，下标 2 代表角度 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$。$\beta$ 为最大热传导轴方向与径向 r 的夹角，ρ 为密度，C_p 为材料比热。

实心圆板第一类边界条件为

$$r=R, T(r,\theta,t)=0; r=0, T(0,\theta,t)\ \text{有限}$$

初始条件

$$T(r,\theta,0)=\varphi(r,\theta) \tag{10-2}$$

设方程（10－1）有如下形式解

$$T(r,\theta,t) = u(\mathrm{r},\theta)\Gamma(\mathrm{t}) \tag{10-3}$$

设研究区域没有热源，$q=0$。如研究区域有热源 q，可以求得方程（10－1）特解，并将特解代入后面求得一般解析解中一并处理。

将式（10－3）代入方程（10－1）并分离变量可得

$$\frac{\frac{\partial \Gamma}{\partial t}}{\alpha\Gamma} = \frac{\left[k_{22}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + k_{11}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r}) + 2k_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r} + k_{12}\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right]\frac{1}{k_{11}}}{u} = -\lambda \tag{10-4}$$

式中 λ 为分离常数；α 为热扩散系数，$\alpha = \frac{k_{11}}{\rho C_p}$。

令 $K_{11} = 1, K_{12} = \frac{k_{12}}{k_{11}}, K_{22} = \frac{k_{22}}{k_{11}}$，代入式（10－4），推导可得

$$\begin{cases} K_{22}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r}) + 2K_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r} + K_{12}\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \lambda u = 0 \\ \frac{\partial\Gamma}{\partial t} + \lambda\alpha\Gamma = 0 \end{cases} \tag{10-5}$$

引入以下参数变换

$$x = r\sqrt{\lambda} \tag{10-6}$$

将式（10－6）代入式（10－5）可得

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial t} + \alpha\lambda\Gamma = 0 \tag{10-7}$$

$$K_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{\partial}{\partial x}(x^2\frac{\partial u}{\partial x}) + 2K_{12}x\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial x} + K_{12}\frac{\partial u}{\partial\theta} + x^2 u = 0 \tag{10-8}$$

根据式（10－7），可得

$$\Gamma(t) = Ae^{-\lambda\alpha t} \tag{10-9}$$

实心圆板第一类边界条件写为

$$x = R\sqrt{\lambda}, u(x,\theta) = 0; x = 0, u(x,\theta)\text{ 有限} \tag{10-10}$$

10.2　复数球柱多项式、球 Z_{ip} 方程及各向异性圆板非稳态热传导解

10.2.1　球 Z_{ip} 方程和复数球柱多项式

方程（10－8）解假设为

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \tag{10-11}$$

其中 $\mathrm{i}^2 = -1$；n 为整数。

$n=0$，方程（10－8）简化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x})+x^2u=0 \tag{10-12}$$

式（10-12）为0阶球贝塞尔方程，可以得到下面解

$$u(\mathrm{x})=c_0j_0(x)+d_0y_0(x) \tag{10-13}$$

其中 c_0,d_0 为实数待定常数，$j_0(x)$ 为第一类0阶球贝塞尔函数，$y_0(x)$ 为第二类0阶球贝塞尔函数

$$j_0(x)=\frac{\sin(x)}{x}$$

$$y_0(x)=-\frac{\cos(x)}{x}$$

当 $n\neq 0$，式（10-11）代入方程（10-8）可得

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2f_n}{\mathrm{d}x^2}+2x\frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}x}(1+K_{12}\mathrm{i}n)+f_n(x^2-K_{22}n^2+\mathrm{i}K_{12}n)=0 \tag{10-14}$$

方程（10-14）是一个新方程，方程的特点是系数都是 x 的多项式函数并且出现复数系数。对于各向同性或正交异性热传导问题，$K_{12}=0$，方程（10-14）退化为球贝塞尔方程 $z^2\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}z^2}+2z\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}+f(z^2-\nu^2)=0$；当 $K_{12}\neq 0$，方程（10-14）可称为球 Z_{ip} 方程。

设

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}A_{n,k}x^{k+\mathrm{i}p} \tag{10-15}$$

其中 k 为整数，p 为特征根；$A_{n,k}$ 为复数常数。

结合式（10-11）和（10-15）可以推得

$$u=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A_{n,k}x^{k+\mathrm{i}p}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \tag{10-16}$$

其中 $n\neq 0$。

分析方程（10-8）和式（10-16）可得

$$k=2m,m=0,1,2,\cdots,\infty$$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A_{n,k}x^{k+\mathrm{i}p}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ 为复数函数。根据数学物理实数化原理，本章10.6节给出简略证明，当 $n\neq 0$，如 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A_{n,k}x^{k+\mathrm{i}p}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ 为实数函数，那么可得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A_{n,k}x^{k+\mathrm{i}p}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}=2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A_{n,k}x^{k+\mathrm{i}p}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$$

将式（10-16）代入方程（10-8）化简可得

$$\begin{aligned}
&-A_{n,0}[p^2+(-\mathrm{i}+2nK_{12})p+K_{22}n^2-\mathrm{i}K_{12}n]x^{\mathrm{i}p}+\\
&\{A_{n,2}[-p^2+p(-2K_{12}n+5\mathrm{i})+6+5\mathrm{i}K_{12}n-K_{22}n^2]+A_{n,0}\}x^{\mathrm{i}p+2}+\cdots+\\
&\{-A_{n,2m}[p^2+p(-4\mathrm{i}m-\mathrm{i}+2K_{12}n)-(2m+\mathrm{i}K_{12}n+4m^2+4\mathrm{i}K_{12}nm-K_{22}n^2)]+\\
&A_{n,2(m-1)}\}x^{\mathrm{i}p+2m}+\cdots=0
\end{aligned} \tag{10-17}$$

其中 $A_{n,0} \neq 0$，$A_{n,2m}$ 下标 $2m$ 代表 2 和 m 之积。

设方程（10－17）中 $x^{ip}, x^{2+ip}, x^{1+ip}, \cdots, x^{2(m-1)+ip}, x^{2m+ip}, \cdots$ 前系数为 0，可得

$$p^2 + (-\mathrm{i} + 2nK_{12})p + K_{22}n^2 - \mathrm{i}K_{12}n = 0 \tag{10-18}$$

$$A_{n,2m} = \frac{A_{n,2(m-1)}}{p^2 + p(-4\mathrm{i}m - \mathrm{i} + 2K_{12}n) - (2m + \mathrm{i}K_{12}n + 4m^2 + 4\mathrm{i}K_{12}nm - K_{22}n^2)} \tag{10-19}$$

求解方程（10－18）可得特征根，记为

$$p_{l,n} = a_{l,n} + \mathrm{i}b_{l,n} \tag{10-20}$$

其中

$$\begin{cases} a_{1,n} = -nK_{12} \\ b_{1,n} = 0.5 + \sqrt{\dfrac{1}{4} + n^2[K_{22} - (K_{12})^2]} \\ a_{2,n} = -nK_{12} \\ b_{2,n} = 0.5 - \sqrt{\dfrac{1}{4} + n^2(K_{22} - (K_{12})^2]} \end{cases} \tag{10-21}$$

根据式（10－21）可知，当 $n>0$ 时，$b_{1,n} > 0, b_{2,n} < 0$，这样对应 $b_{1,n}$ 相关项可以消除，这在后面求解实心区域问题将得到应用。

式（10－16）可改写为

$$u = \sum_{l=1}^{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{l,n,2m} x^{2m+\mathrm{i}p_{l,n}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \tag{10-22}$$

根据式（10－19）和式（10－20）可得

$$A_{l,n,2(m-1)} = A_{l,n,2m}(f_{1,l,n,2m} + f_{2,l,n,2m}\mathrm{i}) \tag{10-23}$$

其中 $f_{1,l,n,2m}, f_{2,l,n,2m}$（$m$=1，2，3，⋯）为实数函数。根据式（10－19）（10－20）（10－21）和（10－22）可得

$$f_{2,l,n,2m} = 0 \tag{10-24}$$

根据式（10－21），对应 $p_{1,n}$ 的 $f_{1,1,n,2m}$ 为

$$f_{1,1,n,2m} = -2^2 m\left[m - \sqrt{\frac{1}{4} + n^2 K_{22} - n^2 (K_{12})^2}\right] \tag{10-25}$$

同样，对应 p_{2n} 的 $f_{1,2,n,2m}$ 为

$$f_{1,2,n,2m} = -2^2 m\left[m + \sqrt{\frac{1}{4} + n^2 K_{22} - n^2 (K_{12})^2}\right] \tag{10-26}$$

待定复数常数 $A_{l,n,2m}$ 写为

$$A_{l,n,2m} = A_{l,n,2m,r} + \mathrm{i}A_{l,n,2m,i} \tag{10-27}$$

其中 $A_{l,n,2m,r}, A_{l,n,2m,i}$ 为实数。

根据式（10－19）（10－20）（10－25）和（10－26），可得递推矩阵

$$\begin{bmatrix} A_{l,n,2,m,r} \\ A_{l,n,2,m,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{f_{1,l,n,2m}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{f_{1,l,n,2m}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{l,n,2(m-1),r} \\ A_{l,n,2(m-1),i} \end{bmatrix} \tag{10-28}$$

因此，可得 $A_{l,n,2m,r}$，$A_{l,n,2m,i}$ 和 $A_{l,n,0,r}$，$A_{l,n,0,i}$ 之间的递推关系式

$$\begin{bmatrix} A_{l,n,2m,r} \\ A_{l,n,2m,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{l,n,2m} & 0 \\ 0 & C_{l,n,2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{l,n,0,r} \\ A_{l,n,0,i} \end{bmatrix} \tag{10-29}$$

式中 $C_{l,n,2m}$ 为实数。

由此可得

$$u_{l,n} = \sum_{m=0}^{\infty} A_{l,n,m} x^{2m+\mathrm{i}p_{l,n}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = A_{l,n,0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} C_{ip_{l,n}}(x) \tag{10-30}$$

$$u_{l,n} = (A_{l,n,0,r} + \mathrm{i}A_{l,n,0,i}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} C_{ip_{l,n}}(x) \tag{10-31}$$

其中定义了复数球柱多项式 $C_{ip_{l,n}}(x)$

$$C_{ip_{l,n}}(x) = x^{\mathrm{i}a_{l,n}} \sum_{m=0}^{\infty} C_{l,n,2m} x^{2m-b_{l,n}} \tag{10-32}$$

式中

$$\begin{cases} C_{1,n,0} = 1 \\ C_{1,n,2} = -\dfrac{1}{2^2\left(1-\sqrt{\dfrac{1}{4}+n^2K_{22}-n^2(K_{12})^2}\right)} \\ C_{1,n,4} = \dfrac{1}{2^2\times 2\left(2-\sqrt{\dfrac{1}{4}+n^2K_{22}-n^2(K_{12})^2}\right)2^2\times 1\left(1-\sqrt{\dfrac{1}{4}+n^2K_{22}-n^2(K_{12})^2}\right)} \\ \cdots \\ C_{1,n,2m} = \dfrac{(-1)^m}{2^{2m}m!\left(m-\sqrt{\dfrac{1}{4}+n^2K_{22}-n^2(K_{12})^2}\right)\left(m-1-\sqrt{\dfrac{1}{4}+n^2K_{22}-n^2(K_{12})^2}\right)\cdots\left(1-\sqrt{\dfrac{1}{4}+n^2K_{22}-n^2(K_{12})^2}\right)} \\ C_{2,n,0} = 1 \\ C_{2,n,2} = -\dfrac{1}{2^2\left(1+\sqrt{\dfrac{1}{4}+n^2K_{22}-n^2(K_{12})^2}\right)} \\ C_{2,n,4} = \dfrac{1}{2^2\times 2\left(2+\sqrt{\dfrac{1}{4}+n^2K_{22}-n^2(K_{12})^2}\right)2^2\times 1\left(1+\sqrt{\dfrac{1}{4}+n^2K_{22}-n^2(K_{12})^2}\right)} \\ \cdots \\ C_{2,n,2m} = \dfrac{(-1)^m}{2^{2m}m!\left(m+\sqrt{\dfrac{1}{4}+n^2K_{22}-n^2(K_{12})^2}\right)\left(m-1+\sqrt{\dfrac{1}{4}+n^2K_{22}-n^2(K_{12})^2}\right)\cdots\left(1+\sqrt{\dfrac{1}{4}+n^2K_{22}-n^2(K_{12})^2}\right)} \end{cases} \tag{10-33}$$

对于 $p = a + \mathrm{i}b$，变形复数柱多项式也可写为 $C_{ip}(x)$ 或 $C_{ia-b}(x)$。

根据式（10-15）和（10-30），球 Z_{ip} 方程的解可以写

$$f_n(x) = A_{1,n,0} C_{ip_{1,n}}(x) + A_{2,n,0} C_{ip_{2,n}}(x) \tag{10-34a}$$

根据式（10-16）和（10-31），方程（10-8）的解可以写

$$u_n = A_{1,n,0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} C_{ip_{1,n}}(x) + A_{2,n,0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} C_{ip_{2,n}}(x) \tag{10-34b}$$

式（10-4）中的 λ 可根据式（10-34b）非平凡解条件确定。下面分情况研究非稳态热传导问题。

10.2.2 具有第一类边界条件的实心圆板非稳态热传导解

圆板中心温度值有限性条件可以消除一半未知数，式（10－34b）只有 $l=2$ 对应的一半级数项存在，这样在实心薄板解中 l 只能取 $l=2$，为简便对应解中 l 依然以 l 标记。这样（10－34b）可改写为

$$u_n = A_{2,n,0}\mathrm{e}^{in\theta}C_{ip_{2,n}}(x) \tag{10-34c}$$

第一类边界条件简写为

$$r=R,u(x,\theta)=0$$

将式（10－34c）代入第一类边界条件，可得

$$C_{ip_{l,n}}(x)=0 \tag{10-35}$$

当 $n=0$，$u=c_0 j_0(x)$，为对称解。下面我们首先研究对称问题，其次再研究一般情况问题。

（1）各向异性实心圆板非稳态热传导：对称情况

考虑到第一类 0 阶球贝塞尔函数 $j_0(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$，根据 $j_0(x)$ 特性，可得 $j_0(x)$ 的零点

$$\mu_j^0=j\pi,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\lambda=\left(\frac{\mu_j^0}{R}\right)^2$$

关于 μ_j^0 的特征函数为

$$u_j=j_0\left(\frac{r}{R}\mu_j^0\right) \tag{10-36}$$

关于 μ_j^0 的 $\Gamma(t)$ 为

$$\Gamma(t)=A\mathrm{e}^{-\left(\frac{\mu_j^0}{R}\right)^2at} \tag{10-37}$$

这样可得方程（10－1）的中心对称解为

$$T(r,t)=\sum_{j=1}^{\infty}A_j\mathrm{e}^{-\left(\frac{\mu_j^0}{R}\right)^2at}j_0\left(\frac{r\mu_j^0}{R}\right) \tag{10-38}$$

对于边界条件和初始条件 $T(r,0)=\varphi(r)$，如果初始条件是中心对称的，那么温度场就与 θ 无关。因此式（10－38）就是非稳态问题解。将 $t=0$ 代入式（10－38）后，代入初始条件 $T(r,0)=\varphi(r)$，将 $\varphi(r)$ 展开为 $j_0\left(\frac{r\mu_j^0}{R}\right)$ 级数，对比所得初始条件方程左右两式，可以确定待定常数 A_j，问题得解。

（2）各向异性实心圆板非稳态热传导：一般情况

分析 $C_{ip_{l,n}}(x)=x^{ia_{l,n}}\sum_{m=0}^{\infty}C_{l,n,2m}x^{2m-b_{l,n}}$，$C_{ip_{l,n}}(x)=0$ 有无限多零点，记为 $\mu_{l,n,j}^0$，$j=1,2,3,\cdots$。求解式（10－35）可得 $\mu_{l,n,j}^0$

$$\mu_{l,n,j}^0=R\sqrt{\lambda} \tag{10-39}$$

和

$$\lambda = (\frac{\overset{0}{\mu}_{l,n,j}}{R})^2 \tag{10-40}$$

根据式（10－4）（10－9）（10－34b）（10－38）和（10－40），可得

$$T(r,\theta,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(A_{l,n,0,j,r} + \mathrm{i}A_{l,n,0,j,i})C_{ip_{l,n}}(\frac{r\overset{0}{\mu}_{l,n,j}}{R})\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{-(\frac{\overset{0}{\mu}_{l,n,j}}{R})^2 at} + \sum_{j=1}^{\infty}c_j j_0(\frac{r\overset{0}{\mu}_j}{R})\mathrm{e}^{-(\frac{\overset{0}{\mu}_j}{R})^2 at} \tag{10-41}$$

将 $t=0$ 代入式（10－41），再根据初始条件，可得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(A_{l,n,0,j,r} + iA_{l,n,0,j,i})C_{ip_{l,n}}(\frac{r\overset{0}{\mu}_{l,n,j}}{R})\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} + \sum_{j=1}^{\infty}c_j j_0(\frac{r\overset{0}{\mu}_j}{R}) = \varphi(r,\theta) \tag{10-42}$$

求解式（10－42），可以求得 $A_{l,n,0,j,r}, A_{l,n,0,j,i}$（$1\leqslant j\leqslant J$，$0\leqslant n\leqslant N$）和 c_{0j}（$1\leqslant j\leqslant J$）。

后文 10.4 节给出证明：如 $\varphi(r,\theta)$ 在圆域内分段光滑，那么 $\varphi(r,\theta)$ 可以展开为以下二重复数级数

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}B_{l,n,0,j}C_{ip_{l,n}}(\frac{r\overset{0}{\mu}_{l,n,j}}{R})\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} + \sum_{j=1}^{\infty}d_j j_0(\frac{r\overset{0}{\mu}_j}{R}) \tag{10-43}$$

其中 $B_{l,n,0,j}$ 为复数常数，记为 $B_{l,n,0,j} = B_{l,n,0,j,r} + \mathrm{i}B_{l,n,0,j,i}$ 。$B_{l,n,0,j}$ ，d_j 可分别由后文中的式（10－78），（10－80）确定。

对比式（10－42）和（10－43）中 $j_0(\frac{r\overset{0}{\mu}_j}{R})$ ，$C_{ip_{l,n}}(\frac{r\overset{0}{\mu}_{l,n,j}}{R})\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ 前的系数，可得

$$A_{l,n,0,j,r} = B_{l,n,0,j,r}, A_{l,n,0,j,i} = B_{l,n,0,j,i}, c_j = d_j \tag{10-44}$$

由此，可以确定圆板内温度场。

根据数学物理实数化原理，可将式（10－41）简写为

$$T(r,\theta,t) = \sum_{j=1}^{\infty}c_j j_0(\frac{r\overset{0}{\mu}_j}{R})\mathrm{e}^{-(\frac{\overset{0}{\mu}_j}{R})^2 at} + \mathrm{Re}[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(A_{l,n,0,j,r} + \mathrm{i}A_{l,n,0,j,i})C_{ip_{l,n}}(\frac{r\overset{0}{\mu}_{l,n,j}}{R})\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}e^{-(\frac{\overset{0}{\mu}_{l,n,j}}{R})^2 at}] + T_0 \tag{10-45}$$

10.2.3　复数球柱多项式研究

考虑到 $C_{ip_{l,n}}(x)$ 为复数函数，下面研究分析 $C_{ip_{l,n}}(x)$ 函数结构。

记式（10－35）根为 $\overset{0}{\mu}_{l,n,j}$ 。

记 $(\frac{\overset{0}{\mu}_{l,n,j}}{R})^2 = c_{l,n,j} + \mathrm{i}d_{l,n,j}$ 。

定义

$$(\frac{\overset{0}{\mu}_{l,n,j}}{R})^{2m-b_{l,n}+\mathrm{i}a_{l,n}} = (c_{l,n,j} + \mathrm{i}d_{l,n,j})^{(2m-b_{l,n}+\mathrm{i}a_{l,n})0.5} \tag{10-46a}$$

$$R_{l,n,j,m} + \mathrm{i}I_{l,n,j,m} = (c_{l,n,j} + \mathrm{i}d_{l,n,j})^{(2m-b_{l,n}+\mathrm{i}a_{l,n})0.5} \tag{10-46b}$$

式中 $R_{l,n,j,m}, I_{l,n,j,m}$ 为实数。

对于 $\overset{0}{\mu}_{l,n,j}$ ，有 $\overset{0}{\mu}_{l,n,j} = R\sqrt{\lambda}$ ，$x = r\sqrt{\lambda}$ ，那么有

$$x = \frac{r}{R}\mu^0_{l,n,j}$$

代入（10－32）可得

$$C_{ip_{l,n}}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_{l,n,2m}\left(\frac{\mu^0_{l,n,j}}{R}\right)^{2m-b_{l,n}+ia_{l,n}} r^{2m-b_{l,n}+ia_{l,n}} = \sum_{m=0}^{\infty} C_{l,n,2m}(R_{l,n,j,m}+\mathrm{i}I_{l,n,j,m})r^{2m-b_{l,n}+ia_{l,n}} \tag{10-47}$$

因此，可得下面函数

$$C_{ip_{l,n}}(x) = C_{ip_{l,n}}\left(\frac{r}{R}\mu^0_{l,n,j}\right) =$$

$$[C^{(j,1)}_{l,n}(r)\cos(a_{l,n}\ln r) - C^{(j,2)}_{l,n}(r)\sin(a_{l,n}\ln r)] + \mathrm{i}[C^{(j,1)}_{l,n}(r)\sin(a_{l,n}\ln r) + C^{(j,2)}_{l,n}(r)\cos(a_{l,n}\ln r)] \tag{10-48}$$

式中 $C^{(j,1)}_{l,n}(r)$，$C^{(j,2)}_{l,n}(r)$ 为实数多项式

$$\begin{cases} C^{(j,1)}_{l,n}(r) = r^{-b_{l,n}}(C_{l,n,0}R_{l,n,j,0} + C_{l,n,2}R_{l,n,j,1}r + \cdots + C_{l,n,2(M-1)}R_{l,n,j,M-1}r^{2(M-1)} + C_{l,n,2M}R_{l,n,j,M}r^{2M}) \\ C^{(j,2)}_{l,n}(r) = r^{-b_{l,n}}(C_{l,n,0}I_{l,n,j,0} + C_{l,n,2}I_{l,n,j,1}r + \cdots + C_{l,n,2(M-1)}I_{l,n,j,M-1}r^{2(M-1)} + C_{l,n,2M}I_{l,n,j,M}r^{2M}) \end{cases} \tag{10-49}$$

式中 $C_{l,n,2m}(m = 0,1,2,4,\cdots)$ 系数可根据式（10－33）确定；M 为计算 $C^{(1)}_{l,n,j}(r)$、$C^{(2)}_{l,n,j}(r)$ 中 m 所取最大项数。

根据式（10－48），可得

$$C_{ip_{l,n}}(x)[C_{ip_{l,n}}(x)]^* = [C^{(j,1)}_{l,n}(r)]^2 + [C^{(j,2)}_{l,n}(r)]^2 \tag{10-50}$$

式中 $[C_{ip_{l,n}}(x)]^*$ 为 $C_{ip_{l,n}}(x)$ 共轭式。

根据式（10－48）和（10－49），式（10－45）写为

$$T(r,\theta,t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(A_{l,n,0,j,r}\left\{C^{(j,1)}_{l,n}(r)\cos\left[n\theta + a_{l,n}\ln\left(\frac{r\mu^0_{l,n,j}}{R}\right)\right] - C^{(j,2)}_{l,n}(r)\sin\left[n\theta + a_{l,n}\ln\left(\frac{r\mu^0_{l,n,j}}{R}\right)\right]\right\} -\right.$$

$$\left.A_{l,n,0,j,i}\left\{C^{(j,2)}_{l,n}(r)\cos\left[n\theta + a_{l,n}\ln\left(\frac{r\mu^0_{l,n,j}}{R}\right)\right] + C^{(j,1)}_{l,n}(r)\sin\left[n\theta + a_{l,n}\ln\left(\frac{r\mu^0_{l,n,j}}{R}\right)\right]\right\}\right)e^{-\left(\frac{\mu^0_{l,n,j}}{R}\right)^2 at} +$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_{0j}j_0\left(\frac{r\mu^0_j}{R}\right)e^{-\left(\frac{\mu^0_j}{R}\right)^2 at} + T_0 \tag{10-51}$$

(1) $C_{ip_{l,n}}(x)$ 与贝塞尔函数的关系

在式（10－33）中，再取

$$\begin{cases} C_{1,n,0} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{2^{-\sqrt{\frac{1}{4}+n^2K_{22}-n^2(K_{12})^2}}\Gamma\left(-\sqrt{\frac{1}{4}+n^2K_{22}-n^2(K_{12})^2}+1\right)} \\ C_{2,n,0} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{2^{\sqrt{\frac{1}{4}+n^2K_{22}-n^2(K_{12})^2}}\Gamma\left(\sqrt{\frac{1}{4}+n^2K_{22}-n^2(K_{12})^2}+1\right)} \end{cases} \tag{10-52}$$

利用 $\Gamma(x)$ 的递推特性，一般项系数变为

$$\begin{cases} C_{1,n,2m} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \dfrac{(-1)^m}{2^{2m} m!\Gamma(-\sqrt{\dfrac{1}{4} + n^2 K_{22} - n^2 (K_{12})^2} + m + 1)} \\ C_{2,n,2m} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \dfrac{(-1)^m}{2^{2m} m!\Gamma(\sqrt{\dfrac{1}{4} + n^2 K_{22} - n^2 (K_{12})^2} + m + 1)} \end{cases} \tag{10-53}$$

根据第一类贝塞尔函数定义，结合式（10-21）可得

$$C_{ip_{l,n}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} x^{ia_{l,n}} J_{\frac{1}{2}-b_{l,n}}(x) \tag{10-54}$$

根据特殊函数理论中球贝塞尔函数定义，可得

$$j_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\nu+\frac{1}{2}}(x) \tag{10-55}$$

其中 $j_\nu(x)$ 为 ν 阶球贝塞尔函数，$J_{\nu+\frac{1}{2}}(x)$ 为 $\nu+\dfrac{1}{2}$ 阶贝塞尔函数。

结合式（10-54）和（10-55），可得

$$C_{ip_{l,n}}(x) = x^{ia_{l,n}} j_{-b_{l,n}}(x) \tag{10-56}$$

式（10-56）建立了复数球柱多项式和球贝塞尔多项式关系。对于各向同性热传导、正交异性热传导问题，$K_{12}=0$，$a_{l,n}=0$，$C_{ip_{l,n}}(x) = j_{-b_{l,n}}(x)$，即在各向同性热传导、正交异性热传导问题中，复数球柱函数和球贝塞尔函数一致的。

根据复变函数理论，可得

$$\begin{cases} x^{ia_{l,n}} = \cos(a_{l,n}\ln x) + i\sin(a_{l,n}\ln x) \\ (x^{ia_{l,n}})^* = \cos(a_{l,n}\ln x) - i\sin(a_{l,n}\ln x) = x^{-ia_{l,n}} \end{cases} \tag{10-57}$$

其中 $(x^{ia_{l,n}})^*$ 为 $x^{ia_{l,n}}$ 的共轭函数。

$$\begin{cases} C_{ip_{l,n}}(x)e^{in\theta} = x^{ia_{l,n}} e^{in\theta} j_{-b_{l,n}}(x) = e^{i(n\theta + a_{l,n}\ln x)} j_{-b_{l,n}}(x) \\ C_{ip_{l,n}}(x)e^{in\theta} = j_{-b_{l,n}}(x)[\cos(n\theta + a_{l,n}\ln x) + i\sin(n\theta + a_{l,n}\ln x)] \end{cases} \tag{10-58}$$

综合式（10-56）和（10-57），可得

$$C_{ip_{l,n}}(x) = j_{-b_{l,n}}(x)[\cos(a_{l,n}\ln x) + i\sin(a_{l,n}\ln x)] \tag{10-59}$$

从上式可看出，球贝塞尔函数 $j_{-b_{l,n}}(x)$ 类似复数球柱多项式函数的广义振幅，$a_{l,n}\ln x$ 类似复数球柱多项式函数的广义幅角。当广义幅角为 0 时，复数球柱函数和球贝塞尔函数一致。

（2）$C_{ip_{l,n}}(x)$ 与复数柱多项式的关系

由式（10-54）和（5-75），可得

$$C_{ip_{l,n}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Z_{ip_{l,n}+\frac{1}{2}}(x) \tag{10-60a}$$

$$Z_{ip_{l,n}+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}} C_{ip_{l,n}}(x) \tag{10-60b}$$

10.2.4 计算程序

第一类边界条件的曲线型各向异性圆板非稳态热传导问题的复数球柱函数计算方法有

七步：

1）第 1 步：根据式（10－21）求解 $p_{l,n}$ 。

2）第 2 步：根据式（10－33）求解 $C_{l,n,2m}$ 系数。

3）第 3 步：根据式（10－35）求解根 $\mu_{l,n,j}^{0}$ 。求解式（10－35）或需要采用数值计算技术以确定根 $\mu_{l,n,j}^{0}$ 。

4）第 4 步：根据式（10－46b）计算 $R_{l,n,j,m}, I_{l,n,j,m}$ 。

5）第 5 步：根据式（10－48）确定多项式 $C_{ip_{l,n}}(x)$ 。

6）第 6 步：根据式（10－78）（10－80）确定待定常数 $B_{l,n,0,j}$ 和 d_j 。由于 $C_{ip_{l,n}}(x)$ 复杂性，很多情况需要采用数值计算方法确定待定常数 $B_{l,n,0,j}$ 和 d_j 。

7）第 7 步：根据式（10－51）确定解数值。

可以推断以下结论：如果物理场确定，$C_{ip_{l,n}}(x)$ 确定，这样 $B_{l,n,0,j}$ 和 d_j 可以确定，问题解即可确定。

10.2.5　数值实验

研究在实心曲线型各向异性圆形薄板，材料热传导系数为 $k_1 = 0.301\text{kcal/(m·h·℃)}$，$k_2 = 0.129\text{kcal/(m·h·℃)}$，$\rho = 590\,\text{kg/m}^3$，$C_p = 1756\text{W. s/(kg. ℃)}$；其他计算参数为$R=1\text{m}$，$q=0$，圆板外边界（$r = 1\text{m}$）温度边界条件为 0℃ ，圆板初始条件为 $[(r-r^4)\cos(\theta + a_{2,1}\ln r) + 1 - r^2]$℃ 。$a_{2,1} = -K_{12}$ 。

（1）分离常数 $\lambda_{l,n,j} = (\frac{\mu_{l,n,j}^{0}}{R})^2$ 分布情况

根据式（10－35）和（10－39）可以确定分离常数（正值 $\lambda_{l,n,j}$ 或特征根 $\mu_{l,n,j}^{0}$ ）。计算 M 设定为 56，计算结果见表 10－1 和表 10－2。

表 10－1　$\lambda_{l,n,j} = (\frac{\mu_{l,n,j}^{0}}{R})^2$ $(l = 2,\ n = 1)$ 随 β 变化情况

j \ β	10°	45°	90°
1	12.904882003294380	15.139471599384730	21.461211869612480
2	45.702279619871270	50.110893476670480	62.016750255345090
3	98.243991431909540	104.826525770905800	122.298140130663600
4	170.525920601521500	179.282426714243100	202.315800505753700
5	262.547384243676900	273.477888377269200	302.071653117329500
6	374.308164943417700	387.412730373472900	421.566367550868200
7	505.808570364440200	521.086350727564200	560.797149823970800
8	657.052176072855600	674.504401126638400	719.820623735286100
9	827.648792078050100	847.760943228825000	897.970189016055900
10	1034.139283237525000	1036.209070729183000	1103.984541179405000
11	1133.430927953761000		1229.875696337915000
12	1537.945672085907000		2615.285913988730000

表 10 - 2　$\lambda_{l,n,j} = (\frac{\mu^0_{l,n,j}}{R})^2 \ (l = 1,\ n = 1)$ 随 β 变化情况

j \ β	10°	45°	90°
1	0.7654494698470579	14.053726298533960	6.419991235868384
2	17.251361676761140	48.155482920788170	35.038077188037930
3	53.529472537055550	102.001898476738400	83.337549134546660
4	109.550418084000700	175.588644177272800	151.369432949495100
5	185.311377377095800	268.914966357725000	239.138660013175900
6	280.811818864674900	381.980655982849000	346.646390049104200
7	396.051624483107700	514.785687316680300	473.892507277656200
8	531.029484210603100	667.328569388289000	620.891003023172400
9	685.774612679763000	839.674265425698700	787.353779124620700
10	859.646018942786600	1026.786144618308000	977.922361732102900
11	1069.348164532147000	2184.759125745155000	1160.175760817385000
12	1176.716440255001000		1288.139911774104000
13			2403.364705837837000

计算表明复数球柱函数有无限多特征根，排序为 $0 < \lambda_{l,n,1} < \lambda_{l,n,2} < \lambda_{l,n,3} < \cdots$，当 $m \to \infty$，$\lambda_{l,n,j} \to \infty$。由于各向异性存在，$K_{11}, K_{12}, K_{22}$ 随 β 变化而变化，所以无法如同各向同性温度场（$K_{11} = 1, K_{12} = 0$，$K_{22} = 1$）计算中球贝塞尔函数那样给出固定的函数表。

（2）验证 $C_{ip_{l,n}}(x)$ 正交性

考虑 $C_{ip_{l,n}}(x)$，关键研究内容就是 $C_{ip_{l,n}}(x)$ 函数的正交性。本章给出一些关于 $C_{ip_{l,n}}(x)$ 积分结果，计算参数 $M=36$，$J=10$，$l=2$。

定义：$\delta(l,n,j_1,j_2) = \int_0^R (C_{ip_{l,n}}(\frac{r}{R}\mu^0_{l,n,j_2}))^* C_{ip_{l,n}}(\frac{r}{R}\mu^0_{l,n,j_1}) r^2 \mathrm{d}r$

对于曲线型各向异性圆板（各向异性角 $\beta = 45°$），$\delta(l,n,j_1,j_2)$ 计算结果见表 10 - 3。

表 10 - 3 $\delta(l,n,j_1,j_2)$ 计算结果($\beta = 45°$)

j_2 \ j_1	1	2	4
1	2.697E−003	3.026E−007−i1.235E−008	−6.418E−009 −i7.357E−010
2	3.026E−007− i1.235E−008	2.084E−003	−1.5965E−007 −i1.369E−008
3	3.373E−009−i8.730E−010	1.146E−007 −i1.620E−008	1.5778E−010 −i3.115E−011
4	−6.418E−009 +i7.357E−010	−1.596E−007 +i1.370E−008	3.627E−003
5	1.841E−009−i1.260E−009	7.907E−008 −i2.457E−008	9.782E−011 −i6.493E−011
6	−2.373E−009 +i1.041E−009	−9.243E−008 +i1.962E−008	−1.084E−010 +i4.096E−011
7	9.127E−010−i1.782E−009	5.642E−008 −i4.429E−008	6.472E−011 −i1.020E−010
8	−1.424E−009+i1.509E−009	−6.888E−008 +i3.206E−008	−8.509E−011 +i7.847E−011

其他计算也表明了类似结论。可以得到以下结论：如 $j_1 \neq j_2$，$\delta(l,n,j_1,j_2) = 0$；如 $j_1 = j_2$，$\delta(l,n,j_1,j_2) \neq 0$。表 10 - 3 表明 10.7 节中关于复数球柱函数正交性证明是正确的。

(3) 验证所得解收敛性

针对各向异性角 $\beta = 45°$ 的曲线型各向异性圆形实心板非稳态问题进行收敛性验证计算，验证计算中其他参数与上节相同。具体增加 M 值，观察 $T(0.5,0,0)$(℃)数值变化情况，计算结果见表 10-4、10-5。计算表明 J（正值的 $\lambda_{l,n,j}$ 个数）与 M 相关联。

表 10-4　$T(0.5,0,0)$(℃),$\beta = 45°$

M	10($J=2$)	16($J=4$)	30($J=8$)	36($J=8$)	56($J=10$)	*
$T(0.5,0,0)$	1.205	1.163	1.150	1.170	1.171	1.171

表 10-5　$T(0.5,0,0)$(℃), $\beta = 0°$

M	10($J=2$)	16($J=4$)	30($J=8$)	36($J=8$)	44($J=10$)	*
$T(0.5,0,0)$	1.231	1.179	1.171	1.186	1.188	1.188

表 10-4 和表 10-5 的注：* 是精确解 $[(r-r^4)\cos(\theta+a_{2,1}\ln r)+1-r^2]$ 数值。

表 10-4 和 10-5 表明（10-41）解随着 M（或 J）增加收敛稳定。

(4) 实心各向异性圆板温度场分析研究

首先验证阶数解对边界条件和初始条件的满足情况。计算时，取 $M = 40$，其他计算参数与上节相同。计算结果见表 10-6～表 10-8。θ 单位为（°），r 单位为 m，t 时间单位为 s。

表 10-6　$T(r,\theta,0)$ (℃),$\beta = 45°$,$t = 0$s

r \ θ	0	45	90	135	180	225	270	315
0.0	0.9995	0.9995	0.9995	0.9995	0.9995	0.9995	0.9995	0.9995
0.1	1.0620	0.9739	0.8953	0.8721	0.9180	1.0060	1.0850	1.1080
0.3	1.1750	0.9993	0.7716	0.6250	0.6453	0.8207	1.0480	1.1950
0.5	1.1750	0.9649	0.6291	0.3640	0.3251	0.5350	0.8709	1.1360
0.7	0.9687	0.7877	0.4441	0.1391	0.0513	0.2322	0.5759	0.8809
0.9	0.4374	0.3576	0.1796	0.0077	−0.0574	0.0224	0.2004	0.3723
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

表 10-7　初始温度条件 $[(r-r^4)\cos(\theta+0.5\ln r)+1-r^2]$℃

r \ θ	0	45	90	135	180	225	270	315
0.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	1.0500	0.9765	0.9105	0.8910	0.9296	1.0040	1.0700	1.0890
0.3	1.1690	0.9973	0.7748	0.6315	0.6513	0.8227	1.0450	1.1890
0.5	1.1710	0.9629	0.6302	0.3678	0.3292	0.5371	0.8698	1.1320
0.7	0.9652	0.7857	0.4446	0.1419	0.0548	0.2343	0.5754	0.8781
0.9	0.4337	0.3550	0.1797	0.0104	−0.0537	0.0250	0.2003	0.3696
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

表 10-8　$T(r,\theta,10^5)$ (℃), β = 45°, t = 10^5 s

r \ θ	0	45	90	135	180	225	270	315
0.1	0.9658	0.8431	0.7335	0.7013	0.7652	0.8879	0.9975	1.0300
0.3	1.0540	0.8762	0.6451	0.4962	0.5168	0.6948	0.9260	1.0750
0.5	0.9776	0.8039	0.5262	0.3070	0.2748	0.4484	0.7262	0.9454
0.7	0.6954	0.5766	0.3509	0.1507	0.0931	0.2119	0.4375	0.6377
0.9	0.2355	0.1997	0.1198	0.0427	0.0135	0.0493	0.1292	0.2063
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

根据以上计算结果，可以得到以下结论：

本节所得解析解收敛性好，很好地满足定解条件（边界条件，初始条件）。随着时间增加，温度场数值降低（趋向于 0℃），这与物理常识一致。计算表明，所得解是正确的。本章引入的复数球柱函数方法可以应用于求解薄圆板域内的数学物理问题。

10.3　复数球柱函数实数化分析

根据式 (10-16)，可得

$$u_{l,n}=\sum_{m=0}^{\infty}A_{l,n,2m}x^{2m+ip_{l,n}}e^{in\theta}=A_{l,n,0}e^{in\theta}\sum_{m=0}^{\infty}C_{l,n,2m}x^{2m+ip_{l,n}}$$

引入多项式 $j_n^{(l)}(x)$

$$j_n^{(l)}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}C_{l,n,2m}x^{2m-b_{l,n}}$$

可得

$$C_{ip_{l,n}}(x)=x^{ia_{l,n}}j_n^{(l)}(x) \tag{10-61}$$

当 $n\neq 0$，根据式 (10-30) 和 (10-31)，对应 $p_{l,n}=a_{l,n}+ib_{l,n}$ 的复数球柱函数解写为

$$\begin{aligned}u_l&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_{l,n,0}C_{ip_{l,n}}(x)e^{in\theta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_{l,n,0}\mathrm{j}_n^{(1)}(x)x^{ia_{l,n}}e^{in\theta}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}j_n^{(l)}(x)[A_{l,n,0,r}\cos(n\theta+a_{l,n}\ln x)-A_{l,n,0,i}\sin(n\theta+a_{l,n}\ln x)]+\\&\quad i\sum_{n=1}^{\infty}j_n^{(l)}(x)[A_{l,n,0,i}\cos(n\theta+a_{l,n}\ln x)+A_{l,n,0,r}\sin(n\theta+a_{l,n}\ln x)]+\\&\quad\sum_{n=-\infty}^{-1}j_n^{(l)}(x)[A_{l,n,0,r}\cos(n\theta+a_{l,n}\ln x)-A_{l,n,0,i}\sin(n\theta+a_{l,n}\ln x]+\\&\quad i\sum_{n=-\infty}^{-1}j_n^{(l)}(x)(A_{l,n,0,i}\cos(n\theta+a_{l,n}\ln x)+A_{l,n,0,r}\sin(n\theta+a_{l,n}\ln x)]\end{aligned}$$

因此

$$
\begin{aligned}
u_l = & \sum_{n=1}^{\infty} j_n^{(l)}(x)[A_{l,n,0,r}\cos(n\theta + a_{l,n}\ln x) - A_{l,n,0,i}\sin(n\theta + a_{l,n}\ln x)] + \\
& \mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty} j_n^{(l)}(x)[A_{l,n,0,i}\cos(n\theta + a_{l,n}\ln x) + A_{l,n,0,r}\sin(n\theta + a_{l,n}\ln x)] + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} j_{-n}^{(l)}(x)[A_{l,-n,0,r}\cos(n\theta + a_{l,n}\ln x) + A_{l,-n,0,i}\sin(n\theta + a_{l,n}\ln(x)] + \\
& \mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty} j_{-n}^{(1)}(x)[A_{l,-n,0,i}\cos(n\theta + a_{l,n}\ln x) - A_{l,-n,0,r}\sin(n\theta + a_{l,n}\ln x)]
\end{aligned}
\tag{10-62}
$$

根据式（10－21）和（10－33），可得

$$
j_{-n}^{(l)}(x) = j_n^{(l)}(x) \tag{10-63}
$$

如果式（10－62）中的 u 是实数，根据式（10－62）和（10－63）可得

$$
\begin{cases}
A_{1,n,0,i} + A_{1,-n,0,i} = 0 \\
A_{1,n,0,r} - A_{1,-n,0,r} = 0
\end{cases}
\tag{10-64}
$$

将式（10－64）代入式（10－62）可得

$$
\begin{aligned}
u_l &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{l,n,0} C_{ip_{l,n}}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = 2\mathrm{Re}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} A_{l,n,0} C_{ip_{l,n}}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\right\} \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{j}_n^{(l)}(x)[A_{l,n,0,r}\cos(n\theta + a_{l,n}\ln x) - A_{l,n,0,i}\sin(n\theta + a_{l,n}\ln x)]
\end{aligned}
$$

10.4　复数球柱函数展开定理证明

考虑实心圆域（$0 \leqslant r \leqslant R$，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$），对于非稳态热传导控制方程（10－1），式（10－5）中分离常数写为 $\lambda_{l,n,j} = (\frac{\overset{0}{\mu}_{l,n,j}}{R})^2$。$\overset{0}{\mu}_{l,n,j}(j = 1,2,\cdots,\infty)$ 为 $C_{ip_{l,n}}(x) = 0$ 的根。

将式（10－31）和 $x = \frac{r\overset{0}{\mu}_{l,n,j}}{R}$ 代入方程（10－8），可得

$$
\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[r^2\frac{\mathrm{d}C_{ip_{l,n}}(x)}{\mathrm{d}r}] + 2\mathrm{i}nK_{12}r\frac{\mathrm{d}C_{ip_{l,n}}(x)}{\mathrm{d}r} - n^2K_{22}C_{ip_{l,n}}(x) + \mathrm{i}nK_{12}C_{ip_{l,n}}(x) + (\frac{r\overset{0}{\mu}_{l,n,j}}{R})^2 C_{ip_{l,n}}(x)\right\} = 0 \tag{10-65}
$$

根据式（10－33），$\overset{0}{\mu}_{l,n,j}$ 是 n 的偶函数。因此，一个 $\overset{0}{\mu}_{l,n,j}$ 与两个方程相关，一个是方程（10－65），另一个是以下关于 $-n$ 的偏微分方程

$$
\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[r^2\frac{\mathrm{d}C_{ip_{l,-n}}(x)}{\mathrm{d}r}] - 2\mathrm{i}nK_{12}r\frac{\mathrm{d}C_{ip_{l,-n}}(x)}{\mathrm{d}r} - n^2K_{22}C_{ip_{l,-n}}(x) - \mathrm{i}nK_{12}C_{ip_{l,-n}}(x) + (\frac{r\overset{0}{\mu}_{l,n,j}}{R})^2 C_{ip_{l,-n}}(x)\right\} = 0 \tag{10-66}
$$

式中 $C_{ip_{l,-n}}(x)=x^{-i\omega_{ln}}j_{-b_{l,n}}(x)$ 。因此，$C_{ip_{l,-n}}(x)=[C_{ip_{l,n}}(x)]^*$ 。

方程（10 - 65）和方程（10 - 66）可被称为连带方程。

$C_{ip_{l,-n}}(x)\mathrm{e}^{in\theta}$ 的共轭可写为 $[C_{ip_{l,n}}(x)\mathrm{e}^{in\theta}]^*$ 。因此可得

$$[C_{ip_{l,n}}(x)\mathrm{e}^{in\theta}]^*=\mathrm{e}^{-in\theta}x^{-i\omega_{l,n}}\sum_{m=0}^{\infty}C_{l,n,2m}x^{2m-b_{l,n}}=\mathrm{e}^{-in\theta}C_{ip_{l,-n}}(x)\tag{10-67}$$

这样，方程（10 - 66）可写为

$$\mathrm{e}^{-in\theta}\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(r^2\frac{\mathrm{d}[C_{ip_{l,n}}(x)]^*}{\mathrm{d}r})-2inK_{12}r\frac{\mathrm{d}[C_{ip_{l,n}}(x)]^*}{\partial r}-n^2K_{22}[C_{ip_{l,n}}(x)]^*-inK_{12}[C_{ip_{l,n}}(x)]^*+(\frac{r\overset{0}{\mu}_{l,n,j}}{R})^2[C_{ip_{l,n}}(x)]^*\}=0\tag{10-68}$$

记 $x=r\alpha$ 。设 $C_{ip_{l,n}}(r\alpha_1)$ 、$C_{ip_{l,n}}(r\alpha_2)$ 是方程（10 - 65）的解，式中 $\alpha_1=\frac{\overset{0}{\mu}_{l,n,j_1}}{R}$ ，$\alpha_2=\frac{\overset{0}{\mu}_{l,n,j_2}}{R}$ ，$C_{ip_{l,n}}(\alpha_1R)=C_{ip_{l,n}}(\alpha_2R)=0$ ，$\alpha_1\neq\alpha_2$ ，$[C_{ip_{l,n}}(\alpha_1R)]^*=[C_{ip_{l,n}}(\alpha_2R)]^*=0$ 。

记 $C_{ip_{l,n}}(\alpha_1R)$ 为 $F_1(x)$ ，$C_{ip_{l,n}}(r\alpha_2)$ 为 $F_2(x)$ 。这样可得

$$\mathrm{e}^{in\theta}[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2\frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}r})+2inK_{12}r\frac{\mathrm{d}F_1}{dr}-n^2K_{22}F_1+inK_{12}F_1+(\alpha_1)^2r^2F_1]=0\tag{10-69}$$

$$\mathrm{e}^{-in\theta}[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2\frac{\mathrm{d}(F_2)^*}{\mathrm{d}r})-2inK_{12}r\frac{\mathrm{d}(F_2)^*}{\mathrm{d}r}-n^2K_{22}(F_2)^*-inK_{12}(F_2)^*+(\alpha_2)^2r^2(F_2)^*]=0\tag{10-70}$$

方程（10 - 69）乘以 $-[C_{ip_{l,n}}(\alpha_2r)\mathrm{e}^{in\theta}]^*$ ，方程（10 - 70）乘以 $\mathrm{e}^{in\theta}C_{ip_{l,n}}(\alpha_1r)$ ，所得两式相加后，对 $r=0$ 到 $r=R$ 关于 r 进行积分，可得

$$[(\alpha_1)^2-(\alpha_2)^2]\int_0^R r^2C_{ip_{l,n}}(\alpha_1r)\mathrm{e}^{in\theta}[C_{ip_{l,n}}(\alpha_2r)\mathrm{e}^{in\theta}]^*\,\mathrm{d}r=0\tag{10-71}$$

因为 $\overset{0}{\mu}_{l,n,j_1}\neq\overset{0}{\mu}_{l,n,j_2}$ ，可得

$$\int_0^R r^2C_{ip_{l,n}}(\frac{\overset{0}{\mu}_{l,n,j_1}}{R}r)[C_{ip_{l,n}}(\frac{\overset{0}{\mu}_{l,n,j_2}}{R}r)]^*\,\mathrm{d}r=0,j_1\neq j_2\tag{10-72}$$

设 $C_{ip_{2,n}}(\frac{\overset{0}{\mu}_{2,n,j_1}}{R}r)\mathrm{e}^{in\theta}$ ，$C_{ip_{1,n}}(\frac{\overset{0}{\mu}_{1,n,j_2}}{R}r)\mathrm{e}^{in\theta}$ 为（10 - 65）的解。下面，研究 $C_{ip_{2,n}}(\frac{\overset{0}{\mu}_{2,n,j_1}}{R}r)\mathrm{e}^{in\theta}$ 和 $C_{ip_{1,n}}(\frac{\overset{0}{\mu}_{1,n,j_2}}{R}r)\mathrm{e}^{in\theta}$ 关系。

记 $C_{ip_{2,n}}(\frac{\overset{0}{\mu}_{2,n,j_1}}{R}r)$ 为 $f_2(x)$ 。根据（10 - 65）可得

$$\mathrm{e}^{in\theta}[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}r})+2inK_{12}r\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}r}-n^2K_{22}f_2+inK_{12}f_2+\left(\frac{r\overset{0}{\mu}_{2,n,j_1}}{R}\right)^2f_2]=0\tag{10-73}$$

记 $C_{ip_{1,n}}(r\frac{\overset{0}{\mu}_{1,n,j_2}}{R})$ 为 $F_2(x)$ 。根据（10 - 70），可得

$$e^{-in\theta}\left[\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d(F_2)^*}{dr}\right)-2inK_{12}r\frac{d(F_2)^*}{dr}-n^2K_{22}(F_2)^*-inK_{12}(F_2)^*+\left(\frac{r\mu^0_{1,n,j_2}}{R}\right)^2(F_2)^*\right]=0$$

(10－74)

将（10－73）乘以 $-(F_2e^{in\theta})^*$ ，（10－74）乘以 $e^{in\theta}f_2$ ，两式相加后对 r 从 $r=0$ 到 $r=R$ 积分后所得

$$\left[\left(\frac{\mu^0_{1,n,j_2}}{R}\right)^2-\left(\frac{\mu^0_{2,n,j_1}}{R}\right)^2\right]\int_0^R r^2C_{ip_{2,n}}\left(\frac{\mu^0_{2,n,j_1}}{R}r\right)e^{in\theta}\left[C_{ip_{1,n}}\left(\frac{r\mu^0_{1,n,j_2}}{R}\right)e^{in\theta}\right]^*dr=0$$

(10－75)

因为 $\mu^0_{1,n,j_2}\neq\mu^0_{2,n,j_1}$ ，可得

$$\int_0^R r^2C_{ip_{2,n}}\left(\frac{\mu^0_{2,n,j_1}}{R}r\right)e^{in\theta}\left[C_{ip_{1,n}}\left(\frac{r\mu^0_{1,n,j_2}}{R}\right)e^{in\theta}\right]^*dr=0 \tag{10－76}$$

其中 $n\neq 0$ 。

根据 Sturm-Liouville 理论，根据（10－72）和（10－76），可得函数 $C_{ip_{l,n}}\left(r\frac{\mu^0_{l,n,j}}{R}\right)e^{in\theta}$ 在圆域（$0\leqslant r\leqslant R$ ，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ ）关于 r^2 权正交。下面给出复数球柱函数展开定理

复数球柱函数展开定理：

如果 $\varphi(r,\theta)$ 在圆域（$0\leqslant r\leqslant R$ ，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ ）为分段连续函数，那么 $\varphi(r,\theta)$ 有复数球柱函数展开式

$$\varphi(r,\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}B_{l,n,0,j}C_{ip_{l,n}}\left(\frac{r\mu^0_{l,n,j}}{R}\right)e^{in\theta}+\sum_{j=1}^{\infty}d_jj_0\left(\frac{r\mu^0_j}{R}\right) \tag{10－77}$$

其中 $\mu^0_{l,n,j}$ 为 $C_{ip_{l,n}}(x)=0$ 的根，$n\neq 0$ 。μ^0_j 为 0 阶第一类球贝塞尔函数 $j_0(x)$ 的零点。如 $\varphi(r,\theta)$ 为关于 r 的 $f(r)$ 和关于两个自变量 (r,θ) 的函数 $\varphi(r,\theta)$ 之和，即 $\varphi(r,\theta)=\varphi_1(r,\theta)+f(r)$ ，那么级数常数为

$$B_{l,n,0,j}=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^R\varphi_1(r,\theta)\left[C_{ip_{l,n}}\left(\frac{r\mu^0_{l,n,j}}{R}\right)e^{in\theta}\right]^*r^2\,dr\,d\theta}{\left[N^{(j)}_{n,l}\right]} \tag{10－78}$$

$$\left[N^{(j)}_{n,l}\right]=\int_0^{2\pi}\int_0^R\left[C_{ip_{l,n}}\left(\frac{r\mu^0_{l,n,j}}{R}\right)e^{in\theta}\right]^*C_{ip_{l,n}}\left(\frac{r\mu^0_{l,n,j}}{R}\right)e^{in\theta}r^2\,dr\,d\theta \tag{10－79}$$

和

$$d_j=\frac{\int_0^R f(r)j_0\left(\frac{r\mu^0_j}{R}\right)r^2\,dr}{\int_0^R\left[j_0\left(\frac{r\mu^0_j}{R}\right)\right]^2r^2\,dr} \tag{10－80}$$

式（10－77）被称为 $\varphi(r,\theta)$ 的复数球柱函数展开。对于圆域（$0\leqslant r\leqslant R$ ，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ ）内的任一点 (r,θ) ，如 $\varphi(r,\theta)$ 在 (r,θ) 连续，那么复数球柱函数展开收敛于 $\varphi(r,\theta)$ 。

10.5　复数球柱多项式的微分公式、递推关系式和积分公式

如同不同阶的球贝塞尔多项式之间有一定联系，不同阶的复数球柱多项式也存在这种

联系的微分公式和递推公式。

10.5.1　$C_{ip}(x)$ 多项式的微分公式

$C_{ip}(x)$ 多项式有如下微分公式

$$\frac{d}{dx}[(x^{ip+1})^* C_{ip}(x)] = (x^{ip+1})^* C_{ip-1}(x) \tag{10-81}$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-ip}C_{ip}(x)] = -x^{-ip}C_{ip+1}(x) \tag{10-82}$$

$$(\frac{d}{xdx})^k [(x^{ip+1})^* C_{ip}(x)] = (x^{ip+1})^* x^{-k}C_{ip-k}(x) \tag{10-83}$$

$$(\frac{d}{xdx})^k [\frac{C_{ip}(x)}{x^{ip}}] = (-1)^k \frac{C_{ip+k}(x)}{x^{ip+k}} \tag{10-84}$$

证明：

由式（5－79）可得

$$\frac{d}{dx}[(x^{ip})^* Z_{ip}(x)] = (x^{ip})^* Z_{ip-1}(x)$$

将式（10－60b）代入上式，可得

$$\frac{d}{dx}[(x^{ip+1})^* C_{ip}(x)] = (x^{ip+1})^* C_{ip-1}(x)$$

式（10－81）得证。

由式（5－80）可得

$$\frac{d}{dx}[x^{-ip}Z_{ip}(x)] = -x^{-ip}Z_{ip+1}(x)$$

将式（10－60b）代入上式，可得

$$\frac{d}{dx}[x^{-ip}C_{ip}(x)] = -x^{-ip}C_{ip+1}(x)$$

式（10－82）得证。

由式（5－81）可得

$$(\frac{d}{xdx})^k [(x^{ip})^* Z_{ip}(x)] = (x^{ip})^* x^{-k}Z_{ip-k}(x)$$

将式（10－60b）代入上式，可得

$$(\frac{d}{xdx})^k [(x^{ip+1})^* C_{ip}(x)] = (x^{ip+1})^* x^{-k}C_{ip-k}(x)$$

式（10－83）得证。

由式（5－82）可得

$$(\frac{d}{xdx})^k [\frac{Z_{ip}(x)}{x^{ip}}] = (-1)^k \frac{Z_{ip+k}(x)}{x^{ip+k}}$$

将式（10－60b）代入上式，可得

$$(\frac{d}{xdx})^k [\frac{C_{ip}(x)}{x^{ip}}] = (-1)^k \frac{C_{ip+k}(x)}{x^{ip+k}}$$

式（10－84）得证。

10.5.2　$C_{ip}(x)$ 多项式递推关系式

$$x\frac{\mathrm{d}C_{ip}(x)}{\mathrm{d}x}+(\mathrm{i}p+1)^*C_{ip}(x)=xC_{ip-1}(x) \tag{10-85}$$

$$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[C_{ip}(x)]-\mathrm{i}pC_{ip}(x)=-xC_{ip+1}(x) \tag{10-86}$$

$$C_{ip-1}(x)+C_{ip+1}(x)=\frac{\mathrm{i}p+(\mathrm{i}p)^*+1}{x}C_{ip}(x) \tag{10-87}$$

$$\frac{\mathrm{i}p-(\mathrm{i}p)^*-1}{x}C_{ip}(x)+C_{ip-1}(x)-C_{ip+1}(x)=2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[C_{ip}(x)] \tag{10-88}$$

证明：

由式（5－83）可得

$$x\frac{\mathrm{d}Z_{ip}(x)}{\mathrm{d}x}+(\mathrm{i}p)^*Z_{ip}(x)=xZ_{ip-1}(x)$$

将式（10－60b）代入上式，可得

$$x\frac{\mathrm{d}C_{ip}(x)}{\mathrm{d}x}+(\mathrm{i}p+1)^*C_{ip}(x)=xC_{ip-1}(x)$$

式（10－85）得证。

由式（5－84）可得

$$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[Z_{ip}(x)]-\mathrm{i}pZ_{ip}(x)=-xZ_{ip+1}(x)$$

将式（10－60b）代入上式，可得

$$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[C_{ip}(x)]-\mathrm{i}pC_{ip}(x)=-xC_{ip+1}(x)$$

式（10－86）得证。

由式（5－85）可得

$$Z_{ip-1}(x)+Z_{ip+1}(x)=-\frac{2b}{x}Z_{ip}(x)$$

将式（10－60b）代入上式，可得

$$C_{ip-1}(x)+C_{ip+1}(x)=-\frac{2b}{x}C_{ip}(x) \tag{10-89}$$

考虑到 $p=a+\mathrm{i}b$，$\mathrm{i}p=\mathrm{i}a-b$，我们可有 $(\mathrm{i}p)^*=-\mathrm{i}a-b$

可得

$$(\mathrm{i}p)^*+\mathrm{i}p=-2b \tag{10-90}$$

$$\mathrm{i}p-(\mathrm{i}p)^*=2\mathrm{i}a \tag{10-91}$$

将式（10－90）代入（10－89），可得

$$C_{ip-1}(x)+C_{ip+1}(x)=\frac{\mathrm{i}p+(\mathrm{i}p)^*+1}{x}C_{ip}(x)$$

式（10－87）得证。

由式（5-86）可得

$$\frac{2\mathrm{i}a}{x}Z_{ip}(x)+Z_{ip-1}(x)-Z_{ip+1}(x)=2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[Z_{ip}(x)]$$

将式（10-60b）代入上式，可得

$$\frac{2\mathrm{i}a-1}{x}C_{ip}(x)+C_{ip-1}(x)-C_{ip+1}(x)=2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[C_{ip}(x)]$$

将式（10-91）代入式（10-92），可得

$$\frac{\mathrm{i}p-(\mathrm{i}p)^*-1}{x}C_{ip}(x)+C_{ip-1}(x)-C_{ip+1}(x)=2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[C_{ip}(x)]$$

式（10-88）得证。

根据式（10-87），如果已知 $C_{ip-1}(x)$，$C_{ip}(x)$ 即可计算出 $C_{ip+1}(x)$。根据式（10-86），如果已知 $C_{ip+1}(x)$，$C_{ip}(x)$ 即可计算出导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[C_{ip}(x)]$。

式（10-85）～（10-88）为复数球柱多项式 $C_{ip}(x)$ 的递推公式。

可以容易证明球贝塞尔函数的微分公式和递推公式是复数球柱函数 $C_{ip}(x)$ 微分公式和递推公式的特殊情况。

10.5.3 有关 $C_{ip}(x)$ 的积分公式

有关 $C_{ip}(x)$ 多项式不定积分公式

$$\int(x^{\mathrm{i}p+2})^*C_{ip}(x)\mathrm{d}x=(x^{\mathrm{i}p+2})^*C_{ip+1}(x)+c \tag{10-92}$$

$$\int\frac{C_{ip}(x)}{x^{\mathrm{i}p-1}}\mathrm{d}x=-x^{-\mathrm{i}p+1}C_{ip-1}(x)+c \tag{10-93}$$

$$\int\frac{xC_{ip-1}(x)-(\mathrm{i}p+1)^*C_{ip}(x)}{x}\mathrm{d}x=C_{ip}(x)+c \tag{10-94}$$

$$\int\frac{\mathrm{i}pC_{ip}(x)-xC_{ip+1}(x)}{x}\mathrm{d}x=C_{ip}(x)+c \tag{10-95}$$

$$\int\frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{i}p-(\mathrm{i}p)^*-1}{x}C_{ip}(x)+C_{ip-1}(x)-C_{ip+1}(x)\right]\mathrm{d}x=C_{ip}(x)+c \tag{10-96}$$

证明：

由式（10-81），令（10-81）右端中 $\mathrm{i}p\rightarrow\mathrm{i}p+1$，$\mathrm{i}p-1\rightarrow\mathrm{i}p$，可得式（10-92）；由式（10-82），令式（10-82）右端中 $-ip\rightarrow-ip+1$，$ip+1\rightarrow ip$ 可得式（10-93）。

由式（10-85）可得式（10-94）。由式（10-86）可得式（10-95）。由式（10-88）可得式（10-96）。

有关 $C_{ip}(x)$ 多项式定积分公式

$$\int_0^t(x^{\mathrm{i}p+2})^*C_{ip}(x)\mathrm{d}x=(t^{\mathrm{i}p+2})^*C_{ip+1}(t) \tag{10-97}$$

$$\int_0^t\frac{C_{ip}(x)}{x^{\mathrm{i}p-1}}\mathrm{d}x=-t^{-\mathrm{i}p+1}C_{ip-1}(t) \tag{10-98}$$

$$\int_0^t \frac{xC_{ip-1}(x) - (ip+1)^* C_{ip}(x)}{x} dx = C_{ip}(t) - C_{ip}(0) \tag{10-99}$$

$$\int_0^t \frac{ipC_{ip}(x) - xC_{ip+1}(x)}{x} dx = C_{ip}(t) - C_{ip}(0) \tag{10-100}$$

$$\int_0^t \frac{1}{2}\left[\frac{ip - (ip)^* - 1}{x} C_{ip}(x) + C_{ip-1}(x) - C_{ip+1}(x)\right] dx = C_{ip}(t) - C_{ip}(0) \tag{10-101}$$

10.6 第二类复数球柱多项式定义及其递推公式

对于各向异性问题，有些情况下需要定义第二类复数球柱函数

根据式（10－21），可得

$$\begin{cases} a_{1,n} = -nK_{12} \\ b_{1,n} = 0.5 + \sqrt{\dfrac{1}{4} + n^2[K_{22} - (K_{12})^2]} \\ a_{2,n} = -nK_{12} \\ b_{2,n} = 0.5 - \sqrt{\dfrac{1}{4} + n^2[K_{22} - (K_{12})^2]} \end{cases}$$

基于以上特征根分布情况，定义第二类复数球柱函数

$$y_{ip}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{ip+\frac{1}{2}}(x) \tag{10-102}$$

其中 $Y_{ip+\frac{1}{2}}(x)$ 为 $(ip + \frac{1}{2})$ 阶第二类复数柱多项式，具体见式（5－95）。

球 Z_{ip} 方程（10－14）的解可以写为

$$f_n(x) = A_{1,n,0} C_{ip_{2,n}}(x) + A_{2,n,0} y_{ip}(x) \tag{10-103}$$

其中 $A_{1,n,0}, A_{2,n,0}$ 为复数常数。

显然，第二类球贝塞尔函数是第二类复数球柱多项式的特殊情况。

类似地，由于 $y_{ip}(x)$ 为复数函数，$e^{in\theta}$ 也是复数函数，在许多情况下 $y_{ip}(x)$ 和 $e^{in\theta}$ 是互相耦合，由此下面给出一个新的复数函数－第二类复数球柱函数 $y_{ip}(x,\theta)$

$$y_{ip}(x,\theta) = y_{ip}(x) e^{in\theta}$$

如同不同阶的第二类复数柱多项式之间有一定联系，不同阶的第二类复数球柱多项式也存在微分公式和递推公式。

（1）$y_{ip}(x)$ 多项式的微分公式

$y_{ip}(x)$ 多项式有如下微分公式

$$\frac{d}{dx}[(x^{ip+1})^* y_{ip}(x)] = (x^{ip+1})^* y_{ip-1}(x) \tag{10-104}$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-ip} y_{ip}(x)] = -x^{-ip} y_{ip+1}(x) \tag{10-105}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^k\left[(x^{\mathrm{i}p+1})^* y_{ip}(x)\right] = (x^{\mathrm{i}p+1})^* x^{-k} y_{ip-k}(x) \tag{10-106}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^k\left[\frac{y_{ip}(x)}{x^{\mathrm{i}p}}\right] = (-1)^k \frac{y_{ip+k}(x)}{x^{\mathrm{i}p+k}} \tag{10-107}$$

(2) $y_{ip}(x)$ 多项式递推关系式

$$x\frac{\mathrm{d}y_{ip}(x)}{\mathrm{d}x} + (\mathrm{i}p+1)^* y_{ip}(x) = xy_{ip-1}(x) \tag{10-108}$$

$$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[y_{ip}(x)] - \mathrm{i}py_{ip}(x) = -xy_{ip+1}(x) \tag{10-109}$$

$$y_{ip-1}(x) + y_{ip+1}(x) = \frac{\mathrm{i}p + (\mathrm{i}p)^* + 1}{x} y_{ip}(x) \tag{10-110}$$

$$\frac{\mathrm{i}p - (\mathrm{i}p)^* - 1}{x} y_{ip}(x) + y_{ip-1}(x) - y_{ip+1}(x) = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[y_{ip}(x)] \tag{10-111}$$

(3) 有关 $y_{ip}(x)$ 的积分公式

有关 $y_{ip}(x)$ 多项式不定积分公式

$$\int (x^{\mathrm{i}p+2})^* y_{ip}(x)\mathrm{d}x = (x^{\mathrm{i}p+2})^* y_{ip+1}(x) + c \tag{10-112}$$

$$\int \frac{y_{ip}(x)}{x^{\mathrm{i}p-1}}\mathrm{d}x = -x^{-\mathrm{i}p+1} y_{ip-1}(x) + c \tag{10-113}$$

$$\int \frac{xy_{ip-1}(x) - (\mathrm{i}p+1)^* y_{ip}(x)}{x}\mathrm{d}x = y_{ip}(x) + c \tag{10-114}$$

$$\int \frac{\mathrm{i}py_{ip}(x) - xy_{ip+1}(x)}{x}\mathrm{d}x = y_{ip}(x) + c \tag{10-115}$$

$$\int \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{i}p - (\mathrm{i}p)^* - 1}{x} y_{ip}(x) + y_{ip-1}(x) - y_{ip+1}(x)\right]\mathrm{d}x = y_{ip}(x) + c \tag{10-116}$$

10.7　第三类复数球柱多项式定义及其递推公式

对于各向异性问题，有些情况下需要定义第三类复数球柱函数

$$\begin{cases} h_{ip}^{(1)}(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}} H_{ip+\frac{1}{2}}^{(1)}(x) \\ h_{ip}^{(2)}(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}} H_{ip+\frac{1}{2}}^{(2)}(x) \end{cases} \tag{10-117}$$

其中 $h_{ip}^{(1)}(x)$ 为第一种 ip 阶第三类复数球柱多项式，$h_{ip}^{(2)}(x)$ 为第二种 ip 阶第三类复数球柱多项式．$H_{ip+\frac{1}{2}}^{(1)}(x)$ 为第一种 $(\mathrm{i}p+\frac{1}{2})$ 阶第三类复数柱多项式，具体见式（5－115）；$H_{ip+\frac{1}{2}}^{(2)}(x)$ 为第二种 $(\mathrm{i}p+\frac{1}{2})$ 阶第三类复数柱多项式，具体见式（5－116）。

球 Z_{ip} 方程（10－14）的解也可以写为

$$f_n(x) = Ah_{ip}^{(1)}(x) + Bh_{ip}^{(2)}(x) \tag{10-118}$$

其中 A，B 为复数常数。

可以证明，第三类球贝塞尔函数是第三类复数球柱多项式的特殊情况。

类似地，由于 $h_{ip}^{(k)}(x)$ 为复数函数，$e^{ip\theta}$ 也是复数函数，在许多情况下 $h_{ip}^{(k)}(x)$ 和 $e^{ip\theta}$ 是互相耦合，由此下面给出一个新的复数函数一第三类复数球柱函数 $h_{ip}^{(k)}(x,\theta)$

$$h_{ip}^{(k)}(x,\theta)=h_{ip}^{(k)}(x)e^{ip\theta}$$

其中 $h_{ip}^{(1)}(x,\theta)$ 可称为第一种第三类复数球柱函数，$h_{ip}^{(2)}(x,\theta)$ 可称为第二种第三类复数球柱函数。

如同不同阶的第三类复数柱多项式之间有一定联系，不同阶的第三类复数球柱多项式也存在这种联系的微分公式和递推公式。

（1）$h_{ip}^{(k)}(x)$ 多项式的微分公式

$h_{ip}^{(k)}(x)$ 多项式有如下微分公式

$$\frac{d}{dx}[(x^{ip+1})^{*}h_{ip}^{(k)}(x)]=(x^{ip+1})^{*}h_{ip-1}^{(k)}(x) \tag{10-119}$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-ip}h_{ip}^{(k)}(x)]=-x^{-ip}h_{ip+1}^{(k)}(x) \tag{10-120}$$

$$\left(\frac{d}{xdx}\right)^{k}[(x^{ip+1})^{*}h_{ip}^{(k)}(x)]=(x^{ip+1})^{*}x^{-k}h_{p-k}^{(k)}(x) \tag{10-121}$$

$$\left(\frac{d}{xdx}\right)^{k}\left[\frac{h_{ip}^{(k)}(x)}{x^{ip}}\right]=(-1)^{k}\frac{h_{p+k}^{(k)}(x)}{x^{ip+k}} \tag{10-122}$$

（2）$h_{ip}^{(k)}(x)$ 多项式递推关系式

$$x\frac{dh_{ip}^{(k)}(x)}{dx}+(ip+1)^{*}h_{ip}^{(k)}(x)=xh_{ip-1}^{(k)}(x) \tag{10-123}$$

$$x\frac{d}{dx}[h_{ip}^{(k)}(x)]-iph_{ip}^{(k)}(x)=-xh_{ip+1}^{(k)}(x) \tag{10-124}$$

$$h_{ip-1}^{(k)}(x)+h_{ip+1}^{(k)}(x)=\frac{ip+(ip)^{*}+1}{x}h_{ip}^{(k)}(x) \tag{10-125}$$

$$\frac{ip-(ip)^{*}-1}{x}h_{ip}^{(k)}(x)+h_{ip-1}^{(k)}(x)-h_{ip+1}^{(k)}(x)=2\frac{d}{dx}[h_{ip}^{(k)}(x)] \tag{10-126}$$

（3）有关 $y_{ip}(x)$ 多项式不定积分公式

$$\int(x^{ip+2})^{*}h_{ip}^{(k)}(x)dx=(x^{ip+2})^{*}h_{ip+1}^{(k)}(x)+c \tag{10-127}$$

$$\int\frac{h_{ip}^{(k)}(x)}{x^{ip-1}}dx=-x^{-ip+1}h_{ip-1}^{(k)}(x)+c \tag{10-128}$$

$$\int\frac{xh_{ip-1}^{(k)}(x)-(ip+1)^{*}h_{ip}^{(k)}(x)}{x}dx=h_{ip}^{(k)}(x)+c \tag{10-129}$$

$$\int\frac{iph_{ip}^{(k)}(x)-xh_{ip+1}^{(k)}(x)}{x}dx=h_{ip}^{(k)}(x)+c \tag{10-130}$$

$$\int\frac{1}{2}\left[\frac{ip-(ip)^{*}-1}{x}h_{ip}^{(k)}(x)+h_{ip-1}^{(k)}(x)-h_{ip+1}^{(k)}(x)\right]dx=h_{ip}^{(k)}(x)+c \tag{10-131}$$

式中 c 为常数。

可以容易证明第三类球贝塞尔函数的微分公式、递推公式是第三类复数球柱多项式微分公式、递推公式的特殊情况。

10.8　其他边界条件下的薄圆板非稳态热传导问题求解

10.8.1　给定第二类边界条件的实心薄圆板非稳态热传导

对于侧面具有第二类边界条件（绝热边界条件）的实心薄圆板非稳态热传导问题，可得边界条件

$$q_r|_{r=R} = -\left(k_{11}\frac{\partial T}{\partial r} + k_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)\Big|_{r=R} = 0 \tag{10-132}$$

和自然条件 $T(0,\theta,t)$ 为有限值。

考虑式（10－21）

$$\begin{cases} a_{1,n} = -nK_{12} \\ b_{1,n} = 0.5 + \sqrt{\dfrac{1}{4} + n^2[K_{22} - (K_{12})^2]} \\ a_{2,n} = -nK_{12} \\ b_{2,n} = 0.5 - \sqrt{\dfrac{1}{4} + n^2[K_{22} - (K_{12})^2]} \end{cases}$$

圆心温度值有限性可以用来消减 $u_n = A_{1,n,0}\mathrm{e}^{in\theta}C_{ip_{1,n}}(x) + A_{2,n,0}\mathrm{e}^{in\theta}C_{ip_{2,n}}(x)$ 中一半的待定系数，即 $A_{1,n,0} = 0$ 。这样只需要研究 $u_n = A_{2,n,0}\mathrm{e}^{in\theta}C_{ip_{2,n}}(x)$ 。

边界条件（10－132）简化为

$$r = R, -\left[k_{11}\frac{\partial u(x,\theta)}{\partial r} + k_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial u(x,\theta)}{\partial \theta}\right]\Big|_{r=R} = 0 \tag{10-133}$$

引入以下参数变换

$$K_{11} = 1, K_{12} = \frac{k_{12}}{k_{11}}, K_{22} = \frac{k_{22}}{k_{11}}, x = r\sqrt{\lambda}$$

对式（10－133）进行参数变换，可得

$$\left[x\frac{\partial u(x,\theta)}{\partial x} + K_{12}\frac{\partial u(x,\theta)}{\partial \theta}\right]\Big|_{x=R\sqrt{\lambda}} = 0$$

将 $u = (A_{2,n,0,r} + iA_{2,n,0,i})\mathrm{e}^{in\theta}C_{ip_{2,n}}(x)$ 代入上式，根据 $n \neq 0$ 时 $A_{2,n,0}$ 非平凡解条件，可以得到特征方程

$$\left[x\frac{\partial C_{ip_{2,n}}(x)}{\partial x} + K_{12}inC_{ip_{2,n}}(x)\right]\Big|_{x=R\sqrt{\lambda}} = 0 \tag{10-134}$$

求解式（10－134）可得零点 $\mu_{l,n,j}^0$ ，$j=1, 2, 3, \cdots$。

根据特征值 $\mu_{l,n,j}^0$ 可以确定式（10－45）解形式，进而确定问题解。

10.8.2　具有第三类边界条件的实心薄圆板非稳态热传导

第三类边界条件（边界热对流）为

$$[-(k_{11}\frac{\partial T}{\partial r}+k_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta})+h_m T]|_{r=R}=0 \tag{10-135}$$

和自然条件中心 $T(0,\theta,t)$ 为有限值。h_m 为柱体与外界环境热对流系数。圆心温度值有限性可以用来消减一半的待定系数，$u_n=A_{1,n,0}\mathrm{e}^{in\theta}C_{ip_{1,n}}(x)+A_{2,n,0}\mathrm{e}^{in\theta}C_{ip_{2,n}}(x)$ 中 $A_{1,n,0}=0$，只需要研究 $u_n=A_{2,n,0}\mathrm{e}^{in\theta}C_{ip_{2,n}}(x)$。

边界条件（10－135）简化为

$$r=R,-[k_{11}\frac{\partial u(x,\theta)}{\partial r}+k_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial u(x,\theta)}{\partial \theta}]+h_m u(x,\theta)=0 \tag{10-136}$$

引入参数变换

$$K_{11}=1,K_{12}=\frac{k_{12}}{k_{11}},K_{22}=\frac{k_{22}}{k_{11}},x=r\sqrt{\lambda}$$

对式（10－136）进行以上参数变换，可得

$$\{-[x\frac{\partial u(x,\theta)}{\partial x}+K_{12}\frac{\partial u(x,\theta)}{\partial \theta}]+R\frac{h_m}{k_{11}}u(x,\theta)\}|_{x=R\sqrt{\lambda}}=0 \tag{10-137}$$

将 $u=(A_{2,n,0,r}+\mathrm{i}A_{2,n,0,i})\mathrm{e}^{in\theta}C_{ip_{2,n}}(x)$ 代入式（10－137），根据 $n\neq 0$ 时 $A_{2,n,0}$ 非平凡解条件，可以得到特征方程

$$[x\frac{\partial C_{ip_{2,n}}(x)}{\partial x}+K_{12}\mathrm{i}nC_{ip_{2,n}}(x)-\frac{Rh_m}{k_{11}}C_{ip_{2,n}}(x)]|_{x=R\sqrt{\lambda}}=0 \tag{10-138}$$

求解式（10－138）可得根 $\mu_{l,n,j}^{0},j=1,2,3,\cdots$。

根据特征值 $\mu_{l,n,j}^{0}$ 可以确定式（10－45）解形式，进而确定问题解。

10.9 各向异性圆环薄板非稳态热传导与复数球柱环函数展开定理

10.9.1 柱侧面边界具有第一类边界条件的各向异性薄圆环板求解

对于侧面具有第一类边界条件的各向异性圆环域（$r_1\leqslant r\leqslant r_2$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$）非稳态热传导问题边界条件为

$$\begin{cases}u(r_1,\theta)=0\\u(r_2,\theta)=0\end{cases} \tag{10-139}$$

考虑变换 $x=r\sqrt{\lambda}$，式（10－139）可改写为

$$\begin{cases}u(x_1,\theta)=0\\u(x_2,\theta)=0\end{cases} \tag{10-140}$$

其中 $x_1=r_1\sqrt{\lambda},x_2=r_2\sqrt{\lambda}$。

方程（10－8）的解为

$$u(x,\theta)=A_{1,n,0}\mathrm{e}^{in\theta}C_{ip_{1,n}}(x)+A_{2,n,0}\mathrm{e}^{in\theta}C_{ip_{2,n}}(x) \tag{10-141}$$

式中 $A_{1,n,0},A_{2,n,0}$ 为复数常数。

将式（10－141）代入（10－140），根据待定系数 $A_{1,n,0},A_{2,n,0}$ 不全为 0 的条件，可得

特征行列式

$$\begin{vmatrix} C_{ip_{1,n}}(x_1) & C_{ip_{2,n}}(x_1) \\ C_{ip_{1,n}}(x_2) & C_{ip_{2,n}}(x_2) \end{vmatrix} = 0 \tag{10-142}$$

求解式（10－142）可以确定特征值 $\lambda_n^{(j)}$ 。根据（10－142）特征矩阵可得

$$A_{2,n,0,j} = -A_{1,n,0,j} \frac{C_{ip_{1,n}}(r_1\sqrt{\lambda_n^{(j)}})}{C_{ip_{2,n}}(r_1\sqrt{\lambda_n^{(j)}})} \tag{10-143}$$

特征函数

$$u_{n,j}(x,\theta) = A_{1,n,0,j}\left[C_{ip_{1,n}}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}}) - \frac{C_{ip_{1,n}}(r_1\sqrt{\lambda_n^{(j)}})}{C_{ip_{2,n}}(r_1\sqrt{\lambda_n^{(j)}})}C_{ip_{2,n}}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})\right]e^{in\theta} \tag{10-144}$$

$$T(r,\theta,t) = \sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(A_{1,n,0,j,r} + iA_{1,n,0,j,i})$$
$$\left[C_{ip_{1,n}}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}}) - \frac{C_{ip_{1,n}}(r_1\sqrt{\lambda_n^{(j)}})}{C_{ip_{2,n}}(r_1\sqrt{\lambda_n^{(j)}})}C_{ip_{2,n}}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})\right]e^{in\theta}e^{-\lambda_n^{(j)}at} + T(r,t) \tag{10-145}$$

式中 $T(r,t)$ 为中心对称情况下的贝塞尔函数解

$$T(r,t) = \sum_{j=1}^{\infty}A_j\left[j_0(r\sqrt{\lambda_0^{(j)}}) - \frac{j_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}})}{y_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}})}y_0(r\sqrt{\lambda_0^{(j)}})\right]e^{-\lambda_j^0 at}$$

λ_j^0 为下式的根

$$\begin{vmatrix} j_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}}) & y_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}}) \\ j_0(r_2\sqrt{\lambda_0^{(j)}}) & y_0(r_2\sqrt{\lambda_0^{(j)}}) \end{vmatrix} = 0$$

将 $t=0$ 代入式（10－145），再根据初始条件（10－3）可得

$$\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(A_{1,n,0,j,r} + iA_{1,n,0,j,i})\left[C_{ip_{1,n}}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}}) - \frac{C_{ip_{1,n}}(r_1\sqrt{\lambda_n^{(j)}})}{C_{ip_{2,n}}(r_1\sqrt{\lambda_n^{(j)}})}C_{ip_{2,n}}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})\right]e^{in\theta} +$$
$$T(r,0) = \varphi(r,\theta) \tag{10-146}$$

求解式（10－146）可得 $A_{l,n,0,j,r}, A_{l,n,0,j,i}$ ，$1 \leqslant j \leqslant J$，$1 \leqslant n \leqslant N$ 。下文给出简略证明：如果 $\varphi(r,\theta)$ 是在圆环（ $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ ，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ ）内分片连续函数，且 $\varphi(r,\theta) = \varphi(r,\theta) + f(r)$ ，$\varphi(r,\theta)$ 可展开为以下双复数级数和球贝塞尔级数之和

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}B_{1,n,0,j}B_{ip_n}(x)e^{in\theta} + \sum_{j=1}^{\infty}C_j\left[j_0(r\sqrt{\lambda_0^{(j)}}) - \frac{j_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}})}{y_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}})}y_0(r\sqrt{\lambda_0^{(j)}})\right] \tag{10-147}$$

其中 $\lambda_n^{(j)}$ 为 $\begin{vmatrix} C_{ip_{1,n}}(x_1) & C_{ip_{2,n}}(x_1) \\ C_{ip_{1,n}}(x_2) & C_{ip_{2,n}}(x_2) \end{vmatrix} = 0$ 的零点。$B_{l,n,0,j}$ 是复数常数，$B_{1,n,0,j} = B_{1,n,0,j,r} +$

$iB_{1,n,0,j,i}$ 。C_i 为实数。

式中

$$\begin{cases} B_{ip_n}(x) = C_{ip_{1,n}}(x) - \dfrac{C_{ip_{1,n}}(r_1\sqrt{\lambda_n^{(j)}})}{C_{ip_{2,n}}(r_1\sqrt{\lambda_n^{(j)}})} C_{ip_{2,n}}(x) \\ B_{1,n,0,j} = \dfrac{\int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi} \varphi(r,\theta)\left[B_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})e^{in\theta}\right]^* r^2 d\theta dr}{[N_{n,l}^{(j)}]} \\ [N_{n,l}^{(j)}] = \int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} \left[B_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})e^{in\theta}\right]^* B_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})e^{in\theta} r^2 dr d\theta \end{cases} \tag{10-148}$$

$$C_j = \frac{\int_{r_1}^{r_2} f(r)\left[j_0(r\sqrt{\lambda_0^{(j)}}) - \dfrac{j_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}})}{y_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}})} y_0(r\sqrt{\lambda_0^{(j)}})\right] r^2 dr}{\int_{r_1}^{r_2}\left[j_0(r\sqrt{\lambda_0^{(j)}}) - \dfrac{j_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}})}{y_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}})} y_0(r\sqrt{\lambda_j^0})\right]^2 r^2 dr} \tag{10-149}$$

比较式（10－146）和（10－147）的 $j_0(r\sqrt{\lambda_0^{(j)}}) - \dfrac{j_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}})}{y_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}})} y_0(r\sqrt{\lambda_j^0})$，$B_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})$ 的系数，可得

$$A_{1,n,0,r,j} = B_{1,n,0,r,j}, A_{1,n,0,i,j} = B_{1,n,0,i,j}, A_j = C_j$$

由此，可以确定各向异性圆环薄板温度场。

10.9.2 复数球柱环函数圆环域展开定理

考虑圆环域（$r_1 \leqslant r \leqslant r_2$，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$），对于非稳态热传导方程（10－1），式 10－5）的分离常数可写为 $\lambda_n^{(j)}$，其中 $\lambda_n^{(j)}$（$j = 1,2,\cdots,\infty$）是 $\begin{vmatrix} C_{ip_{1,n}}(x_1) & C_{ip_{2,n}}(x_1) \\ C_{ip_{1,n}}(x_2) & C_{ip_{2,n}}(x_2) \end{vmatrix} = 0$ 的特征根。

引入参数变换，$x = r\sqrt{\lambda_n^{(j)}}$。标记 $x_1 = r_1\sqrt{\lambda_n^{(j)}}, x_2 = r_2\sqrt{\lambda_n^{(j)}}$。

将 $u_{l,n} = (A_{l,n,0,r} + iA_{l,n,0,i})e^{in\theta}B_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})$ 和 $x = r\sqrt{\lambda_n^{(j)}}$ 代入方程（10－8），可得

$$\begin{aligned} & e^{in\theta}\left\{\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{d}{dr}B_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})\right] + 2inK_{12}r\frac{d}{dr}B_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})\right. \\ & \left. - n^2K_{22}B_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}}) + inK_{12}B_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}}) + \lambda_n^{(j)}r^2B_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}}) = 0\right. \end{aligned} \tag{10-150}$$

根据式（10－33）和 $\begin{vmatrix} C_{ip_{1,n}}(x_1) & C_{ip_{2,n}}(x_1) \\ C_{ip_{1,n}}(x_2) & C_{ip_{2,n}}(x_2) \end{vmatrix} = 0$，$\lambda_n^{(j)}$ 是 n 的偶函数。因此，一个 $\lambda_n^{(j)}$ 与两个方程相关，一个是式（10－150），另一个是以下关于 $-n$ 的偏微分方程：

$$\begin{aligned} & e^{-in\theta}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{d}{dr}B_{ip_{-n}}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})\right] - 2inK_{12}r\frac{d}{dr}B_{ip_{-n}}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}}) \\ & - n^2K_{22}B_{ip_{-n}}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}}) - inK_{12}B_{ip_{-n}}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}}) + \lambda_n^{(j)}r^2B_{ip_{-n}}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}}) = 0 \end{aligned} \tag{10-151}$$

方程（10-150）和（10-151）可称为连带方程。

根据 $B_{ip_n}(x)$ 定义，式（10-33）和 $\begin{vmatrix} C_{ip_{1,n}}(x_1) & C_{ip_{2,n}}(x_1) \\ C_{ip_{1,n}}(x_2) & C_{ip_{2,n}}(x_2) \end{vmatrix} = 0$，可以得到

$$[B_{ip_n}(x)]^* = B_{ip_{-n}}(x) \tag{10-152}$$

这样，式（10-151）可写为

$$\begin{aligned} &e^{-in\theta}(\frac{d}{dr}\{r^2\frac{d}{dr}[B_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})]^*\} - 2inK_{12}r\frac{d}{dr}[B_{ip_n}(r)]^* \\ &-n^2K_{22}[B_{ip_n}(r)]^* - inK_{12}[B_{ip_n}(r)]^* + \lambda_n^{(j)}r^2[B_{ip_n}(r)]^*) = 0 \end{aligned} \tag{10-153}$$

标记 $x = r\alpha$。假设 $B_{ip_n}(r\alpha_1)e^{in\theta}$，$B_{ip_n}(r\alpha_2)e^{in\theta}$ 是方程（10-150）的解，那么 $B_{ip_n}(r\alpha_1)e^{in\theta}]^*$，$[B_{ip_n}(r\alpha_2)e^{in\theta}]^*$ 是（10-153）的解。

记 $\alpha_1 = \sqrt{\lambda_n^{(j_1)}}$，$\alpha_2 = \sqrt{\lambda_n^{(j_2)}}$，$\alpha_1 \neq \alpha_2$，这样可得

$$B_{ip_n}(\alpha_1 r_1) = B_{ip_n}(\alpha_1 r_2) = B_{ip_n}(\alpha_2 r_1) = B_{ip_n}(\alpha_2 r_2) = 0$$

$$[B_{ip_n}(\alpha_1 r_1)]^* = [B_{ip_n}(\alpha_1 r_2)]^* = [B_{ip_n}(\alpha_2 r_1)]^* = [B_{ip_n}(\alpha_2 r_2)]^* = 0$$

记 $B_{ip_n}(\alpha_1 r)$ 为 $F_1(x)$，$B_{ip_n}(\alpha_2 r)$ 为 $F_2(x)$。这样可得

$$e^{in\theta}[\frac{d}{dr}(r^2\frac{dF_1}{dr}) + 2inK_{12}r\frac{dF_1}{dr} - n^2K_{22}F_1 + inK_{12}F_1 + (\alpha_1)^2r^2F_1] = 0 \tag{10-154}$$

$$e^{-in\theta}[\frac{d}{dr}(r^2\frac{d(F_2)^*}{dr}) - 2inK_{12}r\frac{d(F_2)^*}{dr} - n^2K_{22}(F_2)^* - inK_{12}(F_2)^* + (\alpha_2)^2r^2(F_2)^*] = 0 \tag{10-155}$$

式（10-154）乘以 $-[B_{ip_n}(\alpha_2 r)e^{in\theta}]^*$，式（10-155）乘以 $B_{ip_n}(\alpha_1 r)e^{in\theta}$，所得两式相加后对 $r = r_1$ 到 $r = r_2$ 关于 r 进行积分可得

$$[(\alpha_1)^2 - (\alpha_2)^2]\int_{r_1}^{r_2} r^2 B_{ip_n}(\alpha_1 r)e^{in\theta}[B_{ip_n}(\alpha_2 r)e^{in\theta}]^* dr = 0$$

因为 $\alpha_1 \neq \alpha_2$，可得

$$\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} r^2 B_{ip_n}(\alpha_1 r)e^{in\theta}[B_{ip_n}(\alpha_2 r)e^{in\theta}]^* drd\theta = 0 \tag{10-156}$$

根据式（10-156），依据 Sturm-Liouville 理论，可得 $B_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})e^{in\theta}$ 系列在圆环域（$r_1 \leqslant r \leqslant r_2$，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$）关于权 r^2 正交。根据 Sturm－Liouville 理论和 $B_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})e^{in\theta}$ 正交性，可得以下定理，并给出函数展开为复数函数 $B_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})e^{in\theta}$ 的充分条件和计算公式。

复数球柱函数 $B_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})e^{in\theta}$ 圆环域展开定理

设 $\varphi(r,\theta)$ 在区域（$r_1 \leqslant r \leqslant r_2$，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$）是分片连续函数，这样 $\varphi(r,\theta)$ 可以展开为复数球柱函数级数

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} B_{1,n,0,j}B_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})e^{in\theta} + \sum_{j=1}^{\infty}C_j[j_0(r\sqrt{\lambda_0^{(j)}}) - \frac{j_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}})}{y_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}})}y_0(r\sqrt{\lambda_j^0})] \tag{10-157}$$

其中 $\lambda_n^{(j)}$ 是 $\begin{vmatrix} C_{ip_{1,n}}(x_1) & C_{ip_{2,n}}(x_1) \\ C_{ip_{1,n}}(x_2) & C_{ip_{2,n}}(x_2) \end{vmatrix} = 0$，当 $n \neq 0$ 零点。λ_j^0 为下式的根

$$\begin{vmatrix} j_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}}) & y_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}}) \\ j_0(r_2\sqrt{\lambda_0^{(j)}}) & y_0(r_2\sqrt{\lambda_0^{(j)}}) \end{vmatrix} = 0$$

若 $\varphi(r,\theta)$ 是函数关于 r 的 $f(r)$ 和关于 (r,θ) 的函数 $\varphi_1(r,\theta)$ 之和，即

$$\varphi(r,\theta) = f(r) + \varphi_1(r,\theta) \tag{10-158}$$

那么级数常数可以由下式确定

$$B_{1,n,0,j} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} r^2\varphi_1(r,\theta)\left[B_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})e^{in\theta}\right]^* \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{[N_{n,l}^{(j)}]} \tag{10-159}$$

$$[N_{n,l}^{(j)}] = \int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\left[B_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})e^{in\theta}\right]^* B_{ip_n}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})e^{in\theta}r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \tag{10-160}$$

$$C_j = \frac{\int_{r_1}^{r_2} f(r)\left[j_0(r\sqrt{\lambda_0^{(j)}}) - \frac{j_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}})}{y_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}})}\dot{y}_0(r\sqrt{\lambda_j^0})\right]r^2\mathrm{d}r}{\int_{r_1}^{r_2}\left[j_0(r\sqrt{\lambda_0^{(j)}}) - \frac{j_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}})}{y_0(r_1\sqrt{\lambda_0^{(j)}})}y_0(r\sqrt{\lambda_j^0})\right]^2 r^2\mathrm{d}r} \tag{10-161}$$

式（10-157）可被称为 $\varphi(r,\theta)$ 的复数球柱环函数圆环域展开式。对于圆环域（$r_1 \leqslant r \leqslant r_2$，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$）任一点，$\varphi(r,\theta)$ 连续，那么该复数球柱环函数收敛到 $\varphi(r,\theta)$。

10.10　具有第二、三类边界条件的各向异性圆环薄板非稳态热传导

对于内外径都是第三类边界条件的空心圆环薄板边界条件为

$$\begin{cases} q_r|_{r=r_1} = \left[-\left(k_{11}\dfrac{\partial T}{\partial r} + k_{12}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T}{\partial\theta}\right) + h_{m_1}T\right]\Big|_{r=r_1} = 0 \\ q_r|_{r=r_2} = \left[-\left(k_{11}\dfrac{\partial T}{\partial r} + k_{12}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T}{\partial\theta}\right) + h_{m_2}T\right]\Big|r = r_2 = 0 \end{cases} \tag{10-162}$$

其中 h_{m_1}，h_{m_2} 分别为 $r = r_1$，$r = r_2$ 边界为材料与外界环境的热交换系数。令 $h_{m_1} = 0$，$h_{m_2} = 0$，式（10-162）退化为第二类边界条件。

考虑变换 $x = r\sqrt{\lambda}$，式（10-162）可改写为

$$\begin{cases} \left(xK_{11}\dfrac{\partial T}{\partial x} + K_{12}\dfrac{\partial T}{\partial\theta}\right) - H_{m_1}T)\Big|_{x=x_1} = 0 \\ \left(xK_{11}\dfrac{\partial T}{\partial x} + K_{12}\dfrac{\partial T}{\partial\theta}\right) - H_{m_2}T)\Big|_{x=x_2} = 0 \end{cases} \tag{10-163}$$

其中 $x_1 = r_1\sqrt{\lambda}, x_2 = r_2\sqrt{\lambda}$，$H_{m_1} = \dfrac{r_1 h_{m_1}}{k_{11}}, H_{m_2} = \dfrac{r_2 h_{m_2}}{k_{11}}$。

方程（10-8）的解为

$$u_n = A_{1,n,0}e^{in\theta}C_{ip_{1,n}}(x) + A_{2,n,0}e^{in\theta}C_{ip_{2,n}}(x) \tag{10-164}$$

将式（10-164）代入式（10-163），根据待定系数 $A_{1,n,0}$、$A_{2,n,0}$ 不全为 0 的条件，可

得特征行列式

$$\begin{vmatrix} [x\dfrac{\partial[C_{ip_{1,n}}(x)]}{\partial x}+\mathrm{i}nK_{12}C_{ip_{1,n}}(x)-H_{m_1}C_{ip_{1,n}}(x)]\mid_{x=x_1} & [x\dfrac{\partial[C_{ip_{2,n}}(x)]}{\partial x}+\mathrm{i}nK_{12}C_{ip_{2,n}}(x)-H_{m_1}C_{ip_{2,n}}(x)]\mid_{x=x_1} \\ [x\dfrac{\partial[C_{ip_{1,n}}(x)]}{\partial x}+\mathrm{i}nK_{12}C_{ip_{1,n}}(x)-H_{m_2}C_{ip_{1,n}}(x)]\mid_{x=x_2} & [x\dfrac{\partial[C_{ip_{2,n}}(x)]}{\partial x}+\mathrm{i}nK_{12}C_{ip_{2,n}}(x)-H_{m_2}C_{ip_{2,n}}(x)]\mid_{x=x_2} \end{vmatrix}=0$$

(10 - 165)

求解式（10 - 165）可以确定特征值 $\lambda_n^{(j)}$ 。根据式（10 - 165），可得

$$A_{2,n,0,j}=-A_{1,n,0,j}\frac{[x\dfrac{\partial[C_{ip_{1,n}}(x)]}{\partial x}+\mathrm{i}nK_{12}C_{ip_{1,n}}(x)-H_{m_1}C_{ip_{1,n}}(x)]\mid_{x=r_1\sqrt{\lambda_n^{(j)}}}}{[x\dfrac{\partial[C_{ip_{2,n}}(x)]}{\partial x}+\mathrm{i}nK_{12}C_{ip_{2,n}}(x)-H_{m_1}C_{ip_{2,n}}(x)]\mid_{x=r_1\sqrt{\lambda_n^{(j)}}}}$$

(10 - 166)

定义 $\Pi=\dfrac{[x\dfrac{\partial[C_{ip_{1,n}}(x)]}{\partial x}+\mathrm{i}nK_{12}C_{ip_{1,n}}(x)-H_{m_1}C_{ip_{1,n}}(x)]\mid_{x=r_1\sqrt{\lambda_n^{(j)}}}}{[x\dfrac{\partial[C_{ip_{2,n}}(x)]}{\partial x}+\mathrm{i}nK_{12}C_{ip_{2,n}}(x)-H_{m_1}C_{ip_{2,n}}(x)]\mid_{x=r_1\sqrt{\lambda_n^{(j)}}}}$

特征函数

$$u_{n,j}(x,\theta)=A_{1,n,0,j}[C_{ip_{1,n}}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})-\Pi C_{ip_{2,n}}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})]\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \tag{10 - 167}$$

$$T(r,\theta,t)=\sum_{n=-\infty,n\neq0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(A_{1,n,0,j,r}+\mathrm{i}A_{1,n,0,j,i})[C_{ip_{1,n}}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})-\Pi C_{ip_{2,n}}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})]\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}e^{-\lambda_n^{(j)}at}+T(r,t)$$

(10 - 168)

式中 $A_{1,n,0,j}=A_{1,n,0,j,r}+\mathrm{i}A_{1,n,0,j,i}$ 。$T(r,t)$ 为中心对称的球贝塞尔函数解，读者可自行求得。

将 $t=0$ 代入式（10 - 168），再根据初始条件可得

$$\sum_{n=-\infty,n\neq0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(A_{1,n,0,j,r}+\mathrm{i}A_{1,n,0,j,i})[C_{ip_{1,n}}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})-\Pi C_{ip_{2,n}}(r\sqrt{\lambda_n^{(j)}})]\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}+T(r,0)=\varphi(r,\theta)$$

(10 - 169)

求解式（10 - 169）可得 $A_{l,n,0,j,r},A_{l,n,0,j,i},1\leqslant j\leqslant J,0\leqslant n\leqslant N$ 。

第 11 章　各向异性圆柱薄壳稳态热传导方程——一般复数柱面函数

圆柱壳是常见的结构单位。以柱坐标 (r,θ,z) 分析圆柱壳问题自然是方便的。圆柱壳内物理场求解是重要的理论和工程问题。对于薄圆柱壳，很多情况下可忽略壁厚方向的物理量变化，这样物理场问题控制偏微分方程只有 (θ,z)，研究区域就定义在（$z_1 \leqslant z \leqslant z_2$，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$），这样求解就方便得多。复合材料等各向异性材料来说，其材料上的各向异性反映在控制偏微分方程中就出现了奇次交叉偏导数，求解需要新的方法。本章采用复变分离变量法，引入一般复数柱面函数，以求解柱面内各向异性的热传导稳态偏微分方程的边值问题。

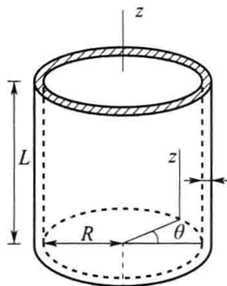


图 11-1　柱坐标及圆柱壳

11.1　各向异性圆柱薄壳稳态热传导求解和一般复数柱面函数

考虑各向异性圆柱薄壳，圆柱半径为 R，圆柱体高度为 L，在圆柱边界（$z_1=0, z_2=L$）与外界进行热交换，柱壳面与外界环境绝热，这样圆柱体温度场分布与 (θ,z) 有关。柱坐标下稳态热传导控制偏微分方程为

$$k_{22}\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}+k_{33}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+2k_{23}\frac{1}{R}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta \partial z}=q \tag{11-1}$$

其中 $T(\theta,z)$ 为柱壳温度分布函数，q 是热源函数。$k_{jk}(j,k=2,3)$ 中的下标 2 代表切向 θ（$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$）方向，下标 3 代表 z 方向（$0 \leqslant z \leqslant L$），$k_{jk}(j,k=2,3)$ 为热传导系数。

$$k_{22}=k_2\cos^2\beta+k_3\sin^2\beta$$

$$k_{23}=(k_2-k_3)\sin\beta\cos\beta$$

$$k_{33}=k_2\sin^2\beta+k_3\cos^2\beta$$

式中 k_2、k_3 为切向 θ 方向、z 方向主热传导系数，β 为平行于 z 轴柱面内的最大热传导方向与 z 向母线的夹角。

引入参数变换

$$K_{33}=1, K_{23}=\frac{k_{23}}{Rk_{33}}, K_{22}=\frac{k_{22}}{R^2 k_{33}}, q*=\frac{q}{k_{33}} \tag{11-2}$$

由此可得

$$K_{22}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+2K_{23}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta \partial z}=q* \tag{11-3}$$

11.1.1　齐次解

设方程（11-3）有解

$$T=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \tag{11-4}$$

其中 $\mathrm{i}^2=-1$；n 为整数。

$n=0$ 的方程（11-3）简化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}z^2}=0 \tag{11-5}$$

由此，可得如下解

$$T*=c_0+d_0 z \tag{11-6}$$

其中 c_0, d_0 为待定实数常数。

当 $n\neq 0$，设

$$f_n(x)=A_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}snz} \tag{11-7}$$

其中 s 为特征根，A_n 为复数。

结合式（11-4）和（11-7）可得

$$T=\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}snz}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \tag{11-8}$$

式中 $n\neq 0$。

式（11-8）为新的复数函数。

定义：一般复数柱面函数 $M_{is}(z,\theta)$

$$M_{is}(z,\theta)=e^{\mathrm{i}snz}e^{\mathrm{i}n\theta} \tag{11-9}$$

研究表明：变形复数柱面函数 $M_{is}(z,\theta)$ 是求解圆柱壳内数学物理问题的基本函数。

根据数学物理实数化原理：如果复变函数是实际物理问题的解，那么该复变函数的虚部应为 0，即可化简为实数函数。可以简单地证明：

当 $n\neq 0$，如果 $T=\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}snz}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ 为实数，那么 $T=2\mathrm{Re}(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}snz}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta})$。

将式（11-8）代入方程（11-3），化简可得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}snz}[-A_n n^2(s^2+2K_{23}s+K_{22})]=0 \tag{11-10}$$

式中 $A_n\neq 0$。

根据方程（11-10）可得

$$s^2+2K_{23}s+K_{22}=0 \tag{11-11}$$

求解方程（11－11）可得

$$\begin{cases} s_1 = -K_{23} + \mathrm{i}\sqrt{K_{22} - (K_{23})^2} = a_1 + \mathrm{i}b_1 \\ s_2 = -K_{23} - \mathrm{i}\sqrt{K_{22} - (K_{23})^2} = a_1 - \mathrm{i}b_1 \end{cases} \tag{11-12}$$

其中 $a_1 = -K_{23}, b_1 = \sqrt{K_{22} - (K_{23})^2}$ 。

这样方程（11－3）解为

$$T = \sum_{n=1}^{\infty}[A_{1,n,r}\mathrm{e}^{-b_1 nz}\cos n(\theta + a_1 z) - A_{1,n,i}\mathrm{e}^{-b_1 nz}\sin n(\theta + a_1 z) + A_{2,n,r}\mathrm{e}^{b_1 nz}\cos n(\theta + a_1 z) - A_{2,n,i}\mathrm{e}^{b_1 nz}\sin n(\theta + a_1 z)] \tag{11-13}$$

其中

$$A_{1,n} = A_{1,n,r} + \mathrm{i}A_{1,n,i}$$

$$A_{2,n} = A_{2,n,r} + \mathrm{i}A_{2,n,i}$$

式中 $A_{1,n,r}, A_{1,n,i}, A_{2,n,r}, A_{2,n,i}$ 为实数。

根据线性偏微分方程的可叠加性原理，方程（11－3）一般解析解为

$$T = \sum_{n=1}^{\infty}[B_{1,n}\mathrm{e}^{-b_1 nz}\cos n(\theta + a_1 z) + B_{2,n}\mathrm{e}^{-b_1 nz}\sin n(\theta + a_1 z) + B_{3,n}\mathrm{e}^{b_1 nz}\cos n(\theta + a_1 z) + B_{4,n}\mathrm{e}^{b_1 nz}\sin n(\theta + a_1 z)] + c_0 + d_0 z + T_0 \tag{11-14}$$

式中 $B_{l,n}(l = 1,2,3,4; n = 1,\cdots,\infty), c_0, d_0$ 为实数常数；T_0 为方程（11－3）特解。

对于有限长（L）的圆柱壳，采用适当变换后，式（11－14）可改写为

$$T = \sum_{n=1}^{\infty}\{C_{1,n}\frac{\sinh(b_1 nz)}{\sinh(b_1 nL)}\cos n[(2\pi - \theta) + a_1(L - z)] + C_{2,n}\frac{\sinh b_1 n(L - z)}{\sinh(b_1 nL)}\cos n(\theta + a_1 z) + C_{3,n}\frac{\sinh(b_1 nz)}{\sinh(b_1 nL)}\sin n[(2\pi - \theta) + a_1(L - z)] + C_{4,n}\frac{\sinh b_1 n(L - z)}{\sinh(b_1 nL)}\sin n(\theta + a_1 z)\} + e_0\frac{z}{L} + f_0\frac{(L - z)}{L} + T_0 \tag{11-15}$$

11.1.2 求解程序

将式（11－14）或（11－15）代入圆柱壳 z 方向的两个边界条件，将所得两个方程左右两式展开为关于 θ 的傅立叶级数，即可确定待定常数。问题得解。

对于半无限长的圆柱壳，只能采用式（11－14）求解，根据温度有限性自然条件，可以消减一半待定常数，进而确定全部待定常数。

作为一个作业，考虑各向同性圆柱壳热传导问题

$$k_{33} = k_{22} = k, k_{23} = 0 \tag{11-16}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = q* \tag{11-17}$$

对于方程（11－17），根据式（11－12）可得

$$\begin{cases} s_1 = \mathrm{i} \\ s_2 = -\mathrm{i} \end{cases} \tag{11-18}$$

式（11－17）可写为

$$T = \sum_{n=1}^{\infty}[A_{1,n}\mathrm{e}^{-nz}\cos n\theta + A_{2,n}\mathrm{e}^{-nz}\sin n\theta + A_{3,n}\mathrm{e}^{nz}\cos n\theta + A_{4,n}\mathrm{e}^{nz}\sin n\theta] + c_0 + d_0 z + T_0 \tag{11-19}$$

11.1.3　数值实验

考虑各向异性圆柱壳，热传导系数 $k_1 = 0.30\mathrm{kcal/(m \cdot h \cdot ℃)}$，$k_2 = 0.11\mathrm{kcal/(m \cdot h \cdot ℃)}$，$h = 0.01\mathrm{m}$，$R=1\mathrm{m}$，$L=5\mathrm{m}$，$q=0$。柱体上端面（$z_2 = 5\mathrm{m}$）温度分布为（$4\sin\theta + 3\cos\theta + 6$）℃，柱体下端面（$z_1 = 0.0\mathrm{m}$）温度分布为（$2\sin\theta + \cos\theta + 5$）℃。

（1）特征根分布情况

根据式（11－12），可以确定特征根 s_1 和 s_2。计算结果在表 11－1。

表 11－1 s_1，s_2

s \ β	10°	45°	90°
s_1	1.651445647689541i	−4.634146341463415E−001+8.861415670529246E−001i	6.055300708194984E−001i
s_2	−1.651445647689541i	−4.634146341463415E−001−8.861415670529246E−001i	−6.055300708194984E−001i

其他计算也表明，特征根 s_1，s_2 均为复数根。

（2）各向异性圆柱壳温度场分布情况

计算参数同上节。计算时改变各向异性角 β，观察壳体温度场变化情况。θ 单位为（°），z 为 m。

表 11－2　$T(\theta,z)$（℃），$\beta = 0°$

z \ θ	0	45	90	135	180	225	270	315
0.0	6.000	7.121	7.000	5.707	4.000	2.879	3.000	4.293
1.0	5.293	5.588	5.656	5.456	5.107	4.812	4.744	4.944
2.0	5.435	5.496	5.500	5.446	5.365	5.304	5.300	5354
3.0	5.795	5.806	5.696	5.530	5.405	5.394	5.504	5670
4.0	6.628	6.831	6.430	5.660	4.972	4.769	5.170	5.940
5.0	9.000	10.950	10.000	6.707	3.000	1.050	2.000	5.293

表 11-3　$T(\theta,z)$ (℃)，$\beta=45°$

z \ θ	0	45	90	135	180	225	270	315
0.0	6.000	7.121	7.000	5.707	4.000	2.879	3.000	4.293
10	5.272	5.835	6.025	5.733	5.128	4.565	4.375	4.667
20	5.535	5.628	5.586	5.436	5.265	5.172	5.214	5.364
30	6.324	6.177	5.692	5.153	4.876	5.023	5.508	6.047
40	6.900	6.790	6.041	5.093	4.500	4.610	5.359	6.307
50	9.000	10.950	10.000	6.707	3.000	10.500	2.000	5.293

表 11-4　$T(\theta,z)$ (℃)，$\beta=90°$

z \ θ	0	45	90	135	180	225	270	315
00	6.000	7.121	7.000	5.707	4.000	2.879	3.000	4.293
10	5.930	6.660	6.535	5.628	4.470	3.740	3.865	4.772
20	6.136	6.752	6.575	5.711	4.664	4.048	4.225	5.089
30	6.621	7.354	7.060	5.911	4.579	3.846	4.140	5.289
40	7.491	8.619	8.096	6.228	4.109	2.981	3.504	5.372
50	9.000	10.950	10.000	6.707	3.000	10.500	2.000	5.293

计算表明，各向异性对温度场有显著的影响，需要根据具体情况具体研究。

11.2 柱面与环境换热的各向异性圆柱薄壳稳态热传导问题解

考虑各向异性圆柱薄壳，圆柱半径为 R，圆柱体高度为 L，在圆柱边界（$z_1=0, z_2=L$）与外界进行热交换，柱面与外界环境热交换，这样圆柱体温度场分布与 (θ,z) 有关。柱坐标下稳态热传导控制偏微分方程为

$$k_{22}\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}+k_{33}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+2k_{23}\frac{1}{R}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta\partial z}-2\frac{h_a}{\delta}(T-T_a)=q \qquad (11-20)$$

其中 $T(\theta,z)$ 为柱壳温度分布函数，q 是热源函数。δ 为圆柱壳厚度，h_a 为柱壳与外界环境热交换系数，T_a 为外界环境温度。$k_{jk}(j,k=2,3)$ 中的下标 2 代表切向 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 方向，下标 3 代表 z 方向（$0\leqslant z\leqslant L$）。

引入参数变换

$$K_{33}=1, K_{23}=\frac{k_{23}}{Rk_{33}}, K_{22}=\frac{k_{22}}{R^2k_{33}}, \lambda=-2\frac{h_a}{\delta k_{33}}, q*=\frac{q}{k_{33}}-2T_a\frac{h_a}{\delta k_{33}} \qquad (11-21)$$

由此可得

$$K_{22}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+2K_{23}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta\partial z}+\lambda T=q* \qquad (11-22)$$

11.2.1　齐次解

设方程（11-22）有解

$$T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(z) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \tag{11-23}$$

其中 $\mathrm{i}^2 = -1$；n 为整数。

$n=0$ 的方程（11-22）可简化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}z^2} + \lambda T = 0 \tag{11-24}$$

由此，可得如下解

$$T * = c_0 e^{-z\sqrt{-\lambda}} + d_0 e^{z\sqrt{-\lambda}} \tag{11-25}$$

其中 c_0, d_0 为待定实数常数。

当 $n \neq 0$，设

$$f_n(x) = A_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}snz} \tag{11-26}$$

其中 s 为特征根。A_n 为虚数。

结合式（11-23）和（11-26）可得

$$T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}snz} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \tag{11-27}$$

式中 $n \neq 0$。

将式（11-27）代入方程（11-22）化简可得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}snz} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} A_n [-n^2(s^2 + 2K_{23}s + K_{22}) + \lambda] = 0 \tag{11-28}$$

式中 $A_n \neq 0$。

根据方程（11-28）可得

$$-n^2(s^2 + 2K_{23}s + K_{22}) + \lambda = 0 \tag{11-29}$$

求解方程（11-29）可得

$$s_1 = -K_{23} + \mathrm{i}\sqrt{-K_{23}^2 + K_{22} - \frac{\lambda}{n^2}} = a_1 + \mathrm{i}b_1 \tag{11-30}$$

$$s_2 = -K_{23} - \mathrm{i}\sqrt{-K_{23}^2 + K_{22} - \frac{\lambda}{n^2}} = a_1 - \mathrm{i}b_1 \tag{11-31}$$

其中 $a_1 = -K_{23}, b_1 = \sqrt{-K_{23}^2 + K_{22} - \frac{\lambda}{n^2}}$。

方程（11-22）解如下

$$\begin{aligned} T = \sum_{n=1}^{\infty} [&A_{1,n,r}\mathrm{e}^{-b_1 nz}\cos n(\theta + a_1 z) - A_{1,n,i}\mathrm{e}^{-b_1 nz}\sin n(\theta + a_1 z) + \\ &A_{2,n,r}\mathrm{e}^{b_1 nz}\cos n(\theta + a_1 z) - A_{2,n,i}\mathrm{e}^{b_1 nz}\sin n(\theta + a_1 z)] \end{aligned} \tag{11-32}$$

其中

$$A_{1,n} = A_{1,n,r} + \mathrm{i}A_{1,n,i}$$

$$A_{2,n} = A_{2,n,r} + \mathrm{i}A_{2,n,i}$$

式中 $A_{1,n,r}, A_{1,n,i}, A_{2,n,r}, A_{2,n,i}$ 为实数。

根据线性偏微分方程的可叠加性原理，方程（11－22）一般解析解为

$$T = \sum_{n=1}^{\infty}[B_{1,n}e^{-b_1 nz}\cos n(\theta + a_1 z) + B_{2,n}e^{-b_1 nz}\sin n(\theta + a_1 z) + B_{3,n}e^{b_1 nz}\cos n(\theta + a_1 z) + B_{4,n}e^{b_1 nz}\sin n(\theta + a_1 z)] + c_1 e^{-z\sqrt{-\lambda}} + c_2 e^{z\sqrt{-\lambda}} + T_0 \tag{11-33}$$

式中 $B_{l,n}(l = 1,2,3,4; n = 1,\cdots,\infty), c_1, c_2$ 为实数常数；T_0 为方程（11－20）特解。

对于有限长（L）的圆柱壳，采用变换后，式（11－33）改写为

$$T = \sum_{n=1}^{\infty}\{C_{1,n}\frac{\sinh(b_1 nz)}{\sinh(b_1 nL)}\cos n[2\pi - \theta + a_1(L-z)] + C_{2,n}\frac{\sinh[b_1 n(L-z)]}{\sinh(b_1 nL)}\cos n(\theta + a_1 z) + C_{3,n}\frac{\sinh(b_1 nz)}{\sinh(b_1 nL)}\sin n[2\pi - \theta + a_1(L-z)] + C_{4,n}\frac{\sinh[b_1 n(L-z)]}{\sinh(b_1 nL)}\sin n(\theta + a_1 z)\} + d_1\frac{\sinh(\sqrt{-\lambda}z)}{\sinh(\sqrt{-\lambda}L)} + d_2\frac{\sinh[\sqrt{-\lambda}(L-z)]}{\sinh(\sqrt{-\lambda}L)} + T_0 \tag{11-34}$$

11.2.2 求解程序

将式（11－33）或式（11－34）代入圆柱壳 z 方向的两个边界条件，将所得两个方程左右两式展开为关于 θ 的傅立叶级数，即可确定待定常数。问题得解。

对于半无限长的圆柱壳，只能采用式（11－33）求解，根据温度有限性自然条件，可以消减一半待定常数，进而确定全部待定常数。

作为一个作业，考虑柱面换热的各向同性圆柱壳热传导问题

$$k_{33} = k_{22} = k, k_{23} = 0 \tag{11-35}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \lambda T = q* \tag{11-36}$$

方程（11－36）有特征根

$$s_1 = \mathrm{i}\sqrt{1 - \frac{\lambda}{n^2}}, \quad s_2 = -\mathrm{i}\sqrt{1 - \frac{\lambda}{n^2}} \tag{11-37}$$

其中 $b_1 = \sqrt{1 - \frac{\lambda}{n^2}}$。

将式（11－37）代入式（11－33）可得各向同性圆柱壳热传导问题一般解析解如下

$$T = \sum_{n=1}^{\infty}[B_{1,n}\mathrm{e}^{-nb_1 z}\cos n\theta + B_{2,n}\mathrm{e}^{-nb_1 z}\sin n\theta + B_{3,n}\mathrm{e}^{nb_1 z}\cos n\theta + B_{4,n}\mathrm{e}^{nb_1 z}\sin n\theta] + c_1 e^{-z\sqrt{-\lambda}} + c_2 e^{z\sqrt{-\lambda}} + T_0 \tag{11-38}$$

11.2.3 数值实验

考虑柱面与外界环境换热的各向异性圆柱壳，材料的热传导系数为 $k_1 = 0.30$kcal/(m·h·℃)，$k_2 = 0.11$kcal/(m·h·℃)，$h_a = 0.05$kcal/(m^2·h·℃)，$\delta = 0.01$m，$R=1$m，$L=5$m，$q=0$，$T_a = 0$。柱体上端面（$z_2 = 5$m）温度分布为 $(4\sin\theta + 3\cos\theta + 6)$℃，柱体下端面（$z_1 = 0.0$m）温度分布为 $(2\sin\theta + \cos\theta + 5)$℃。

（1）特征根分布情况

根据式（11-30）和（11-31），可以确定特征根 s_1 和 s_2。计算结果在表 11-5。

表 11-5　s_1，s_2

s \ β	10°	45°	90°
$s_1(n=1)$	9.676588429625580i	−4.634146341463415E−001+7.040293650249048i	5.805170109479997i
$s_2(n=1)$	−9.676588429625580i	−4.634146341463415E−001−7.040293650249048i	−5.805170109479997i
$s_1(n=2)$	5.045249791095130i	−4.634146341463415E−001+3.602827893208129i	2.949576240750525i
$s_2(n=2)$	−5.045249791095130i	−4.634146341463415E−001−3.602827893208129 i	−2.949576240750525i
$s_1(n=3)$	3.581659228386032i	−4.634146341463415E−001+2.491044174116754i	2.017515890983358i
$s_2(n=3)$	−3.581659228386032i	−4.634146341463415E−001−2.491044174116754i	−2.017515890983358i

其他计算也表明，特征根 s_1，s_2 均为复数根。

（2）各向异性圆柱壳温度场分布情况

计算参数同上节。计算时改变各向异性角 β，观察壳体温度场变化情况。计算结果见表 11-6～表 11-8。θ 单位为（°），z 为 m。

表 11-6　$T(\theta,z)$（℃），$\beta = 0°$

z \ θ	0	45	90	180	225	315
0.0	0.6000E+01	0.7121E+01	0.7000E+01	0.4000E+01	0.2879E+01	0.4293E+01
0.05	0.5044E−01	0.5932E−01	0.5836E−01	0.3460E−01	0.2571E−01	0.3692E−01
1.0	0.4243E−03	0.4946E−03	0.4870E−03	0.2988E−03	0.2284E−03	0.3172E−03
2.5	0.6137E−09	0.7094E−09	0.6760E−09	0.3643E−09	0.2686E−09	0.4449E−09
4.0	0.6220E−03	0.7443E−03	0.6848E−03	0.2456E−03	0.1233E−03	0.3895E−03
4.5	0.7478E−01	0.9022E−01	0.8270E−01	0.2726E−01	0.1181E−01	0.4542E−01
5.0	0.9000E+01	0.1095E+02	0.1000E+02	0.3000E+01	0.1050E+01	0.5293E+01

表 11－7　$T(\theta,z)$ (℃)，$\beta=45°$

z \ θ	0	45	90	180	225	315
0.0	0.6000E+01	0.7121E+01	0.7000E+01	0.4000E+01	0.2879E+01	0.4293E+01
0.05	0.1674E+00	0.2085E+00	0.2166E+00	0.1370E+00	0.9588E−01	0.1174E+00
1.0	0.4632E−02	0.6017E−02	0.6590E−02	0.4631E−02	0.3246E−02	0.5200E+01
2.0	0.3532E−05	0.4839E−05	0.5828E−05	0.5058E−05	0.3751E−05	0.2671E−05
2.5	0.3653E−06	0.3516E−06	0.3002E−06	0.2093E−06	0.2229E−06	0.3332E−06
4.0	0.9474E−02	0.9713E−02	0.7517E−02	0.1641E−02	0.1403E−02	0.6942E−02
4.5	0.2962E+00	0.3300E+00	0.2774E+00	0.6901E−01	0.3523E−01	0.1959E+00
5.0	0.9000E+01	0.1095E+02	0.1000E+02	0.3000E+01	0.1050E+01	0.5293E+01

表 11－8　$T(\theta,z)$ (℃)，$\beta=90°$

z \ θ	0	45	90	180	225	315
0.0	0.6000E+01	0.7121E+01	0.7000E+01	0.4000E+01	0.2879E+01	0.4293E+01
0.05	0.3337E+00	0.3952E+00	0.3885E+00	0.2239E+00	0.1624E+00	0.2400E+00
1.0	0.1856E−01	0.2193E−01	0.2157E−01	0.1253E−01	0.9155E−02	0.1341E−01
2.5	0.7919E−05	0.9448E−05	0.8915E−05	0.3936E−05	0.2407E−05	0.5224E−05
4.0	0.2769E−01	0.3356E−01	0.3070E−01	0.9617E−02	0.3745E−02	0.1652E−01
4.5	0.4992E+00	0.6062E+00	0.5541E+00	0.1699E+00	0.6289E−01	0.2957E+00
5.0	0.9000E+01	0.1095E+02	0.1000E+02	0.3000E+01	0.1050E+01	0.5293E+01

表 11－6～11－8 表表明：本文解满足边界条件。各向异性角改变，柱壳内温度分布变化明显，各向异性明显。圆柱壳中间部分温度明显低于边界温度值，这是与本节设定的温度边值条件决定的，也和物理常识一致，这表明所得解析解是正确的。

第 12 章　各向异性圆柱薄壳非稳态热传导——参数复数柱面多项式与参数复数柱面函数

圆柱壳是常见的结构单位，由于几何上相似性，柱坐标 (r,θ,z) 分析圆柱壳问题比较方便。圆柱壳内非稳态物理场求解是典型数学物理问题。在第 11 章基础上，本章采用一般复数柱面函数思想求解，引入了参数复数柱面函数，求解柱面内各向异性的热传导非稳态偏微分方程的初始边值问题。

12.1　各向异性圆柱薄壳非稳态热传导控制方程求解

考虑各向异性圆柱薄壳，圆柱半径为 R，圆柱体高度为 L，在圆柱边界 $(z_1 \leqslant z \leqslant z_2)$ 与外界进行热交换，柱面与外界环境换热，这样圆柱体温度场分布与 (θ,z) 有关。柱坐标下非稳态热传导控制偏微分方程为

$$k_{22}\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}+k_{33}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+2k_{23}\frac{1}{R}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta \partial z}+q-2\frac{h_a}{\delta}(T-T_a)=\rho C_p\frac{\partial T}{\partial t} \quad (12-1)$$

式中　$T(\theta,z,t)$——柱体温度分布函数；

q——热源函数；

ρ——密度；

C_p——材料比热；

δ——圆柱壳厚度；

h_a——柱壳与外界环境热交换系数；

T_a——外界环境温度。

圆柱壳一种边界条件为

$$z_1=0, T(0,\theta,t)=0; z_2=L, T(L,\theta,t)=0 \quad (12-2a)$$

圆柱壳另一种边界条件为

$$z_1=0, T(z,\theta,t)=0; z_2=L, q_z=-\left(k_{23}\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}+k_{33}\frac{\partial T}{\partial z}\right)=0 \quad (12-2b)$$

圆柱壳初始条件为

$$T(z,\theta,0)=\varphi(z,\theta) \quad (12-3)$$

设方程（12－1）有解

$$T(z,\theta,t)=u(z,\theta)\Gamma(t) \quad (12-4)$$

下面假设壳体没有热源。如有热源，可以求得控制方程特解，叠加在一般解析解中一并求解处理。

将式（12－4）代入方程（12－1）分离变量可得

$$\frac{\frac{\partial \Gamma}{\partial t}}{\alpha \Gamma} = \frac{\left(k_{22}\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + k_{33}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2k_{23}\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial z} - 2\frac{h_a}{\delta}u\right)\frac{1}{k_{33}}}{u} = -\lambda \tag{12-5}$$

式中 $\lambda > 0$，λ 为分离常数。$\alpha = \frac{k_{33}}{\rho c_p}$。

这样可得

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \alpha\lambda\Gamma = 0 \tag{12-6}$$

$$K_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2K_{23}\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \theta} + \left(\lambda - 2\frac{h_a}{\delta}\frac{1}{k_{33}}\right)u = 0 \tag{12-7}$$

其中 $K_{33} = 1, K_{23} = \frac{k_{23}}{Rk_{33}}, K_{22} = \frac{k_{22}}{R^2 k_{33}}$。

根据方程（12-6）可得

$$\Gamma(t) = A e^{-\lambda a t} \tag{12-8}$$

根据式（12-4），式（12-2a）可写为

$$z_1 = 0, u(x,\theta) = 0; z_2 = L, u(x,\theta) = 0 \tag{12-9}$$

设

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{isnz} e^{in\theta} \tag{12-10}$$

将式（12-10）代入方程（12-7），可得特征方程

$$-n^2 K_{22} - n^2 s^2 - 2K_{23} n^2 s + \left(\lambda - 2\frac{h_a}{\delta}\frac{1}{k_{33}}\right) = 0 \tag{12-11}$$

特征根 $s_{l,n}$

$$\begin{cases} s_1 = -K_{23} + \sqrt{K_{23}^2 - K_{22} + \left(\lambda - 2\frac{h_a}{\delta}\frac{1}{k_{33}}\right)\frac{1}{n^2}} \\ s_2 = -K_{23} - \sqrt{K_{23}^2 - K_{22} + \left(\lambda - 2\frac{h_a}{\delta}\frac{1}{k_{33}}\right)\frac{1}{n^2}} \end{cases} \tag{12-12}$$

根据边界条件可以确定特征根。下面分情况讨论：

1）如 $K_{23}^2 - K_{22} + \left(\lambda - 2\frac{h_a}{\delta}\frac{1}{k_{33}}\right)\frac{1}{n^2} < 0$，$s_{1,n}$ 和 $s_{2,n}$ 为复数根。因此，可记 $s_{1,n}$ 和 $s_{2,n}$ 如下

$$s_{1,n} = a_1 + ib_1, s_{2,n} = a_1 - ib_1 \tag{12-13}$$

根据式（12-13），可得方程（12-7）解为

$$\begin{aligned} u = {} & A_{1,n}e^{-b_1 nx}\cos n(\theta + a_1 x) + A_{2,n}e^{-b_1 nx}\sin n(\theta + a_1 x) + \\ & A_{3,n}e^{b_1 nx}\cos n(\theta + a_1 x) + A_{4,n}e^{b_1 nx}\sin n(\theta + a_1 x) \end{aligned} \tag{12-14}$$

将式（12-14）代入式（12-2a）可得

$A_{1,n} = A_{2,n} = A_{3,n} = A_{4,n} = 0$

2）如果 $K_{23}^2 - K_{22} + \left(\lambda - 2\frac{h_a}{\delta}\frac{1}{k_{33}}\right)\frac{1}{n^2} = 0$，$s_{1,n}, s_{2,n}$ 为实数。可得

$s_{1,n}=a_1$ ，$s_{2,n}=a_1$

采取类似步骤，这种情况只能有平凡解。

3）对于 $K_{23}^2-K_{22}+(\lambda-2\frac{h_a}{\delta}\frac{1}{k_{33}})\frac{1}{n^2}>0$ ，根据式（12-12），可得方程（12-7）的解为

$$u=\sum_{-\infty}^{\infty}(A_{1,n}e^{is_1nz}+A_{2,n}e^{is_2nz})e^{in\theta} \tag{12-15}$$

将式（12-15）代入式（12-9）可得

$$A_{1,n}=-A_{2,n} \tag{12-16}$$

和

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{is_1nL} & e^{is_2nL} \end{vmatrix}=0 \tag{12-17}$$

这样可得特征方程

$$e^{inL(s_2-s_1)}=1 \tag{12-18}$$

将式（12-12）代入式（12-18）可得

$$\lambda_{n,m}=(K_{22}-K_{23}^2)n^2+(\frac{m\pi}{L})^2n^2+2\frac{h_a}{\delta}\frac{1}{k_{33}} \tag{12-19}$$

其中 $m=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$，$n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$ 。

和

$$s_{1,n,m}=-K_{23}-\frac{m\pi}{L} \tag{12-20}$$

$$s_{2,n,m}=-K_{23}+\frac{m\pi}{L} \tag{12-21}$$

根据式（12-15）可得

$$u=\sum_{m=-\infty,m\neq0}^{\infty}\sum_{n=-\infty,n\neq0}^{\infty}A_{1,n,m}[e^{in(\theta+s_{1,n,m}z)}-e^{in(\theta+s_{2,n,m}z)}] \tag{12-22}$$

对于 $n=0$ 情况，方程（12-7）的解为

$$u_0=\sum_{m=1}^{\infty}[a_{1,m}\sin\sqrt{\lambda_0-2\frac{h_a}{\delta}\frac{1}{k_{33}}}z+a_{2,m}\cos\sqrt{\lambda_0-2\frac{h_a}{\delta}\frac{1}{k_{33}}}z] \tag{12-23}$$

对于边界条件（12-2a），根据式（12-23）非平凡解条件可得

$$\lambda_0-2\frac{h_a}{\delta}\frac{1}{k_{33}}=(\frac{m\pi}{L})^2 \tag{12-24}$$

和

$$a_{2,m}=0 \tag{12-25}$$

根据式（12-4）（12-8）（12-23）（12-24）和（12-25），可得一般解析解

$$T(z,\theta,t)=\sum_{m=-\infty,m\neq0}^{\infty}\sum_{n=-\infty,n\neq0}^{\infty}A_{1,n,m}e^{-\lambda_{n,m}at}[e^{in(\theta+s_{1,n,m}z)}-e^{in(\theta+s_{2,n,m}z)}]+\sum_{m=1}^{\infty}a_{1,m}e^{-(\lambda_0)^2at}\sin\frac{m\pi}{L}z \tag{12-26}$$

其中 $A_{1,n,m}=A_{1,n,m,r}+\mathrm{i}A_{1,n,m,i}$，$a_{1,m}$ 为待定常数。

12.2 有限长各向异性圆柱壳两端给定温度值的非稳态热传导解

对于边界条件（12-2a），将 $t=0$ 代入（12-26），再根据初始条件（12-3）可得

$$\sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty}\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}A_{1,n,m}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\theta+s_{1,n,m}z)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\theta+s_{2,n,m}z)}\right]+\sum_{m=1}^{\infty}a_{1,m}\sin\frac{m\pi}{L}z=\varphi(z,\theta) \tag{12-27}$$

求解式（12-27），可以确定 $A_{1,n,m}$ 和 $a_{1,m}$。

定义：第一类参数复数柱面多项式 $\hat{O}_{s_{n,m}}(z)$ 和第一类参数复数柱面函数 $\hat{O}_{s_{n,m}}(z,\theta)$

$$\hat{O}_{s_{n,m}}(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}nzs_{1,n,m}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}nzs_{2,n,m}} \tag{12-28}$$

$$\hat{O}_{s_{n,m}}(z,\theta)=\hat{O}_{s_{n,m}}(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \tag{12-29}$$

本章12.4节给出证明：如 $\varphi(z,\theta)$ 为在柱面上分段光滑函数，那么 $\varphi(z,\theta)$ 可以展开为二维复数级数

$$\varphi(z,\theta)=\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty}B_{1,n,m}\hat{O}_{s_{n,m}}(z,\theta)+\sum_{m=1}^{\infty}b_{1,m}\sin\frac{m\pi}{L}z \tag{12-30}$$

其中 $B_{1,n,m}$ 为复数常数，可写为

$$B_{1,n,m}=B_{1,n,m,r}+\mathrm{i}B_{1,n,m,i} \tag{12-31}$$

对比式（12-27）和（12-30）中 $\hat{O}_{s_{n,m}}(z,\theta)$ 和 $\sin\frac{m\pi}{L}z$ 前系数常数，根据下式

$$B_{1,n,m,r}=A_{1,n,m,r},B_{1,n,m,i}=A_{1,n,m,i},b_{1,m}=a_{1,m} \tag{12-32}$$

可以确定 $A_{1,n,m,r},A_{1,n,m,i},a_{1,m}$，这样就可根据式（12-26）确定各向异性圆柱壳内非稳态温度场。

圆柱壳面内物理场求解是物理、工程和数学领域经常遇到的问题。本章引入的复数柱面函数展开方法包括函数 $\hat{O}_{s_{n,m}}(z,\theta)$ 和分离空间坐标函数和时间函数的常规分离变量法，方法的一个基础就是 $\hat{O}_{s_{n,m}}(z,\theta)$ 在柱面上的正交性。本章引入的复数函数方法也可以应用于在其他领域研究中。

12.3 第一类复数柱面函数展开定理

考虑圆柱面（$0\leqslant z\leqslant L$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$）。对非稳态热传导方程（12-5）中分离常数写为 $\lambda_{n,m}$。对于 $\lambda_{n,m}$，方程（12-7）解为

$$u=\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty}B_{1,n,m}\hat{O}_{s_{n,m}}(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \tag{12-33}$$

$$\begin{cases}s_{1,n,m}=-K_{23}-\dfrac{m\pi}{L}\\[2ex] s_{2,n,m}=-K_{23}+\dfrac{m\pi}{L}\end{cases} \tag{12-34}$$

将式（12-33）代入方程（12-7），得到

$$e^{in\theta}\{(\lambda_{n,m}-2\frac{h_a}{\delta}\frac{1}{k_{33}})\hat{O}_{s_{n,m}}(z)+2K_{23}ni\frac{d\hat{O}_{s_{n,m}}(z)}{dz}+\frac{d}{dz}[\frac{d\hat{O}_{s_{n,m}}(z)}{dz}]-n^2K_{22}\hat{O}_{s_{n,m}}(z)\}=0 \tag{12-35}$$

根据式（12-19）和（12-34），$\lambda_{n,m}$ 和 $s_{j,n,m}$ 是 n 的偶函数。这样一个 $\lambda_{n,m}$ 与两个方程关联，一个是关于 n 的方程（12-35），另一个关于 $-n$ 的以下方程

$$e^{-in\theta}[(\lambda_{n,m}-2\frac{h_a}{\delta}\frac{1}{k_{33}})\hat{O}_{s_{-n,m}}(z)-2K_{23}ni\frac{d\hat{O}_{s_{-n,m}}(z)}{dz}+\frac{d^2\hat{O}_{s_{-n,m}}(z)}{dz^2}-n^2K_{22}\hat{O}_{s_{-n,m}}(z)]=0 \tag{12-36}$$

方程（12-35）和（12-36）可称为连带方程。

$\hat{O}_{s_{n,m_1}}(z)e^{in\theta}$ 的共轭函数写 $[\hat{O}_{s_{n,m}}(z)e^{in\theta}]^*$ 。根据式（12-34）和 $\hat{O}_{s_{n,m}}(z)=e^{inzs_{1,n,m}}-e^{inzs_{2,n,m}}$ ，可得

$$[\hat{O}_{s_{n,m}}(z)]^*=\hat{O}_{s_{-n,m}}(z) \tag{12-37}$$

根据式（12-37），方程（12-36）可改写为

$$e^{-in\theta}\{(\lambda_{n,m}-2\frac{h_a}{\delta}\frac{1}{k_{33}})[\hat{O}_{s_{-n,m}}(z)]^*-2K_{23}ni\frac{d[\hat{O}_{s_{-n,m}}(z)]^*}{dz}+\frac{d^2[\hat{O}_{s_{-n,m}}(z)]^*}{dz^2}-n^2K_{22}[\hat{O}_{s_{-n,m}}(z)]^*\}=0 \tag{12-38}$$

设 $\hat{O}_{s_{n,m_1}}(z)e^{in\theta}$ 、$\hat{O}_{s_{n,m_2}}(z)e^{in\theta}$ 是方程（12-7）分别对应 λ_{n,m_1} 、λ_{n,m_2} 的解。根据方程（12-35）和方程（12-38）可得

$$e^{in\theta}[(\lambda_{n,m_1}-2\frac{h_a}{\delta}\frac{1}{k_{33}})\hat{O}_{s_{n,m_1}}(z)+2K_{23}ni\frac{d\hat{O}_{s_{n,m_1}}(z)}{dz}+\frac{d^2\hat{O}_{s_{n,m_1}}(z)}{\partial z^2}-n^2K_{22}\hat{O}_{s_{n,m_1}}(z)]=0 \tag{12-39}$$

$$e^{-in\theta}\{(\lambda_{n,m_2}-2\frac{h_a}{\delta}\frac{1}{k_{33}})[\hat{O}_{s_{n,m_2}}(z)]^*-2K_{23}ni\frac{d[\hat{O}_{s_{n,m_2}}(z)]^*}{dz}+\frac{d^2[\hat{O}_{s_{n,m_2}}(z)]^*}{dz^2}-n^2K_{22}[\hat{O}_{s_{n,m_2}}(z)]^*\}=0 \tag{12-40}$$

方程（12-39）乘以 $-[\hat{O}_{s_{n,m_2}}(z)e^{in\theta}]^*$ ，方程（12-40）乘以 $\hat{O}_{s_{n,m_1}}(z)e^{in\theta}$ ，然后将所得两式相加，再对以上所得两式相加之和从 $z=0$ 到 $z=L$ 对 z 坐标进行积分，可得

$$(\lambda_{n,m_1}-\lambda_{n,m_2})\int_0^L\hat{O}_{s_{n,m_1}}(z)[\hat{O}_{s_{n,m_2}}(z)]^*dz=0 \tag{12-41}$$

由于 $\lambda_{n,m_1}\neq\lambda_{n,m_2}$ ，可得

$$\int_0^L\hat{O}_{s_{n,m_1}}(z)[\hat{O}_{s_{n,m_2}}(z)]^*dz=0\ ,\ m_1\neq m_2 \tag{12-42}$$

根据 Sturm - Liouville 理论，由式（12 - 42），可得第一类复数柱面函数 $\hat{O}_{s_{n,m}}(z,\theta)$ 在圆柱面具有正交性。

当 $n=0$，可得 u 的傅立叶级数解

$$u_0 = \sum_{m=0}^{\infty} b_{1,m} \sin \frac{m\pi}{L} z \tag{12-43}$$

$\hat{O}_{s_{n,m}}(z,\theta)$ 在圆柱面上正交性可以用来展开 $\varphi(z,\theta)$

$$\varphi(z,\theta) = \mathrm{Re}\left[\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty} \sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty} B_{1,n,m} \hat{O}_{s_{n,m}}(z,\theta)\right] + \sum_{m=1}^{\infty} b_{1,m} \sin \frac{m\pi}{L} z \tag{12-44}$$

上式被称为 $\varphi(z,\theta)$ 的第一类参数复数柱面函数展开。下面的定理给出函数具有第一类参数复数柱面函数 $\hat{O}_{s_{n,m}}(z,\theta)$ 级数展开的充分条件，给出了 $\hat{O}_{s_{n,m}}(z,\theta)$ 级数系数计算公式。下面定理和傅立叶级数展开和贝塞尔级数展开类似。

第一类参数复数柱面函数展开定理

如果 $\varphi(z,\theta)$ 在柱面（$0 \leqslant z \leqslant L$，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$）上分段光滑，$\varphi(0,\theta) = \varphi(L,\theta) = 0$，那么 $\varphi(z,\theta)$ 具有第一类参数复数柱函数 $\hat{O}_{s_{n,m}}(z,\theta)$ 展开式

$$\varphi(z,\theta) = \mathrm{Re}\left[\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty} \sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty} B_{1,n,m} \hat{O}_{s_{n,m}}(z,\theta)\right] + \sum_{m=1}^{\infty}\left[b_{1,m} \sin \frac{m\pi}{L} z\right] \tag{12-45}$$

其中 $b_{1,m}$ 可以根据傅立叶级数方法确定。$\hat{O}_{s_{n,m}}(z,\theta) = e^{in\theta}(e^{inzs_{1,n,m}} - e^{inzs_{2,n,m}})$，$[\hat{O}_{s_{n,m}}(z,\theta)]^*$ 为 $\hat{O}_{s_{n,m}}(z,\theta)$ 共轭式。

$$B_{1,n,m} = \frac{\int_0^L \int_0^{2\pi} \varphi(z,\theta)\,[\hat{O}_{s_{n,m}}(z,\theta)]^*\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z}{[N_{n,m}]} \tag{12-46}$$

$$[N_{n,m}] = \int_0^L \int_0^{2\pi} \hat{O}_{s_{n,m}}(z,\theta)\,[\hat{O}_{s_{n,m}}(z,\theta)]^*\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \tag{12-47}$$

对于柱面（$0 \leqslant z \leqslant L$，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$）内任一点 (z,θ)，如 $\varphi(z,\theta)$ 在 (z,θ) 连续，第一类参数复数柱面函数 $\hat{O}_{s_{n,m}}(z,\theta)$ 展开收敛到 $\varphi(z,\theta)$。

第13章　球坐标各向同性热传导方程——实数幂级数方法和勒让德级数

13.1　引言

对于球形域、球面域的数学物理问题，应采用球坐标研究此类数学物理方程。在对各向同性热传导球形域问题求解时，会遇到勒让德方程。在求解其他经典数学物理时也会遇到勒让德方程。法国数学家勒让德在1783年发现了勒让德多项式，并加以研究给出了勒让德多项式的一些性质，从此开创了球坐标下偏微分方程求解的勒让德方法。本章介绍实数幂级数球面函数方法和勒让德级数方法。实数球面函数方法和勒让德级数在处理球形域、球面域的各向同性数学物理问题时是一重要的工具。在求解各向异性数学物理问题中，可能会遇到含有待定函数关于空间坐标的奇次交叉偏导数数学物理方程，如球坐标下各向异性热传导方程，这时常规的实数幂级数方法和勒让德级数方法不能适用。在以后章节，还将引入复数球面函数和系列球多项式，对球坐标下各向异性球面稳态热传导等问题进行求解。

13.2　球坐标下的各向同性热传导方程

球形区域上的各向同性热传导方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0 \tag{13-1}$$

其中 R 为球域的半径，$0\leqslant r\leqslant R$，$0\leqslant \theta\leqslant \pi$，$0\leqslant \varphi\leqslant 2\pi$。

边界条件为

$$u|_r=R=f(\theta,\varphi) \tag{13-2}$$

方程（13-1）也称为球坐标下的拉普拉斯方程

下面我们先从（13-1）中导出勒让德方程。

设（13-1）有解 $u(r,\theta,\varphi)=R(r)Y(\theta,\varphi)$，并代入方程（13-1）可得

$$Y\left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{R}{r^2}\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial Y}{\partial \theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2}\right)=0$$

对上式推导可得

$$\frac{r^2}{R}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial R}{\partial r}\right)=-\frac{1}{Y}\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial Y}{\partial \theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2}\right)=\lambda$$

于是可得

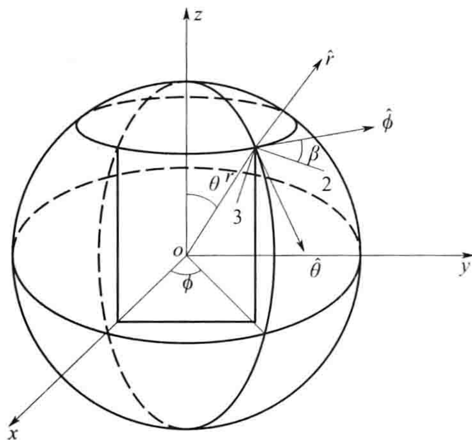


图 13-1　球坐标

$$r^2\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}+2r\frac{\partial R}{\partial r}-\lambda R=0 \tag{13-3}$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial Y}{\partial \theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2}+\lambda Y=0 \tag{13-4}$$

可将 λ 记为 $l(l+1)$ 形式，这样式（13-3）和（13-4）可写为下式

$$r^2\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}+2r\frac{\partial R}{\partial r}-l(l+1)R=0 \tag{13-5}$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial Y}{\partial \theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2}+l(l+1)Y=0 \tag{13-6}$$

由于式（13-6）的解 $Y(\theta,\varphi)$ 与半径 r 无关，故称为球面函数或球函数.

再设 $Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$，代入式（13-6）可得

$$\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2}\Phi+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\Phi+\frac{\Theta}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}+l(l+1)\Theta\Phi=0$$

设 $x=\cos\theta$，代入上式可得

$$(1-x^2)^2\frac{1}{\Theta}\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}x^2}-2x(1-x^2)\frac{1}{\Theta}\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}+l(l+1)(1-x^2)=-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}=m^2 \tag{13-7}$$

由上式可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}+m^2\Phi=0\\&(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}+[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}]\Theta=0\end{aligned} \tag{13-8}$$

考虑球坐标下 $\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)$ 周期性，可得 m=0，1，2，3，⋯。

习惯上，为简便起见，记 $\Theta(\theta)$ 记为 $y(x)$，于是方程（13-8）第二式改写为

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+[l(l+1)-\frac{m}{1-x^2}]y=0 \tag{13-9}$$

方程（13-9）称为连带勒让德方程。如 m=0，(13-9）简化为

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+l(l+1)y=0 \tag{13-10}$$

方程（13 - 10）称为勒让德方程。

13.3 勒让德方程的实数幂级数解

勒让德方程（13 - 10）有如下幂级数解

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+C}=x^C(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots) \tag{13-11}$$

其中 a_k，C 为实数待定常数。对式（13 - 11）逐项微分后代入方程（13 - 10），可得

$$(1-x^2)\sum_{k=0}^{\infty}(k+C)(k+C-1)a_kx^{k+C-2}-2x\sum_{k=0}^{\infty}(k+C)a_kx^{k+C-1}+l(l+1)\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+C}=0$$

整理可得

$$\begin{aligned}&C(C-1)a_0x^{C-2}+C(C+1)a_1x^{C-1}+\sum_{k=0}^{\infty}\{(k+C+2)(k+C+1)a_{k+2}-\\&[(k+C)(k+C+1)-n(n+1)]a_k\}x^{k+C}=0\end{aligned} \tag{13-12}$$

令 x 的各次幂的系数均为零，可得

$$C(C-1)a_0=0 \tag{13-13}$$

$$C(C+1)a_1=0 \tag{13-14}$$

$$(k+C+2)(k+C+1)a_{k+2}-[(k+C)(k+C+1)-l(l+1)]a_k=0 \tag{13-15}$$

由方程（13 - 13）可得 $C=0$ 或 $C=1$，由方程（13 - 14）可得 $C=0$ 或 $C=-1$，由方程（13 - 15）可得系数 a_k 的递推关系

$$a_{k+2}=\frac{(k+C)(k+C+1)-l(l+1)}{(k+C+1)(k+C+2)}a_k,k=0,1,2,\cdots$$

取 $C=0$，可得

$$a_{k+2}=\frac{(k-l)(k+l+1)}{(k+2)(k+1)}a_k,k=0,1,2,\cdots$$

其中 a_0，a_1 都是任意实数常数。在上面的递推公式中，取 $k=0$，2，…，$2i$，…，分别可得

$$a_2=\frac{-l(l+1)}{2!}a_0$$

$$a_4=(-1)2\frac{l(l-2)(l+1)(l+3)}{4!}a_0$$

$$\vdots$$

$$a_{2i}=(-1)^i\frac{l(l-2)\cdots(l-2i+2)(l+1)(l+3)\cdots(l+2i-1)}{(2i)!}a_0$$

再令 $k=l$，3，…，$2i-1$，… 分别可得

$$a_3=-\frac{(l-1)(l+2)(l+2)}{3!}a_1$$

$$a_5 = (-1)^2 \frac{(l-1)(l-3)(l+2)(l+4)}{5!} a_1$$

$$\vdots$$

$$a_{2i+1} = (-1)^i \frac{(l-1)(l-3)\cdots(l-2i+1)(l+2)(l+4)\cdots(l+2i)}{(2i+1)!} a_1$$

将这些值代入式（13-11），推导可得

$$\begin{aligned} y = & a_0\left[1-\frac{l(l+1)}{2!}x^2+\frac{l(l-2)(l+1)(l+3)}{4!}x^4+\cdots\right]+ \\ & a_1\left[x-\frac{(l-1)(l+2)}{3!}x^3+\frac{(l-1)(l-3)(l+2)(l+4)}{5!}x^5+\cdots\right] \end{aligned} \tag{13-16}$$

鉴于 a_0, a_1 的任意性，所以函数

$$y_0 = a_0\left[1-\frac{l(l+1)}{2!}x^2+\frac{l(l-2)(l+1)(l+3)}{4!}x^4+\cdots\right],$$

$$y_1 = a_1\left[x-\frac{(l-1)(l+2)}{3!}x^3+\frac{(l-1)(l-3)(l+2)(l+4)}{5}x^5+\cdots\right]$$

分别都是勒让德方程（13-10）的解，显然，当 $a_0, a_1 \neq 0$ 时，它们是线性无关的.

定义：实数函数 $L_1(x,l)$，$L_2(x,l)$

$$\begin{cases} L_1(x,l) = 1-\dfrac{l(l+1)}{2!}x^2+\dfrac{l(l-2)(l+1)(l+2)}{4!}x^4-\cdots \\ L_2(x,l) = x-\dfrac{(l-1)(l+2)}{3!}x^3+\dfrac{(l-1)(l-3)(l+2)(l+4)}{5!}x^5-\cdots \end{cases} \tag{13-17}$$

$L_1(x,l)$，$L_2(x,l)$ 是求解球面各向同性数学物理问题的基本函数。

如果开始时取 $C=1$，$C=-1$，重复前面的做法，所得的级数解与 $C=0$ 获得结果相同，读者可以自行演算。

x 在（$-1,1$）内，式（13-16）即为勒让德方程（13-10）的通解。

当 $|x|<1$ 时，l 不是整数时，$L_1(x,l)$ 和 $L_2(x,l)$ 都绝对收敛。可以证明 $L_1(x,l)$ 和 $L_2(x,l)$ 在 $|x|=1$ 时都发散，此时勒让德方程的解在 $x=1$ 和 $x=-1$ 时发散。$|x|=1$ 是指球面的南北极点。对于一个球带来说，由于球带不含球面的南北极点，这样，我们在处理球带面时，就不遇到 $|x|=1$ 的情况，那么已有的 $L_1(x,l)$ 和 $L_2(x,l)$ 足够求解方程了。但是如果要研究的问题是一个球冠问题（包括一个极点），那就要涉及到 $|x|=1$ 的情况；如果是研究完整球来说（包括南北极点），也要遇到肯定 $|x|=1$ 情况，那么已有的 $L_1(x,l)$ 和 $L_2(x,l)$ 要产生发散问题，而实际物理问题是不能有无穷大问题，极点函数值的有限性就成了球面域数学物理问题的自然条件。从以上数学推导来看，数学运算是严密的，那么解决问题的关键就在于 l 的数值选择上，对于特定 l 数值，$L_1(x,l)$ 或 $L_2(x,l)$ 就变化为勒让德多项式。

13.4 勒让德多项式

当 l 不是整数时，勒让德方程解就是式（13-16）。在实际数学物理问题中，l 不是整

数的情况是比较多的，这时（13 - 16）有广阔的应用范围。但是在有些情况下，我们要遇到 l 是整数的情况，这时就要分情况处理了。

当 l 为整数时，按惯例将 l 记为 n。仔细观察（13 - 17），当 n 为正偶数整数时，$y_0(x)$ 是一个有限值的多项式，$y_1(x)$ 为无穷多项式，而 $y_1(\pm 1)$ 发散，此时（13 - 16）取 $a_1 = 0$，则得勒让德方程在闭区间 $[-1, 1]$ 上的有界非零解为 $y_0(x)$。同理，当 n 为正奇数整数时，$y_1(x)$ 是一个有限多项式，$y_0(x)$ 为无穷多项式，可以证明 $y_0(\pm 1)$ 发散。此时取 $a_0 = 0$，可得在 $[-1, 1]$ 上的有界非零解为 $y_1(x)$。

把这种多项式的最高次方幂 x^n 的系数规定为

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \tag{13-17}$$

根据递推公式

$$a_k = -\frac{(k+2)(k+1)}{(n-k)(k+n+1)} a_{k+2} \tag{13-18}$$

式中 $k \leqslant n-2$，以 a_n 来表示其他各次项的系数

$$a_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)} a_n$$

$$a_{n-4} = -\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)} a_{n-2}$$

$$= (-1)^2 \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)} a_n$$

$$= (-1)^2 \frac{(2n-4)!}{2^n 2!(n-2)!(n-4)!}$$

$$a_{n-6} = (-1)^3 \frac{(2n-6)!}{2^n 3!(n-3)!(n-6)!}$$

由数学归纳法，可得

$$a_{n-2m} = (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!}, m = 0,1,2,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right] \tag{13-19}$$

其中 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 表示 $\frac{n}{2}$ 对号取整，于是当 n 为正偶数整数时，将这些整数代入

$$y_0 = a_0\left[1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4 + \cdots\right]$$

可得

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n - \frac{(2n-2)!}{2^n (n-1)!(n-2)!} x^{n-2} + \cdots \\ &= \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} x^{n-2m} \end{aligned} \tag{13-20}$$

当 n 为正奇数整数时，将上面的 a_{n-2m} 表达式代入

$$y_1 = a_1\left[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5}x^5 + \cdots\right]$$

可得

$$y_1 = \sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} x^{n-2m} \tag{13-21}$$

把式（13-20）和（13-21）这两个多项式写成统一的形式，记为 $P_n(x)$，即

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{M} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)} x^{n-2m} \tag{13-22}$$

其中

$$M = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, \text{当 } n \text{ 为偶数时} \\ \dfrac{n-1}{2}, \text{当 } n \text{ 为奇数时} \end{cases}$$

这个多项式称为一次勒让德多项式（或称为第一类勒让德函数）。

$P_0(x) = 1, P_1(x) = x$

$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$，$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$，

$P_4(x) = \frac{7}{4}\frac{5}{2}x^4 - 2\frac{5}{4}\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}\frac{1}{2}, P_5(x) = \frac{9}{4}\frac{7}{2}x^5 - 2\frac{7}{4}\frac{5}{2}x^3 + \frac{5}{4}\frac{3}{2}x$

计算分析可得

$$\begin{cases} P_n(-x) = (-1)nP_n(-x) \\ P_{2n+1}(0) = 0 \\ P_{2n}(0) = (-1)n \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \end{cases} \tag{13-23}$$

$P_n(x)$ 可以用一种简明的形式来表达，即

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \tag{13-24}$$

式（13-24）称为勒让德多项式的罗德里格斯（Rodrigues）表达式。

综上所述，关于勒让德多项式可得出如下结论：

当 n 为整数，y_0 与 y_1 中有一个是勒让德多项式 $P_n(x)$，另一个仍是无穷级数（记作 $Q_n(x)$），此时勒让德方程的通解是

$$y = C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x)$$

其中 $Q_n(x)$ 称为第二类勒让德函数，它在闭区间 $[-1,1]$ 上仍是无界的。

13.5　勒让德多项式递推公式

勒让德多项式是从拉普拉斯方程得来，从拉普拉斯方程的基本解来推出勒让德多项式的母函数

$$G(x,z) = \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n \tag{13-25}$$

通常把 $G(x,z)$ 称为勒让德多项式的母函数。

由表达式（13-25）可推出如下结果

$$P_0(x) = G(x,0) = 1$$

$$P_1(x) = \frac{\partial G}{\partial z}\Big|_{z=0} = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}\Big|_{z=0} = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

…

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n G}{\partial z^n}\Big|_{z=0}$$

$$P_n(1) = 1$$

$$P_n(-1) = (^- 1)n$$

由展开式（13-25）可推出三个重要的勒让德多项式的递推公式，即

$$\begin{cases} P'_{n-1}(x) = xP'_n(x) - nP_{n'}(x) \\ (2n+1)xP(x) - nP_{n-1}(x) = (n+1)P_{n+1}(x) \\ nP_n(x) + P'_{n-1}(x) = xP'_n(x) \end{cases} \tag{13-26}$$

式中 n=1，2，3，…

式（13-26）中三个递推式经常被用到。

13.6　勒让德多项式的正交性

应用勒让德多项式来求解数学物理方程，需要将给定在区间 $[-1,1]$ 内的函数按勒让德多项式展开为无穷级数。

定理 13.1：勒让德多项式序列 $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \cdots$ 在区间 $[-1,1]$ 上满足下列积分等式

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1}, m = n \end{cases} \tag{13-27}$$

可以推得

$$\int_{-1}^{1} \left[\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x)\right]^2 \mathrm{d}x = 1 \tag{13-28}$$

可称 $\sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}$ 为 $P_n(x)$ 的归一因子。勒让德多项式乘上归一因子之后，就可得到在区间 $[-1,1]$ 上的标准正交函数系。勒让德多项式的正交性可以用来展开函数。

13.7　傅立叶-勒让德级数

可以证明，如函数 $f(x)$ 是定义在区间 $[-1,1]$ 内分段光滑的实值函数，且积分

$\int_{-1}^{1}[f(x)]^2\mathrm{d}x$ 的值有限，则 $f(x)$ 可以表示为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nP_n(x),-1<x<1 \tag{13-29}$$

式中　C_n ——待定常数。

$$C_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)\mathrm{d}x, n=0,1,2,\cdots \tag{13-30}$$

其中在间断点 x_0 处，（13－29）右端的级数收敛于 $0.5[f(x_0-0)+f(x_0+0)]$。

级数（13－29）称为函数 $f(x)$ 的傅立叶一勒让德级数。令 $x=\cos\theta$，则（13－29）（13－30）这两个式子可写成

$$f(\cos\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta),0<\theta<\pi,.$$

$$C_n=\frac{2n+1}{2}\int_{0}^{\pi}f(\cos\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

勒让德多项式自1783年由勒让德提出以来，经过数百年的研究已发展为一个完整函数体系，本章只简要介绍勒让德多项式理论，详细内容读者可参阅参考文献［4］［5］［6］［7］［9］等专著。

第 14 章 各向异性球带面稳态温度场方程——复数球多项式与复数球面函数

特殊函数与物理学紧密关联。寻找球域的温度场是一个经典的数学物理问题。对于球面上的热传导问题，尽管其相对球体问题要简单一些，但在实际工程问题中，如薄壁球形壳可以简化成球面模型计算，球面结构问题求解在理论和工程中均有价值。对于各向异性球面热传导偏微分控制方程，新增加了温度函数关于坐标的奇次交叉偏导数，过去常用的实数多项式、勒让德方法已不能适用。本章引入了求解球坐标下偏微分方程的第一类复数球多项式 $\Omega_{m,n}^{(1)}(x)$ 、第二类复数球多项式 $\Omega_{m,n}^{(2)}(x)$ 和复数球面函数 $Z_{is}(x,\varphi)$，用以求解各向异性球面稳态热传导方程，完成理论求解后，进行了验证数值计算。研究表明，常规实数幂级数为复数球多项式的特例，复数球多项式是球坐标下数学物理方程更广义的级数方法。

14.1 球坐标下的各向异性球面热传导控制偏微分方程

考虑曲线型各向异性薄球面，球半径为 R，假设球面足够薄，那么温度场分布可简化为与径向坐标 r 无关，球面与外界环境绝热，仅在球面边界与外界进行热交换。这样球坐标下稳态热传导控制偏微分方程为

$$k_{22}\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+k_{33}\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta})+2k_{23}\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi\partial\theta}=q \quad (14-1)$$

其中 $k_{22}=k_2\cos^2\beta+k_3\sin^2\beta, k_{23}=k_{32}=(k_2-k_3)\sin\beta\cos\beta, k_{33}=k_2\sin^2\beta+k_3\cos^2\beta$

式中 $T(\theta,\varphi)$ 为沿球面的温度函数，q 是热源函数，方向 2 为球坐标方向角 $\varphi(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$ 方向（地理纬线方向），方向 3 为球坐标 $\theta(0<\theta<\pi)$ 高低角方向（地理经线方向）。k_{22}，k_{23}，k_{33} 为热传导系数。k_2，k_3 为各向异性介质两个主轴方向热传导常数（$k_2>k_3$），β 为 k_2 主轴方向与 φ 方向（地理纬线方向）的夹角。

引入如下参数变换

$$q*=\frac{qR^2}{k_{33}}, K_{33}=1, K_{32}=K_{23}=\frac{k_{23}}{k_{33}}, K_{22}=\frac{k_{22}}{k_{33}}, x=\cos\theta \quad (14-2)$$

可将方程（14－1）变换为如下偏微分方程

$$\frac{K_{22}}{(1-x^2)}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+[-2x\frac{\partial T}{\partial x}+(1-x^2)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}]K_{33}-2K_{23}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi\partial x}=q^* \quad (14-3)$$

14.2　球 Z_{is} 方程、复数球面函数、多项式及各向异性球面热传导解

14.2.1　球 Z_{is} 方程、复数球面函数和复数球多项式

设方程（14-3）有如下形式解

$$T = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{14-4}$$

其中 $\mathrm{i}^2=-1$；m 为整数。

$m=0$ 时，方程（14-3）简化为

$$-2x\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}+(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}=0 \tag{14-5}$$

设

$$T(x)=a_0+\sum_{j=1}^{\infty}a_jx^j \tag{14-6}$$

将式（14-6）代入方程（14-5），可得以下解

$$T(x)=a_0+a_1\sum_{j=1}^{\infty}\frac{x^{2j-1}}{2j-1}=a_0+\frac{a_1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}) \tag{14-7}$$

式中 a_0，a_1 为待定实数常数。

对于 $m\neq 0$，将式（14-4）代入方程（14-3）可得

$$K_{33}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2f_m}{\mathrm{d}x^2}-(2xK_{33}+2K_{23}\mathrm{i}m)\frac{\mathrm{d}f_m}{\mathrm{d}x}-\frac{K_{22}m^2f_m}{1-x^2}=0 \tag{14-8}$$

方程（14-8）是一典型复数微分方程，这个复数微分方程在球坐标下各向异性数学物理问题求解中要经常遇到，记为 Z_{is} 方程。

设

$$f_m(x)=\sum_{j=0}^{\infty}A_{m,j}x^j \tag{14-9}$$

式中 j 为整数，$x\neq\pm1$。$A_{m,j}$ 为复数常数，这与实数级数法不同。

结合式（14-1）和（14-9）可得

$$T=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}A_{m,j}x^j\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{14-10}$$

式（14-10）定义了一个复数级数函数。根据数学物理实数化原理，描述现实物理现象的数学函数应该是实数函数，因此 如果式（14-10）是问题解，式（14-10）应该是实数函数，后续 14.6 节中给出了简略证明

如果 $\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}A_{m,j}x^j\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$ 是实数函数，当 $m\neq 0$，可得

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}A_{m,j}x^j\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}2A_{m,j}x^j\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$$

因为 $A_{m,j}$ 为待定复数常数，上面 $2A_{m,j}$ 可以改写为 $A_{m,j}$。因此可得

$$T = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} A_{m,j} x^j e^{im\varphi} \tag{14-11}$$

$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} A_{m,j} x^j e^{im\varphi}$ 记为复数球面函数，写为 $Z_{is}(x,\varphi)$，标记中下标 i 代表复数，s 代表球坐标。复数球面函数的实数形式下文给出。

将式（14-11）代入方程（14-3）化简可得

$$\begin{aligned}
&K_{33}[2A_{m,2} + 6xA_{m,3} + 12x^2A_{m,4} + 20x^3A_{m,5} + \sum_{j=4}^{\infty} x^j A_{m,j+2}(j+1)(j+2) - 4A_{m,2}x^2 - \\
&12x^3A_{m,3} - 2\sum_{j=4}^{\infty} x^j A_{m,j} j(j-1) + \sum_{j=4}^{\infty} x^j A_{m,j-2}(j-2)(j-3)] - 2K_{23}\mathrm{i}m[A_{m,1} + 2xA_{m,2} + \\
&3x^2A_{m,3} + 4x^3A_{m,4} + \sum_{j=4}^{\infty} x^j A_{m,j+1}(j+1)] - K_{33}(2xA_{m,1} + 4x^2A_{m,2} + 6x^3A_{m,3} + 2\sum_{j=4}^{\infty} x^j A_{m,j} j) + \\
&2K_{23}\mathrm{i}m[x^2A_{m,1} + 2x^3A_{m,2} + \sum_{j=4}^{\infty} x^j A_{m,j-1}(j-1)] + 2K_{33}[x^3A_{m,1} + \sum_{j=4}^{\infty} x^j A_{m,j-2}(j-2)] - \\
&K_{22}m^2(A_{m,0} + xA_{m,1} + x^2A_{m,2} + x^3A_{m,3} + \sum_{j=4}^{\infty} x^j A_{m,j}) = 0
\end{aligned} \tag{14-12}$$

式中 $A_{m,0} \neq 0$，$A_{m,1} \neq 0$。令（14-12）中 x 的 0，1，2，3 幂次项前系数为 0 可以推得

$$\begin{cases}
A_{m,2} = \dfrac{1}{2!}D_{22}A_{m,0} + \mathrm{i}D_{23}A_{m,1} \\
A_{m,3} = \mathrm{i}\dfrac{D_{23}}{3}D_{22}A_{m,0} + A_{m,1}(\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3}D_{23}^2 + \dfrac{D_{22}}{3!}) \\
A_{m,4} = (\dfrac{2}{3}D_{23} - \dfrac{1}{3}D_{23}^3 + \dfrac{1}{3!}D_{23}D_{22})\mathrm{i}A_{m,1} + A_{m,0}(\dfrac{1}{3}D_{22} + \dfrac{D_{22}^2}{4!} - \dfrac{D_{23}^2}{3!}D_{22})
\end{cases} \tag{14-13}$$

式中 $D_{22} = K_{22}m^2$，$D_{23} = K_{23}m$。

令式（14-12）中 x 的 j 次幂项（$j>3$ 为 0，可以推得四项复数递推公式

$$A_{m,j+2} = -A_{m,j-2}\frac{(j-2)(j-1)}{(j+2)(j+1)} - A_{m,j-1}2D_{23}\frac{\mathrm{i}(j-1)}{(j+2)(j+1)} + A_{m,j}\frac{2j^2 + D_{22}}{(j+2)(j+1)} + A_{m,j+1}\frac{2D_{23}\mathrm{i}}{j+2} \tag{14-14}$$

结合式（14-12）（14-13）和（14-14）可得递推公式

$$A_{m,j} = \mathrm{i}A_{m,1}Z_{m,j,1} + A_{m,0}Z_{m,j,0} \qquad (j\ 为偶数) \tag{14-15a}$$

$$A_{m,j+1} = \mathrm{i}A_{m,0}Z_{m,j+1,0} + A_{m,1}Z_{m,j+1,1} \qquad (j+1\ 为奇数) \tag{14-15b}$$

其中 $Z_{m,j,1}$，$Z_{m,j,0}$，$Z_{m,j+1,0}$，$Z_{m,j+1,1}$ 为实数，可由本章 14.5 节推得。

将式（14-15a）和（14-15b）代入式（14-11）可得

$$
\begin{aligned}
T = \sum_{m=1}^{\infty} [& A_{m,0} x^0 e^{im\varphi} + A_{m,1} x^1 e^{im\varphi} + \\
& (iA_{m,1} Z_{m,2,1} + A_{m,0} Z_{m,2,0}) x^2 e^{im\varphi} + (iA_{m,0} Z_{m,3,0} + A_{m,1} Z_{m,3,1}) x^3 e^{im\varphi} + \\
& (iA_{m,1} Z_{m,4,1} + A_{m,0} Z_{m,4,0}) x^4 e^{im\varphi} + (iA_{m,0} Z_{m,5,0} + A_{m,1} Z_{m,5,1}) x^5 e^{im\varphi} + \cdots + \\
& (iA_{m,1} Z_{m,j,1} + A_{m0} Z_{m,j,0}) x^j e^{im\varphi} + (iA_{m,0} Z_{m,j+1,0} + A_{m,1} Z_{m,j+1,1}) x^{j+1} e^{im\varphi} + \cdots]
\end{aligned}
\tag{14-16}
$$

式中 $A_{m,0}$，$A_{m,1}$，$e^{im\varphi}$ 为复数，可写为

$$
\begin{cases}
A_{m,0} = A_{m,0,r} + iA_{m,0,i} \\
A_{m,1} = A_{m,1,r} + iA_{m,1,i} \\
e^{im\varphi} = \cos(m\varphi) + i\sin(m\varphi)
\end{cases}
\tag{14-17}
$$

其中 $A_{m,0,r}$，$A_{m,0,i}$，$A_{m,1,r}$，$A_{m,1,i}$ 为实数。

将式（14－17）代入式（14－16）化简可得

$$
T = \sum_{m=1}^{\infty} \{ (A_{m,0,r} + iA_{m,0,i}) e^{im\varphi} [Z_{s_1}(x) + iZ_{s_2}(x)] + (A_{m,1,r} + iA_{m,1,i}) e^{im\varphi} [Z_{s_3}(x) + iZ_{s_4}(x)] \}
\tag{14-18a}
$$

$$
\begin{aligned}
T = \sum_{m=1}^{\infty} \{ & A_{m,0,r} [Z_{s_1}(x)\cos(m\varphi) - Z_{s_2}(x)\sin(m\varphi)] - \\
& A_{m,0,i} [Z_{s_2}(x)\cos(m\varphi) + Z_{s_1}(x)\sin(m\varphi)] + \\
& A_{m,1,r} [Z_{s_3}(x)\cos(m\varphi) - Z_{s_4}(x)\sin(m\varphi)] - \\
& A_{m,1,i} [Z_{s_3}(x)\sin(m\varphi) + Z_{s_4}(x)\cos(m\varphi)] \}
\end{aligned}
\tag{14-18b}
$$

其中 $Z_{s_1}(x)$，$Z_{s_2}(x)$，$Z_{s_3}(x)$，$Z_{s_4}(x)$ 为实数多项式，定义如下

$$
\begin{cases}
Z_{s_1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_{m,2k,0} x^{2k} + 1 \\
Z_{s_2}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_{m,2k+1,0} x^{2k+1} \\
Z_{s_3}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_{m,2k+1,1} x^{2k+1} + x \\
Z_{s_4}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_{m,2k,1} x^{2k}
\end{cases}
\tag{14-19}
$$

其中 $Z_{s_1}(x)$，$Z_{s_2}(x)$，$Z_{s_3}(x)$，$Z_{s_4}(x)$ 多项式由 m，j（$j=2k$ 或 $j=2k+1$）和 k_{22}，k_{33}，k_{23} 确定。

$Z_{s_1}(x)$，$Z_{s_2}(x)$，$Z_{s_3}(x)$，$Z_{s_4}(x)$ 可分别称为第一、二、三、四种球多项式。在某种意义上，$Z_{s_1}(x)$，$Z_{s_2}(x)$，$Z_{s_3}(x)$，$Z_{s_4}(x)$ 为各向异性温度场的特征函数。

定义：复数球多项式

$$\begin{cases}\Omega_{m,n}^{(1)}(x) = Z_{s_1}(x) + \mathrm{i}Z_{s_2}(x) \\ \Omega_{m,n}^{(2)}(x) = Z_{s_3}(x) + \mathrm{i}Z_{s_4}(x)\end{cases}$$

式中 $\Omega_{m,n}^{(1)}(x)$ 称为第一类复数球多项式，$\Omega_{m,n}^{(2)}(x)$ 称为第二类复数球多项式。

分析计算表明，对于各向同性热传导和正交异性热传导问题，$Z_{s_2}(x) = 0$，$Z_{s_4}(x) = 0$，那么有

$$\Omega_{m,n}^{(1)}(x) = Z_{s_1}(x), \Omega_{m,n}^{(2)}(x) = Z_{s_3}(x)$$

这时复数球多项式均变为实数多项式，与现在的实数幂级数方法一致。式（14－18b）为复数球面函数解的实数形式。

14.2.2　各向异性球面稳态热传导解

根据偏微分方程的可叠加性原理，可得方程（14－3）一般解析解

$$\begin{aligned}T = &\\ &\sum_{m=1}^{\infty}\{A_{m,0,r}[Z_{s_1}(x)\cos(m\varphi) - Z_{s_2}(x)\sin(m\varphi)] - \\ &A_{m,0,i}[Z_{s_2}(x)\cos(m\varphi) + Z_{s_1}(x)\sin(m\varphi)] + \\ &A_{m,1,r}[Z_{s_3}(x)\cos(m\varphi) - Z_{s_4}(x)\sin(m\varphi)] - \\ &A_{m,1,i}[Z_{s_3}(x)\sin(m\varphi) + Z_{s_4}(x)\cos(m\varphi)]\} + a_0 + \frac{a_1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}) + T_0\end{aligned} \tag{14-20}$$

其中 $A_{m,0,r}, A_{m,0,i}, A_{m,1,r}, A_{m,1,i}$ $(m = 1,\cdots,\infty)$，a_0 和 a_1 为实数常数；T_0 为（14－3）特解。

式（14－16）中 $Z_{m,2k,0}, Z_{m,2k+1,0}, Z_{m,2k+1,1}, Z_{m,2k,1}$ 根据式（14－23）～（14－25）计算。这样，多项式 $Z_{s_1}(x), Z_{s_2}(x), Z_{s_3}(x), Z_{s_4}(x)$ 中的 j 可以在 $2J$ 截断。如果（14－20）级数解的 m 在 M 处截断，并代入到具有特定的纬度余角 θ 的边界条件，那么级数解存在 $4M+2$ 待定常数，具体包括 $A_{m,0,r}, A_{m,0,i}, A_{m,1,r}, A_{m,1,i}$ $(1 \leqslant m \leqslant M)$，$a_0, a_1$。注意到，球带具有两个具有特定纬度余角 θ 的边界条件，这样根据 $\cos m\varphi$ 和 $\sin m\varphi$ 傅立叶级数正交性，可以得到 $2\times(2M+1)$ 方程，可以求解 $4M+2$ 个未知数，问题得解。

作为各向异性问题的一个特例，考虑球带面各向同性热传导问题，$\cos\theta$ 的幂级数和 φ 的傅立叶级数组合构建了基于分离变量法的球面函数。本章引入的复数球面函数展开方法则可用来求解各向异性球面热传导问题，那么用复数球面函数方法求解各向同性球面热传导问题将会得到什么结果？下面进行这个工作。

球坐标下各向同性热传导方程为

$$\frac{1}{R^2(1-x^2)}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R^2}[-2x\frac{\partial T}{\partial x} + (1-x^2)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}] = \frac{q}{k} \tag{14-21a}$$

其中

$$k_{22} = k_{23} = k, k_{23} = 0 \tag{14-21b}$$

将式（14－21b）代入式（14－13）和（14－14），可得

$$Z_{m,2k+1,0} = 0\ ,\ Z_{m,2k,1} = 0\ ,\ Z_{s_2}(x) = 0\ ,\ Z_{s_4}(x) = 0$$

因此，对于各向同性热传导问题，式（14－20）可改写为

$$T = \sum_{m=1}^{\infty}[A_{m,0,r}Z_{s_1}(x)\cos(m\varphi) - A_{m,0i}Z_{s_1}(x)\sin(m\varphi) + A_{m,1,r}Z_{s_3}(x)\cos(m\varphi) - A_{m,1i}Z_{s_3}(x)\sin(m\varphi)] + a_0 + \frac{a_1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}) + T_0 \quad (14-22)$$

式（14－22）为各向同性球带热传导稳态问题的解析解，进一步研究表明，这与分离变量法得到的球面函数解是一致的，这也从另外一个角度表明本章引入的复数球面函数方法是正确的。

14.3 数值实验

考虑各向异性薄球带面，其球面半径 R 为 1m，热传导常数为 $k_2 = 0.30\text{kcal}/(\text{m}\cdot\text{h}\cdot℃)$，$k_3 = 0.11\text{kcal}/(\text{m}\cdot\text{h}\cdot℃)$。上纬度边界（$\theta_1 = 30°$）给定温度边界条件为 $(3\sin\varphi + 2\cos\varphi + 7)$℃，下纬度边界（$\theta_2 = 80°$）给温度边界条件为 $(6\sin\varphi + 5\cos\varphi + 12)$℃，球面与外界绝热。这样的各向异性介质中稳态温度场可以视为与径向 r 无关，温度只与 (θ,φ) 有关，即 $T = T(x,\varphi)$。

（1）多项式 $Z_{s_1}(x), Z_{s_2}(x), Z_{s_3}(x), Z_{s_1}(x)$ 系数分布

考虑多项式 $Z_{s_1}(x), Z_{s_2}(x), Z_{s_3}(x), Z_{s_4}(x)$，需要研究分析多项式中的系数 $Z_{m,2k,0}$，$Z_{m,2k+1,0}, Z_{m,2k,1}, Z_{m,2k+1,1}$。对于上述各向异性球带面，各向异性角 $\beta = 0°$ 时，系数 $Z_{m,2k,0}$，$Z_{m,2k+1,0}, Z_{m,2k,1}, Z_{m,2k+1,1}$ 显示在表 14－1，14－2（表中，$2k$ 和 $2k+1$ 用 j 表示）。

表 14－1 $Z_{m,j,0}$，$\beta = 0°$

j \ m	1	2	3
2	1.363636363636364	5.454545454545454	12.272727272727270
3	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000
4	1.219008300792087	8.595041578466240	33.28512495891614
5	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000
6	1.138367184553265	11.202604924351710	60.282871892260130
7	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000
8	1.083694804429423	13.516017116471080	92.041692302952440
9	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000
10	1.083694804429423	15.633202705977090	127.874013000131300

表 14 - 2　$Z_{m,j,1}$ ，$\beta = 0°$

j \ m	1	2	3
2	0. 000000000000000	0. 000000000000000	0. 000000000000000
3	0. 7878788113594055	2. 151515215635300	4. 424242556095123
4	0. 000000000000000	0. 000000000000000	0. 000000000000000
5	0. 7165289499542930	3. 009917448054660	9. 311570528420536
6	0. 000000000000000	0. 000000000000000	0. 000000000000000
7	0. 6744302767836545	3. 750313163923728	15. 262960640476800
8	0. 000000000000000	0. 000000000000000	0. 000000000000000
9	0. 6449674156456724	4. 418689914801249	22. 098046299222170
10	0. 000000000000000	0. 000000000000000	0. 000000000000000

对于各向异性角 $\beta = 45°$ 的各向异性球面，系数 $Z_{m,2k,0}$，$Z_{m,2k+1,0}$，$Z_{m,2k,1}$，$Z_{m,2k+1,1}$ 数值计算结果在表 14 - 3 和表 14 - 4 中。

表 14 - 3　$Z_{m,j,0}$ ，$\beta = 45°$

j \ m	1	2	3
2	0. 5000000000000001	2. 000000000000000	4. 500000000000001
3	0. 1544715493190580	1. 235772394552464	4. 170731831614565
4	0. 3392078229190161	1. 427325047494967	3. 475832941184560
5	0. 1632840561015081	1. 517772578444869	6. 312170681435953
6	0. 2622227401402559	1. 072954712399580	2. 084819652134091
7	0. 1589164661507345	1. 630493034246728	7. 583146131311708
8	0. 2157815492636689	0. 819796006307059	0. 705613993291693
9	0. 1524435478743745	1. 680565792924495	8. 374253204512380
10	0. 1842431279558491	0. 625209556433776	−0. 587333012384398
11	0. 1459695835497617	1. 700896246356675	8. 866498027349085
12	0. 1612122859399552	0. 468731090133007	−1. 781676613042319
13	0. 1399747784576659	1. 705171240802638	9. 158280628873525
14	0. 1435453785027289	0. 338943123505389	−2. 881343821610493

表 14 - 4　$Z_{m,j,1}$ ，$\beta = 45°$

j \ m	1	2	3
2	0. 4634146341463415	0. 9268292682926830	1. 390243902439025
3	0. 3568312618737417	0. 4273250176926442	0. 544814610724149
4	0. 3530056256449501	0. 9703864133309055	2. 116517525098871
5	0. 2165051342643101	0. 1821070062032409	−0. 154934887338238

续表

j \ m	1	2	3
6	0.2959949781741706	0.9561470767477441	2.391241038244511
7	0.1529159436580214	0.9561470767477441	−0.762667340105482
8	0.2595766646991499	0.9279102153922089	2.476250638417930
9	0.1161788784274990	−0.0765681298150616	−1.279804682145875
10	0.2336734857959493	0.8961916352483474	2.462577696926551
11	0.0921161461991661	−0.1568306277009642	−1.722976586674425
12	0.2140066989914217	0.8643418472680846	2.391796630551704
13	0.0750878632031259	−0.2198923442611158	−2.106521574804049
14	0.1984034857572658	0.8335477203365702	2.285905899613976

对于正交异性球面温度场（$k_{23}=0$），从表 14-1、14-2 可看出，奇次项 $Z_{m,2k+1,0}$ 和偶次项 $Z_{m,2k,1}$ 为 0。随着 j 增加，偶次项 $Z_{m,2k,0}$ 和奇次项 $Z_{m,2k+1,1}$ 在 $m=1$ 时逐渐降低，而在 $m>1$ 情况下有逐渐增大的趋势。$Z_{s_2}(x)=0$，$Z_{s_1}(x)=0$ 带来一般解析解（14-20）相对简单的形式，也相对简化了正交异性问题的求解。

对于各向异性球面（$k_{23}\neq 0$），$Z_{m,2k,0}$，$Z_{m,2k+1,0}$，$Z_{m,2k,1}$，$Z_{m,2k+1,1}$ 系列系数变化情况就复杂起来，各次项 $Z_{m,2k+1,0}$ 和 $Z_{m,2k,1}$ 均为非零项，$A_{m,j+2}$ 与 $A_{m,j-2}$，$A_{m,j-1}$，$A_{m,j}$，$A_{m,j+1}$ 相关。$Z_{m,j,0}$，$Z_{m,j,1}$ 振荡变化，这表明各向异性带来特殊函数 $Z_{s_1}(x)$、$Z_{s_2}(x)$、$Z_{s_3}(x)$、$Z_{s_4}(x)$ 复杂性。

(2) 复数球面函数解的收敛性验证

针对各向异性角 $\beta=45^\circ$ 的各向异性薄球面进行数值实验，其他计算参数与上节相同。首先增加式（14-9）中 j 的计算项数 J，观察 $T(\cos\frac{42.5}{180}\pi,0)$(℃)变化趋势。

表 14-5　$T(\cos\frac{42.5}{180}\pi,0)$(℃)与 J 变化趋势

J	10	20	30	50	100	1000	100000
$T(\cos\frac{42.5}{180}\pi,0)$	11.4274	11.4377	11.4380	11.4380	11.4380	11.4380	11.4380

表 14-5 显示式（14-20）收敛稳定。计算发现对于不同的计算参数，$Z_{is}(x,\varphi)$ 复数球面函数收敛速率不同，当 $\theta\to 0^\circ$ 或 $\theta\to 180^\circ$ 时，需要增加 J。当 $\theta=0^\circ$ 或 $\theta=180^\circ$，$Z_{is}(x,\varphi)$ 随着 J 增加可能趋向于无限大。

(3) 级数解对边界条件符合性验证

各向异性球带面边界条件为 $T(\cos\frac{\pi}{6},\varphi)=(3\sin\varphi+2\cos\varphi+7)$℃，$T(\cos\frac{\pi}{2},\varphi)=(6\sin\varphi+5\cos\varphi+12)$℃，球面与外界绝热，其他参数同上。计算 $J=100$。计算结果见表 14-6（表中 φ 和 θ 的单位为(°)）。

表 14-6　$T(\cos\theta,\varphi)$ (℃)，$\beta=45^\circ$

θ \ φ	0	45	90	135	180	225	270	315
30	9.000	10.540	10.000	7.707	5.000	3.464	4.000	6.293
40	10.610	11.930	11.040	8.461	5.711	4.396	5.288	7.864
50	12.080	13.390	12.190	9.183	6.130	4.819	6.018	9.024
60	13.420	14.880	13.440	9.931	6.412	4.945	6.389	9.898
70	14.670	16.430	14.800	10.740	6.625	4.865	6.492	10.550
80	15.860	18.050	16.310	11.650	6.811	4.620	6.362	11.020
90	17.000	19.780	18.000	12.710	7.000	4.222	6.000	11.290

表 14-6 表明（14-20）解满足边界条件。

14.4　复数球面函数展开法总结

本章引入的复数球面函数可用来分析计算球坐标下的各向异性物理问题，该方法可以分为四步。

第一步：首次展开

$$T=\sum_{m=-\infty}^{\infty}f_m(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$$

以此将控制偏微分方程从实数空间变换到虚数空间。

第二步：两次展开

$$f_m(x)=\sum_{j=0}^{\infty}A_{m,j}x^j$$

其中 $A_{m,j}$ 为复数。令 x 的 j 次幂前系数为 0，可以得到 $A_{m,j}$ ($j>1$) 与 $A_{m,0}$，$A_{m,1}$ 的四项递推公式，进而得到 $Z_{is}(x,\varphi)$ 复数球面函数复数形式解。

第三步：合并 m 的计算区间

根据相关函数的奇偶性检查和物理特性，$Z_{is}(x,\varphi)$ 函数中 m 的计算区间能从 $(-\infty,\infty)$ 合并到 $[0,\infty)$，如此就简化了计算，并得到实数形式的一般解析解。

第四步：根据傅立叶级数方法处理边界条件

为了求解数学物理问题，需要确定待定常数。将所得一般解析解代入到边界条件，根据傅立叶级数的正交性可确定待定常数。

14.5　复数球多项式系数递推公式

根据式（14-13）和（14-14）可得

$$\begin{cases} Z_{m,2,0} = \dfrac{1}{2!}D_{22} \\ Z_{m,2,1} = D_{23} \\ Z_{m,3,0} = \dfrac{D_{23}}{3}D_{22} \\ Z_{m,3,1} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3}D_{23}^2 + \dfrac{D_{22}}{3!} \\ Z_{m,4,0} = \dfrac{1}{3}D_{22} + \dfrac{D_{22}^2}{4!} - \dfrac{D_{23}^2}{3!}D_{22} \\ Z_{m,4,1} = \dfrac{2}{3}D_{23} - \dfrac{1}{3}D_{23}^3 + \dfrac{1}{3!}D_{23}D_{22} \end{cases} \tag{14-23}$$

其中 $D_{22} = K_{22}m^2, D_{23} = K_{23}m$ 。

当 j 为大于或等于 6 的偶数时，可得

$$\begin{cases} Z_{m,j,0} = -Z_{m,j-4,0}\dfrac{(j-4)(j-3)}{j(j-1)} + 2D_{23}\dfrac{1}{j(j-1)} \\ \qquad [Z_{m,j-3,0}(j-3) - Z_{m,j-1,0}(j-1)] + Z_{m,j-2,0}\dfrac{2(j-2)^2 + D_{22}}{j(j-1)} \\ Z_{m,j,1} = -Z_{m,j-4,1}\dfrac{(j-4)(j-3)}{j(j-1)} - 2D_{23}\dfrac{1}{j(j-1)} \\ \qquad [Z_{m,j-3,1}(j-3) - Z_{m,j-1,1}(j-1)] + Z_{m,j-2,1}\dfrac{2(j-2)^2 + D_{22}}{j(j-1)} \end{cases} \tag{14-24}$$

当 j 为大于或等于 5 的奇数时可得

$$\begin{cases} Z_{m,j,1} = -Z_{m,j-4,1}\dfrac{(j-4)(j-3)}{j(j-1)} + 2D_{23}\dfrac{1}{j(j-1)} \\ \qquad [Z_{m,j-3,1}(j-3) - Z_{m,j-1,1}(j-1)] + Z_{m,j-2,1}\dfrac{2(j-2)^2 + D_{22}}{j(j-1)} \\ Z_{m,j,0} = -Z_{m,j-4,0}\dfrac{(j-4)(j-3)}{j(j-1)} + 2D_{23}\dfrac{1}{j(j-1)} \\ \qquad [-Z_{m,j-3,0}(j-3) + Z_{m,j-1,0}(j-1)] + Z_{m,j-2,0}\dfrac{2(j-2)^2 + D_{22}}{j(j-1)} \end{cases} \tag{14-25}$$

14.6　复数球面函数解实数化分析

分析式（14－13）（14－14）（14－23）（14－24）和（14－25）可得以下关系式

$$\begin{cases} Z_{m,2j,0} = Z_{-m,2j,0} \\ Z_{m,2j+1,0} = -Z_{-m,2j+1,0} \\ Z_{m,2j,1} = Z_{-m,2j,1} \\ Z_{m,2j+1,1} = -Z_{-m,2j+1,1} \end{cases} \tag{14-26}$$

根据线性偏微分方程的可叠加性，当 $m \neq 0$ 时

$$T = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_{m,k}x^{k}\right)e^{im\varphi} = \mathrm{Re}(T) + \mathrm{iIm}(T) \tag{14-27}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(T) = {} & a_0 + \frac{a_1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + T_0 + \\
& \sum_{m=-\infty}^{-1}\{A_{m,0,r}[Z_{s_1}(x)\cos(m\varphi) - Z_{s_2}(x)\sin(m\varphi)] - A_{m,0,i}[Z_{s_2}(x)\cos(m\varphi) + Z_{s_1}(x)\sin(m\varphi)] + \\
& A_{m,1,r}[Z_{s_3}(x)\cos(m\varphi) - Z_{s_4}(x)\sin(m\varphi)] - A_{m,1,i}[Z_{s_3}(x)\sin(m\varphi) + Z_{s_4}(x)\cos(m\varphi)]\} + \\
& \sum_{m=1}^{\infty}\{A_{m,0,r}[Z_{s_1}(x)\cos(m\varphi) - Z_{s_2}(x)\sin(m\varphi)] - A_{m,0,i}[Z_{s_2}(x)\cos(m\varphi) + Z_{s_1}(x)\sin(m\varphi)] + \\
& A_{m,1,r}[Z_{s_3}(x)\cos(m\varphi) - Z_{s_1}(x)\sin(m\varphi)] - A_{m,1,i}[Z_{s_3}(x)\sin(m\varphi) + Z_{s_4}(x)\cos(m\varphi)]\}
\end{aligned} \tag{14-28}$$

因此，可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(T) = {} & a_0 + \frac{a_1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + T_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\{(A_{m,0,r} + A_{(-m),0,r})[Z_{s_1}(x)\cos(m\varphi) - Z_{s_2}(x)\sin(m\varphi)] \\
& - (A_{m,0,i} - A_{(-m),0,i})[Z_{s_2}(x)\cos(m\varphi) + Z_{s_1}(x)\sin(m\varphi)] + \\
& (A_{m,1,r} + A_{(-m),1,r})[Z_{s_3}(x)\cos(m\varphi) - Z_{s_4}(x)\sin(m\varphi)] - \\
& (A_{m,1,i} - A_{(-m),1,i})[Z_{s_3}(x)\sin(m\varphi) + Z_{s_4}(x)\cos(m\varphi)]\}
\end{aligned} \tag{14-29}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(T) = {} & \sum_{m=-\infty}^{-1}\{A_{m,0,r}[Z_{s_2}(x)\cos(m\varphi) + Z_{s_1}(x)\sin(m\varphi)] + \\
& A_{m,0,i}[Z_{s_1}(x)\cos(m\varphi) - Z_{s_2}(x)\sin(m\varphi)] + A_{m,1,r}[Z_{s_4}(x)\cos(m\varphi) + Z_{s_3}(x)\sin(m\varphi)] + \\
& A_{m,1,i}[-Z_{s_4}(x)\sin(m\varphi) + Z_{s_3}(x)\cos(m\varphi)]\} + \sum_{m=1}^{\infty}\{A_{m,0,r}[Z_{s_2}(x)\cos(m\varphi) + Z_{s_1}(x)\sin(m\varphi)] + \\
& A_{m,0,i}[Z_{s_1}(x)\cos(m\varphi) - Z_{s_2}(x)\sin(m\varphi)] + A_{m,1,r}[Z_{s_4}(x)\cos(m\varphi) + Z_{s_3}(x)\sin(m\varphi)] + \\
& A_{m,1,i}[-Z_{s_4}(x)\sin(m\varphi) + Z_{s_3}(x)\cos(m\varphi)]\}
\end{aligned}$$

这样可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(T) = {} & \sum_{m=1}^{\infty}\{(A_{m,0,r} - A_{(-m),0,r})[Z_{s_2}(x)\cos(m\varphi) + Z_{s_1}(x)\sin(m\varphi)] + \\
& (A_{m,0,i} + A_{(-m),0,i})[Z_{s_1}(x)\cos(m\varphi) - Z_{s_2}(x)\sin(m\varphi)] + \\
& (A_{m,1,r} - A_{(-m),1,r})[Z_{s_4}(x)\cos(m\varphi) + Z_{s_3}(x)\sin(m\varphi)] + \\
& (A_{m,1,i} + A_{(-m),1,i})[-Z_{s_4}(x)\sin(m\varphi) + Z_{s_3}(x)\cos(m\varphi)]\}
\end{aligned} \tag{14-30}$$

根据数学物理实数化原理，令 $\mathrm{Im}(T) = 0$ 可得

$$\begin{cases} A_{m,0,r} = A_{(-m),0,r} \\ A_{m,0,i} = -A_{(-m),0,i} \\ A_{m,1,r} = A_{(-m),1,r} \\ A_{m,1,i} = -A_{(-m),1,i} \end{cases} \tag{14-31}$$

将式（14-31）代入式（14-27）可得

$$T = \mathrm{Re}(T) = 2\mathrm{Re}(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} A_{m,k}x^k e^{im\varphi}) = a_0 + \frac{a_1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}) + T_0 +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\{2A_{m,0,r}[Z_{s_1}(x)\cos(m\varphi) - Z_{s_2}(x)\sin(m\varphi)] - 2A_{m,0,i}[Z_{s_2}(x)\cos(m\varphi) + Z_{s_1}(x)\sin(m\varphi)] +$$

$$2A_{m,1,r}[Z_{s_3}(x)\cos(m\varphi) - Z_{s_1}(x)\sin(m\varphi)] - 2A_{m,1,i}[Z_{s_3}(x)\sin(m\varphi) + Z_{s_1}(x)\cos(m\varphi)]\} \tag{14-32}$$

第 15 章　球面与外界换热的各向异性球带面稳态温度场方程——参数复数球多项式与参数复数球面函数

各向异性薄壁结构与外界环境热传导问题是工程中经常遇到的问题，此问题提供了新的数学物理问题。本章针对考虑球面换热的各向异性球面稳态热传导问题进行求解，提出了第一类参数复数球多项式 $\Omega_{m,n}^{(1)}(x,\lambda)$、第二类参数复数球多项式 $\Omega_{m,n}^{(2)}(x,\lambda)$ 和参数复数球面函数 $Z_{b}(x,\varphi,\lambda)$，以求解各向异性球面稳态热传导方程，完成理论求解后，进行了验证数值计算。

15.1　球坐标下考虑球面换热的各向异性热传导偏微分方程

考虑曲线型各向异性薄球面，球半径为 R，温度场分布与径向坐标 r 无关，球面与外界环境换热，且在球面边界与外界也进行热交换。这样球坐标下稳态热传导控制偏微分方程为

$$k_{22}\frac{1}{\mathrm{R}^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+k_{33}\frac{1}{\mathrm{R}^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta})+2k_{23}\frac{1}{\mathrm{R}^2\sin\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi\partial\theta}-2\frac{h_a}{\delta}(T-T_a)=q \tag{15-1}$$

其中 $k_{22}=k_2\cos^2\beta+k_3\sin^2\beta, k_{23}=k_{32}=(k_2-k_3)\sin\beta\cos\beta, k_{33}=k_2\sin^2\beta+k_3\cos^2\beta$

式中 $T(\theta,\varphi)$ 为沿球面的温度函数，q 是热源函数，方向 2 为球坐标方向角 φ（$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$）方向（地理纬线方向），方向 3 为球坐标 θ（$0<\theta<\pi$）高低角方向（地理经线方向）。δ 为球壳厚，h_a 为球壳与球壳面上下介质之间的换热系数，T_a 为壳面上下介质的环境温度。k_{22}，k_{23}，k_{33} 为热传导系数，k_2，k_3 为各向异性介质两个主轴方向热传导常数（$k_2>k_3$），β 为 k_2 主轴方向与 φ 方向（地理纬线方向）的夹角。

引入如下参数变换

$$\lambda=-2\frac{h_aR^2}{k_{33}\delta}, q*=\frac{qR^2-2T_aR^2\frac{h_a}{\delta}}{k_{33}}, x=\cos\theta, K_{33}=1, K_{32}=K_{23}=\frac{k_{32}}{k_{33}}, K_{22}=\frac{k_{22}}{k_{33}} \tag{15-2}$$

可将方程（15－1）变换为如下偏微分方程

$$\frac{K_{22}}{1-x^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+[-2x\frac{\partial T}{\partial x}+(1-x^2)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}]K_{33}-2K_{23}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi\partial x}+\lambda T=q* \tag{15-3}$$

注意到带参数 λ 的方程（15－3）求解和没有参数的方程（14－3）求解的过程类似，但得到解和相关函数不一样。

15.2 参数球 Z_{is} 方程、参数复数球面函数、参数复数多项式及球面与环境换热球面热传导解

15.2.1 参数球 Z_{is} 方程、参数复数球面函数和参数复数多项式

设方程（15-3）有如下形式解

$$T = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(x) e^{im\varphi} \tag{15-4}$$

其中 $i^2 = -1$ ；m 为整数。

$m=0$ 时，方程（15-3）简化为

$$\left[-2x \frac{dT^*}{dx} + (1-x^2)\frac{d^2T^*}{dx^2}\right] + \lambda T^* = 0 \tag{15-5}$$

方程（15-5）是勒让德方程。设

$$\lambda = l^0(1+l^0) \tag{15-6}$$

方程（15-5）有以下阶数解

$$T^* = a_0 L_1(x,l^0) + a_1 L_2(x,l^0) \tag{15-7}$$

式中

$$L_1(x,l^0) = 1 - \frac{l^0(l^0+1)}{2!}x^2 + \frac{l^0(l^0-2)(l^0+1)(l^0+2)}{4!}x^4 - \cdots$$

$$L_2(x,l^0) = x - \frac{(l^0-1)(l^0+2)}{3!}x^3 + \frac{(l^0-1)(l^0-3)(l^0+2)(l^0+4)}{5!}x^5 - \cdots$$

其中 a_0 ，a_1 为待定实数常数。

对于 $m \neq 0$ ，将式（15-4）代入方程（15-3）可得

$$K_{33}(1-x^2)\frac{d^2 f_m}{dx^2} - (2xK_{33} + 2K_{23}im)\frac{df_m}{dx} - \frac{K_{22}m^2 f_m}{1-x^2} + \lambda f_m = 0 \tag{15-8}$$

方程（15-8）是一典型复数微分方程，这个复数微分方程在球坐标下各向异性数学物理问题求解中要经常遇到，可记为参数 Z_{is} 方程。

设

$$f_m(x) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{m,j} x^j \tag{15-9}$$

式中 j 为整数，$x \neq \pm 1$ ，$A_{m,j}$ 为复数常数。

结合式（15-1）和（15-9）可得

$$T = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} A_{m,j} x^j e^{im\varphi} \tag{15-10}$$

式（15-10）与（14-10）形式一样，但是由于控制偏微分方程不一样，式（15-10）与（14-10）实质是不一样的。同样，根据数学物理实数化原理，如果式（15-10）是问题的解，式（15-10）应该是实数函数，即

如果 $\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}A_{m,j}x^j e^{im\varphi}$ 是实数函数，当 $m \neq 0$，可得

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}A_{m,j}x^j e^{im\varphi} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}2A_{m,j}x^j e^{im\varphi}$$

本章 15.5 节给出了简略证明。

因为 $A_{m,j}$ 为待定复数常数，上面 $2A_{m,j}$ 可以改写为 $A_{m,j}$。因此可得

$$T = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}A_{m,j}x^j e^{im\varphi} \tag{15-11}$$

$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}A_{m,j}x^j e^{im\varphi}$ 记为参数复数球面函数，写为 $Z_{is}(x,\varphi,\lambda)$。**参数复数球面函数** $Z_{is}(x,\varphi,\lambda)$ 的实数形式下文给出。

将式（15-11）代入方程（15-3）化简可得

$$\begin{aligned}
&K_{33}[2A_{m,2} + 6xA_{m,3} + 12x^2A_{m,4} + 20x^3A_{m,5} + \sum_{j=4}^{\infty}x^jA_{m,j+2}(j+1)(j+2) - 4A_{m,2}x^2 - 12x^3A_{m,3} \\
&- 2\sum_{j=4}^{\infty}x^jA_{m,j+2}j(j-1) + \sum_{j=4}^{\infty}x^jA_{m,j-2}(j-2)(j-1)] - 2K_{23}im[A_{m,1} + 2xA_{m,2} + \\
&3x^2A_{m,3} + 4x^3A_{m,4} + \sum_{j=4}^{\infty}x^jA_{m,j+1}(j+1)] - K_{33}(2xA_{m,1} + 4x^2A_{m,2} + 6x^3A_{m,3} + 2\sum_{j=4}^{\infty}x^jA_{m,j}j) \\
&+ 2K_{23}im[x^2A_{m,1} + 2x^3A_{m,2} + \sum_{j=4}^{\infty}x^jA_{m,j-1}(j-1)] + 2K_{33}[x^3A_{m,1} + \sum_{j=4}^{\infty}x^jA_{m,j-2}(j-2)] - \\
&K_{22}m^2(A_{m,0} + xA_{m,1} + x^2A_{m,2} + x^3A_{m,3} + \sum_{j=4}^{\infty}x^jA_{m,j}) \\
&- \lambda(A_{m,0}x^2 + A_{m,1}x^3 + \sum_{j=4}^{\infty}x^jA_{m,j-2}) + \lambda(A_{m,0} + A_{m,1}x + A_{m,2}x^2 + A_{m,3}x^3 + \sum_{j=4}^{\infty}x^jA_{m,j}) = 0
\end{aligned} \tag{15-12}$$

式中 $A_{m,0} \neq 0$，$A_{m,1} \neq 0$。令式（15-12）中 x 的 0，1，2，3 幂次项前系数为 0，可以推得

$$\begin{cases}
A_{m,2} = \dfrac{1}{2!}\dfrac{(D_{22} - \lambda)}{K_{33}}A_{m,0} + i\dfrac{D_{23}}{K_{33}}A_{m,1} \\
A_{m,3} = i\dfrac{D_{23}}{3(K_{33})^2}(D_{22} - \lambda)A_{m,0} + A_{m,1}[\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3}\dfrac{D_{23}^2}{(K_{33})^2} + \dfrac{(D_{22} - \lambda)}{K_{33}3!}] \\
A_{m,4} = [4(K_{33})^2 - 2D_{23}^2 + K_{33}(D_{22} - \lambda)]\dfrac{iD_{23}}{3!(K_{33})^3}A_{m,1} + \\
A_{m,0}[\dfrac{\lambda}{12K_{33}} + \dfrac{(D_{22} - \lambda + 8K_{33})}{4!(K_{33})^2}(D_{22} - \lambda) - \dfrac{D_{23}^2}{3!(K_{33})^3}(D_{22} - \lambda)]
\end{cases} \tag{15-13}$$

式中 $D_{22} = K_{22}m^2$，$D_{23} = K_{23}m$。

令式（15-12）中 x 的 j 次幂项（$j>3$）为 0，可以推得四项递推公式

$$A_{m,j+2}=A_{m,j-2}\frac{\lambda-K_{33}(j-2)(j-1)}{(j+2)(j+1)K_{33}}-A_{m,j-1}2D_{23}\frac{\mathrm{i}(j-1)}{(j+2)(j+1)K_{33}}+$$
$$A_{m,j}\frac{2j^2K_{33}+D_{22}-\lambda}{(j+2)(j+1)K_{33}}+A_{m,j+1}\frac{2D_{23}\mathrm{i}}{(j+2)K_{33}}\tag{15-14}$$

结合式（15-12）和（15-13）可得递推公式

$$A_{m,j}=\mathrm{i}A_{m,1}Z_{m,j,1}(\lambda)+A_{m,0}Z_{m,j,0}(\lambda)\quad(j\text{ 为偶数})\tag{15-15a}$$
$$A_{m,j+1}=\mathrm{i}A_{m,0}Z_{m,j+1,0}(\lambda)+A_{m,1}Z_{m,j+1,1}(\lambda)\quad(j+1\text{ 为奇数})\tag{15-15b}$$

其中 $Z_{m,j,1}(\lambda),Z_{m,j,0}(\lambda)$，$Z_{m,j+1,0}(\lambda),Z_{m,j+1,1}(\lambda)$ 为实数，且均是参数 λ 的函数，可由本章 15.4 节公式推得。

将式（15-15a）和（15-15b）代入式（15-11）可得

$$\begin{aligned}T=\sum_{m=1}^{\infty}\{&A_{m,0}x^0\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}+A_{m,1}x^1\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}+\\&[\mathrm{i}A_{m,1}Z_{m,2,1}(\lambda)+A_{m,0}Z_{m,2,0}(\lambda)]x^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}+[\mathrm{i}A_{m,0}Z_{m,3,0}(\lambda)+A_{m,1}Z_{m,3,1}(\lambda)]x^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}+\\&[\mathrm{i}A_{m,1}Z_{m,4,1}(\lambda)+A_{m,0}Z_{m,4,0}(\lambda)]x^4\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}+[\mathrm{i}A_{m,0}Z_{m,5,0}(\lambda)+A_{m,1}Z_{m,5,1}(\lambda)]x^5\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}+\cdots+\\&[\mathrm{i}A_{m,1}Z_{m,j,1}(\lambda)+A_{m0}Z_{m,j,0}(\lambda)]x^j\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}+[\mathrm{i}A_{m,0}Z_{m,j+1,0}(\lambda)+A_{m,1}Z_{m,j+1,1}(\lambda)]x^{j+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}+\cdots\}\end{aligned}\tag{15-16}$$

式中 $A_{m,0},A_{m,1}$，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$ 为复数，可写为

$$\begin{cases}A_{m,0}=A_{m,0,r}+\mathrm{i}A_{m,0,i}\\A_{m,1}=A_{m,1,r}+\mathrm{i}A_{m,1,i}\\\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}=\cos(m\varphi)+\mathrm{i}\sin(m\varphi)\end{cases}\tag{15-17}$$

其中 $A_{m,0,r},A_{m,0,i},A_{m,1,r},A_{m,1,i}$ 为实数。

将式（15-17）代入式（15-16）化简可得

$$T=\sum_{m=1}^{\infty}\{(A_{m,0,r}+\mathrm{i}A_{m,0,i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}[Z_{s_1}(x,\lambda)+\mathrm{i}Z_{s_2}(x,\lambda)]+(A_{m,1,r}+\mathrm{i}A_{m,1,i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}[Z_{s_3}(x,\lambda)+\mathrm{i}Z_{s_4}(x,\lambda)]\}\tag{15-18a}$$

$$\begin{aligned}T=\sum_{m=1}^{\infty}\{&A_{m,0,r}[Z_{s_1}(x,\lambda)\cos(m\varphi)-Z_{s_2}(x,\lambda)\sin(m\varphi)]-\\&A_{m,0,i}[Z_{s_2}(x,\lambda)\cos(m\varphi)+Z_{s_1}(x,\lambda)\sin(m\varphi)]+\\&A_{m,1,r}[Z_{s_3}(x,\lambda)\cos(m\varphi)-Z_{s_4}(x,\lambda)\sin(m\varphi)]-\\&A_{m,1,i}[Z_{s_3}(x,\lambda)\sin(m\varphi)+Z_{s_4}(x,\lambda)\cos(m\varphi)]\}\end{aligned}\tag{15-18b}$$

其中 $Z_{s_1}(x,\lambda),Z_{s_2}(x,\lambda),Z_{s_3}(x,\lambda),Z_{s_4}(x,\lambda)$ 为实数多项式，可分别称为第一、二、三、四种参数球多项式，分别定义如下

$$\begin{cases} Z_{s_1}(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_{m,2k,0}(\lambda)x^{2k} + 1 \\ Z_{s_2}(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_{m,2k+1,0}(\lambda)x^{2k+1} \\ Z_{s_3}(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_{m,2k+1,1}(\lambda)x^{2k+1} + x \\ Z_{s_4}(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_{m,2k,1}(\lambda)x^{2k} \end{cases} \tag{15-19}$$

其中 $Z_{s_1}(x,\lambda),Z_{s_2}(x,\lambda),Z_{s_3}(x,\lambda),Z_{s_4}(x,\lambda)$ 多项式由 m，j（$j=2k$ 或 $j=2k+1$）和 k_{22}，k_{33}，k_{23}，λ 确定。在某种意义上，$Z_{s_1}(x,\lambda),Z_{s_2}(x,\lambda),Z_{s_3}(x,\lambda),Z_{s_4}(x,\lambda)$ 为各向异性温度场的特征函数。

定义：参数复数球多项式 $\Omega_{m,n}^{(k)}(x,\lambda)$

$$\begin{cases} \Omega_{m,n}^{(1)}(x,\lambda) = Z_{s_1}(x,\lambda) + \mathrm{i}Z_{s_2}(x,\lambda) \\ \Omega_{m,n}^{(2)}(x,\lambda) = Z_{s_3}(x,\lambda) + \mathrm{i}Z_{s_4}(x,\lambda) \end{cases}$$

式中 $\Omega_{m,n}^{(1)}(x,\lambda)$ 称为第一类参数复数球多项式，$\Omega_{m,n}^{(2)}(x,\lambda)$ 称为第二类参数复数球多项式。(15-18b) 为方程 (15.3) 参数复数球面函数解的实数形式。

分析计算表明，对于各向同性热传导和正交异性热传导问题，$Z_{s_2}(x,\lambda)=0,Z_{s_4}(x,\lambda)=0$，那么有

$$\Omega_{m,n}^{(1)}(x,\lambda) = Z_{s_1}(x,\lambda),\Omega_{m,n}^{(2)}(x,\lambda) = Z_{s_3}(x,\lambda)$$

这时参数复数球多项式均变为实数多项式，与已有的经典实数幂级数方法一致。

15.2.2　与环境换热的各向异性球面热传导解

根据偏微分方程的可叠加性原理，可得方程 (15-3) 一般解析解

$$\begin{aligned} T = \sum_{m=1}^{\infty} \{ & A_{m,0,r}[Z_{s_1}(x,\lambda)\cos(m\varphi) - Z_{s_2}(x,\lambda)\sin(m\varphi)] - \\ & A_{m,0,i}[Z_{s_2}(x,\lambda)\cos(m\varphi) + Z_{s_1}(x,\lambda)\sin(m\varphi)] + \\ & A_{m,1,r}[Z_{s_3}(x,\lambda)\cos(m\varphi) - Z_{s_4}(x,\lambda)\sin(m\varphi)] - \\ & A_{m,1,i}[Z_{s_3}(x,\lambda)\sin(m\varphi) + Z_{s_4}(x,\lambda)\cos(m\varphi)]\} + \\ & a_0 L_1(x,l^0) + a_1 L_2(x,l^0) + T_0 \end{aligned} \tag{15-20}$$

其中 $A_{m,0,r},A_{m,0,i},A_{m,1,r},A_{m,1,i}$ $(m=1,\cdots,\infty)$，a_0 和 a_1 为实数常数；T_0 为方程 (15-3) 特解。

式 (15-19) 中 $Z_{m,2k,0}(\lambda),Z_{m,2k+1,0}(\lambda),Z_{m,2k+1,1}(\lambda),Z_{m,2k,1}(\lambda)$ 可以根据式 (15-23) ～ (15-25) 计算。这样，多项式 $Z_{s_1}(x,\lambda),Z_{s_2}(x,\lambda),Z_{s_3}(x,\lambda),Z_{s_4}(x,\lambda)$ 中的 j 可以在 $2J$ 截断。如果式 (15-20) 级数解的 m 在 M 处截断，并代入到具有特定的纬度余角 θ 的边界条件，那么级数解存在 $4M+2$ 待定常数，具体包括 $A_{m,0,r},A_{m,0,i},A_{m,1,r},A_{m,1,i}$ $(1\leqslant m$

$\leqslant M$), a_0, a_1 。注意到，球带具有两个具有特定纬度余角 θ 的边界条件，这样根据 $\cos m\varphi$ 和 $\sin m\varphi$ 傅立叶级数正交性，可以得到 $4M+2$ 方程，可以求解 $4M+2$ 个未知数，问题得解。

作为特例，考虑球带面各向同性热传导问题，$\cos\theta$ 的幂级数和 φ 的傅立叶级数组合构建了基于分离变量法的球面函数。本章引入的复数球面函数展开方法则可用来求解各向异性球面热传导问题，那么用复数球面函数方法求解各向同性球面热传导问题将会得到什么结果？下面进行说明。

球坐标下各向同性热传导方程为

$$\frac{k}{1-x^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}+k[-2x\frac{\partial T}{\partial x}+(1-x^2)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}]+\lambda T=q* \tag{15-21a}$$

其中

$$k_{22}=k_{23}=k, k_{23}=0 \tag{15-21b}$$

将式（15－21b）代入式（15－13）（15－14），可得

$$Z_{m,2k+1,0}=0, Z_{m,2k,1}=0, Z_{s_2}(x,\lambda)=0, Z_{s_1}(x,\lambda)=0$$

因此，式（15－20）可改写为

$$T=\sum_{m=1}^{\infty}[A_{m,0,r}Z_{s_1}(x,\lambda)\cos(m\varphi)-A_{m,0,i}Z_{s_1}(x,\lambda)\sin(m\varphi)+ \\ A_{m,1,r}Z_{s_3}(x,\lambda)\cos(m\varphi)-A_{m,1,i}Z_{s_3}(x,\lambda)\sin(m\varphi)]+a_0L_1(x,l^0)+a_1L_2(x,l^0)+T_0 \tag{15-22}$$

式（15－22）为各向同性球带热传导稳态问题的解析解，同样这与分离变量法得到的球面函数解是一致的，这也从另外一个角度表明本章引入的复数球面函数方法是正确的。

15.3 数值实验

考虑各向异性薄球面，其球面半径 R 为 $1m$，$T_a=0$，$\delta=0.01m$ 。热传导常数为 $k_2=0.30\text{kcal/(m}\cdot\text{h}\cdot℃)$，$k_3=0.11\text{kcal/(m}\cdot\text{h}\cdot℃)$，$h_a=0.26\text{kcal/(m}^2\cdot\text{h}\cdot℃)$ 。上纬度边界（$\theta_1=30°$）给定温度边界条件为 $(6\sin\varphi+4\cos\varphi+11)$℃，下纬度边界（$\theta_2=120°$）给定温度边界条件为 $(7\sin\varphi+5\cos\varphi+12)$℃，球面与外界对流换热。这样的各向异性介质中稳态温度场可以视为与径向 r 无关，温度只与 (θ,φ) 有关即 $T=T(x,\varphi)$ 。$T(\cos\theta,\varphi)$ 单位为（℃），表中 φ 和 θ 的单位为（°）。

（1）复数球面函数解的收敛性验证

针对各向异性角 $\beta=45°$ 的各向异性薄球面进行数值实验，其他计算参数与上节相同。首先增加式（15－11）中 j 的计算项数 J，观察 $T(\cos\frac{41.25}{180}\pi,0)$(℃) 变化趋势，见表 15－1～表 15－2。

表 15 - 1　$T(\cos\frac{41.25}{180}\pi,0)$(℃)，$\beta=0°$

J	100	200	1000	10000
$T(\cos\frac{41.25}{180}\pi,0)$	0.1819	0.1819	0.1819	0.1819

表 15 - 2　$T(\cos\frac{41.25}{180}\pi,0)$(℃)，$\beta=45°$

J	100	200	1000	10000
$T(\cos\frac{41.25}{180}\pi,0)$	0.5364	0.5364	0.5364	0.5364

表 15 - 1 和 15 - 2 显示式（15 - 20）收敛稳定。计算发现对于不同的计算参数，$Z_{is}(x,\varphi,\lambda)$ 参数复数球面函数收敛速率不同，当 $\theta\to0°$ 或 $\theta\to180°$ 时，需要增加 J。当 $\theta=0°$ 或 $\theta=180°$，$Z_{is}(x,\varphi,\lambda)$ 随着 J 增加可能趋向于无限大。

（2）级数解对边界条件符合性验证

计算参数同上。计算 $J=1000$。计算结果见表 15 - 3 和表 15 - 4。

表 15 - 3　$T(\cos\theta,\varphi)$(℃)，$\beta=0°$

θ \ φ	0	45	90	135	180	270	315
30	15.000	18.070	17.000	12.410	7.000	5.000	9.586
40	0.296	0.355	0.335	0.246	0.142	0.103	0.192
60	1.285E−04	1.535E−04	1.448E−04	1.075E−04	6.338E−05	4.709E−05	8.444E−05
75	1.024E−06	1.223E−06	1.144E−06	8.327E−07	4.710E−07	3.503E−07	6.619E−07
90	0.179E−03	2.150E−04	1.998E−04	1.423E−04	7.643E−05	5.587E−05	1.133E−04
110	0.366	0.441	0.409	0.230	0.153	0.110	0.229
120	17.000	20.490	19.000	13.410	7.000	5.000	10.590

表 15 - 4　$T(\cos\theta,\varphi)$(℃)，$\beta=45°$

θ \ φ	0	45	90	135	180	270	315
30	15.000	18.070	17.000	12.410	7.000	5.000	9.586
40	0.7743	0.9748	0.9588	0.7357	0.4361	0.2516	0.4748
60	2.321E−04	3.122E−03	3.280E−03	2.702E−03	1.726E−03	7.667E−04	1.345E−03
75	9.922E−05	1.160E−04	1.072E−04	7.789E−05	4.528E−05	3.731E−05	6.662E−05
90	4.152E−03	4.587E−03	3.912E−03	2.522E−03	1.232E−03	1/472E−03	2.862E−03
110	1.050	1.227	1.105	0.7557	0.3838	0.3291	0.6783
120	17.000	20.490	19.000	13.410	7.000	5.000	10.590

表 15 - 3～表 15 - 4 表明（15 - 20）解满足边界条件。

15.4 参数复数球多项式系数递推公式

根据式（15 - 13）和（15 - 14）可得

$$\begin{cases} Z_{m,2,0}(\lambda) = \dfrac{1}{2!}(D_{22} - \lambda) \\ Z_{m,2,1}(\lambda) = D_{23} \\ Z_{m,3,0}(\lambda) = \dfrac{D_{23}}{3}(D_{22} - \lambda) \\ Z_{m,3,1}(\lambda) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3}D_{23}^2 + \dfrac{(D_{22} - \lambda)}{3!} \\ Z_{m,4,0}(\lambda) = \dfrac{1}{3}D_{22} - \dfrac{1}{4}\lambda + \dfrac{(D_{22} - \lambda)^2}{4!} - \dfrac{D_{23}^2}{3!}(D_{22} - \lambda) \\ Z_{m,4,1}(\lambda) = \dfrac{2}{3}D_{23} - \dfrac{1}{3}D_{23}^3 + \dfrac{1}{3!}D_{23}(D_{22} \dot{-} \lambda) \end{cases} \tag{15-23}$$

式中 $D_{22} = K_{22}m^2, D_{23} = K_{23}m$ 。

当 j 为大于或等于 4 的偶数时，可得

$$\begin{cases} Z_{m,j+2,0}(\lambda) = \\ \dfrac{\lambda - (j-2)(j-1)}{(j+2)(j+1)}Z_{m,j-2,0}(\lambda) + 2D_{23}\dfrac{(j-1)}{(j+2)(j+1)}Z_{m,j-1,0}(\lambda) + \\ \dfrac{2j^2 + D_{22} - \lambda}{(j+2)(j+1)}Z_{m,j,0}(\lambda) - \dfrac{2D_{23}}{j+2}Z_{m,j+1,0}(\lambda) \\ Z_{m,j+2,1}(\lambda) = \\ \dfrac{\lambda - (j-2)(j-1)}{(j+2)(j+1)}Z_{m,j-2,1}(\lambda) - 2D_{23}\dfrac{(j-1)}{(j+2)(j+1)}Z_{m,j-1,1}(\lambda) + \\ \dfrac{2j^2 + D_{22} - \lambda}{(j+2)(j+1)}Z_{m,j,1}(\lambda) + \dfrac{2D_{23}}{j+2}Z_{m,j+1,1}(\lambda) \end{cases} \tag{15-24}$$

当 j 为大于或等于 3 的奇数时可得

$$\begin{cases} Z_{m,j+2,1}(\lambda) = \\ \dfrac{\lambda - (j-2)(j-1)}{(j+2)(j+1)}Z_{m,j-2,1}(\lambda) + 2D_{23}\dfrac{(j-1)}{(j+2)(j+1)}Z_{m,j-1,1}(\lambda) + \\ \dfrac{2j^2 + D_{22} - \lambda}{(j+2)(j+1)}Z_{m,j,1}(\lambda) - \dfrac{2D_{23}}{j+2}Z_{m,j+1,1}(\lambda)Z_{m,j+2,0}(\lambda) = \\ \dfrac{\lambda - (j-2)(j-1)}{(j+2)(j+1)}Z_{m,j-2,0}(\lambda) - 2D_{23}\dfrac{(j-1)}{(j+2)(j+1)}Z_{m,j-1,0}(\lambda) + \\ \dfrac{2j^2 + D_{22} - \lambda}{(j+2)(j+1)}Z_{m,j,0}(\lambda) + \dfrac{2D_{23}}{j+2}Z_{m,j+1,0}(\lambda) \end{cases} \tag{15-25}$$

15.5 参数复数球面函数解实数化分析

分析式（15-13）（15-14）（15-23）（15-24）和（15-25）可得以下关系式

$$\begin{cases} Z_{m,2j,0}(\lambda) = Z_{-m,2j,0}(\lambda) \\ Z_{m,2j+1,0}(\lambda) = -Z_{-m,2j+1,0}(\lambda) \\ Z_{m,2j,1}(\lambda) = Z_{-m,2j,1}(\lambda) \\ Z_{m,2j+1,1}(\lambda) = -Z_{-m,2j+1,1}(\lambda) \end{cases} \tag{15-26}$$

根据线性偏微分方程的可叠加性，当 $m \neq 0$ 时

$$T = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} A_{m,k}x^{k}\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} = \mathrm{Re}(T) + \mathrm{iIm}(T) \tag{15-27}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(T) = \sum_{m=-\infty}^{-1} \{ & A_{m,0,r}[Z_{s_1}(x,\lambda)\cos(m\varphi) - Z_{s_2}(x,\lambda)\sin(m\varphi)] - \\ & A_{m,0,i}[Z_{s_2}(x,\lambda)\cos(m\varphi) + Z_{s_1}(x,\lambda)\sin(m\varphi)] + \\ & A_{m,1,r}[Z_{s_3}(x,\lambda)\cos(m\varphi) - Z_{s_4}(x,\lambda)\sin(m\varphi)] - \\ & A_{m,1,i}[Z_{s_3}(x,\lambda)\sin(m\varphi) + Z_{s_4}(x,\lambda)\cos(m\varphi)]\} + \\ \sum_{m=1}^{\infty} \{ & A_{m,0,r}[Z_{s_1}(x,\lambda)\cos(m\varphi) - Z_{s_2}(x,\lambda)\sin(m\varphi)] - \\ & A_{m,0,i}[Z_{s_2}(x,\lambda)\cos(m\varphi) + Z_{s_1}(x,\lambda)\sin(m\varphi)] + \\ & A_{m,1,r}[Z_{s_3}(x,\lambda)\cos(m\varphi) - Z_{s_4}(x,\lambda)\sin(m\varphi)] - \\ & A_{m,1,i}[Z_{s_3}(x,\lambda)\sin(m\varphi) + Z_{s_4}(x,\lambda)\cos(m\varphi)]\} + T^{*} \end{aligned}$$

这样有

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(T) = \sum_{m=1}^{\infty} \{ & (A_{m,0,r} + A_{(-m),0,r})[Z_{s_1}(x,\lambda)\cos(m\varphi) - Z_{s_2}(x,\lambda)\sin(m\varphi)] - \\ & (A_{m,0,i} - A_{(-m),0,i})[Z_{s_2}(x,\lambda)\cos(m\varphi) + Z_{s_1}(x,\lambda)\sin(m\varphi)] + \\ & (A_{m,1,r} + A_{(-m),1,r})[Z_{s_3}(x,\lambda)\cos(m\varphi) - Z_{s_4}(x,\lambda)\sin(m\varphi)] - \\ & (A_{m,1,i} - A_{(-m),1,i})[Z_{s_3}(x,\lambda)\sin(m\varphi) + Z_{s_4}(x,\lambda)\cos(m\varphi)]\} + T^{*} \end{aligned}$$

可推导得下式

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(T) = \sum_{m=-\infty}^{-1} \{ & A_{m,0,r}[Z_{s_2}(x,\lambda)\cos(m\varphi) + Z_{s_1}(x,\lambda)\sin(m\varphi)] + \\ & A_{m,0,i}[Z_{s_1}(x,\lambda)\cos(m\varphi) - Z_{s_2}(x,\lambda)\sin(m\varphi)] + \\ & A_{m,1,r}[Z_{s_3}(x,\lambda)\sin(m\varphi) + Z_{s_4}(x,\lambda)\cos(m\varphi)] + \\ & A_{m,1,i}[Z_{s_3}(x,\lambda)\cos(m\varphi) - Z_{s_4}(x,\lambda)\sin(m\varphi)]\} + \\ \sum_{m=1}^{\infty} \{ & A_{m,0,r}[Z_{s_2}(x,\lambda)\cos(m\varphi) + Z_{s_1}(x,\lambda)\sin(m\varphi)] + \end{aligned}$$

$$A_{m,0,i}[Z_{s_1}(x,\lambda)\cos(m\varphi)-Z_{s_2}(x,\lambda)\sin(m\varphi)]+$$
$$A_{m,1,r}[Z_{s_3}(x,\lambda)\sin(m\varphi)+Z_{s_4}(x,\lambda)\cos(m\varphi)]+$$
$$A_{m,1,i}[Z_{s_3}(x,\lambda)\cos(m\varphi)-Z_{s_4}(x,\lambda)\sin(m\varphi)]\}$$

对上式化简可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(T)=\sum_{m=1}^{\infty}\{&(A_{m,0,r}-A_{(-m),0,r})[Z_{s_2}(x,\lambda)\cos(m\varphi)+Z_{s_1}(x,\lambda)\sin(m\varphi)]+\\&(A_{m,0,i}+A_{(-m),0,i})[Z_{s_1}(x,\lambda)\cos(m\varphi)-Z_{s_2}(x,\lambda)\sin(m\varphi)]+\\&(A_{m,1,r}-A_{(-m),1,r})[Z_{s_3}(x,\lambda)\sin(m\varphi)+Z_{s_4}(x,\lambda)\cos(m\varphi)]+\\&(A_{m,1,i}+A_{(-m),1,i})[Z_{s_3}(x,\lambda)\cos(m\varphi)-Z_{s_4}(x,\lambda)\sin(m\varphi)]\}\end{aligned}$$

根据实数化原理，令 $\mathrm{Im}(T)=0$ 可得

$$\begin{cases}A_{m,0,r}=A_{(-m),0,r}\\A_{m,0,i}=-A_{(-m),0,i}\\A_{m,1,r}=A_{(-m),1,r}\\A_{m,1,i}=-A_{(-m),1,i}\end{cases}\tag{15-28}$$

将式（15-28）代入 $\mathrm{Re}(T)$ 可得

$$T=\mathrm{Re}(T)=2\mathrm{Re}[\sum_{m=1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{\infty}A_{m,k}x^{k})e^{im\varphi}]$$

和

$$\begin{aligned}T=\sum_{m=1}^{\infty}\{&2A_{m,0,r}[Z_{s_1}(x,\lambda)\cos(m\varphi)-Z_{s_2}(x,\lambda)\sin(m\varphi)]-\\&2A_{m,0,i}[Z_{s_2}(x,\lambda)\cos(m\varphi)+Z_{s_1}(x,\lambda)\sin(m\varphi)]+\\&2A_{m,1,r}[Z_{s_3}(x,\lambda)\cos(m\varphi)-Z_{s_4}(x,\lambda)\sin(m\varphi)]-\\&2A_{m,1,i}[Z_{s_3}(x,\lambda)\sin(m\varphi)+Z_{s_4}(x,\lambda)\cos(m\varphi)]\}+T^{*}\end{aligned}$$

第16章　各向异性球带面稳态热传导方程——缔合复数球多项式与缔合复数球面函数

本书第14章、第15章计算中表明，在球面南极、北极处，复数球多项式发散，如何满足南极、北极处解析解的有限性是完整球面、球体计算的一个自然条件，是一个需要解决的问题。为此，本章提出了缔合复数球多项式和缔合复数球面函数，用以求解各向异性球面稳态热传导方程。作者完成理论求解后，进行了验证数值计算，本章给出了计算结果。

16.1　球坐标下的各向异性球面热传导控制偏微分方程

考虑球坐标（r,θ,φ）中曲线型各向异性薄球面，球半径为 R，温度场分布与 r 无关，球面与外界环境绝热，仅在球面边界与外界进行热交换。这样球坐标下稳态热传导控制偏微分方程为

$$k_{22}\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+k_{33}\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta})+2k_{23}\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi\partial\theta}=q \quad (16-1)$$

其中热传导系数 $k_{22}=k_2\cos^2\beta+k_3\sin^2\beta, k_{23}=k_{32}=(k_2-k_3)\sin\beta\cos\beta, k_{33}=k_2\sin^2\beta+k_3\cos^2\beta$

式中 $T(\theta,\varphi)$ 为沿球面的温度函数，q 是热源函数，方向2为球坐标方向角 φ（$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$）方向（地理纬线方向），方向3为球坐标 θ（$0<\theta<\pi$）高低角方向（地理经线方向）。$r=R$ 为球面半径。k_2、k_3 为各向异性介质两个主轴方向热传导常数（$k_2>k_3$），β 为 k_2 主轴方向与 φ 方向（地理纬线方向）的夹角。

引入如下参数变换

$$q*=\frac{qR^2}{k_{33}},K_{33}=1,K_{32}=K_{23}=\frac{k_{23}}{k_{33}},K_{22}=\frac{k_{22}}{k_{33}},x=\cos\theta \quad (16-2)$$

可将方程（16-1）变换为如下偏微分方程

$$\frac{K_{22}}{(1-x^2)}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+K_{33}[-2x\frac{\partial T}{\partial x}+(1-x^2)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}]-2K_{23}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi\partial x}=q* \quad (16-3)$$

16.2　缔合球 Z_{is} 方程、缔合复数球面函数、缔合复数球多项式及各向异性球面热传导解

16.2.1　缔合球 Z_{is} 方程、缔合复数球面函数和缔合复数球多项式

设方程（16-3）有如下形式解

$$T=\sum_{m=-\infty}^{\infty}f_m(x)e^{im\varphi} \quad (16-4)$$

其中 $i^2=-1$；m 为整数。

$m=0$ 时，方程（16－3）简化为

$$-2x\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}+(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}=0 \tag{16-5}$$

设

$$T(x)=a_0+\sum_{j=1}^{\infty}a_jx^j \tag{16-6}$$

将式（16－6）代入方程（16－5）可得以下解

$$T(x)=a_0+a_1\sum_{j=1}^{\infty}\frac{x^{2j-1}}{2j-1}=a_0+\frac{a_1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$$

式中 a_0，a_1 为待定实数常数。

对于 $m\neq0$，将式（16－4）代入方程（16－3）可得

$$K_{33}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2f_m}{\mathrm{d}x^2}-(2xK_{33}+2K_{23}\mathrm{i}m)\frac{\mathrm{d}f_m}{\mathrm{d}x}-\frac{K_{22}m^2}{1-x^2}f_m=0 \tag{16-7}$$

对于 $m\neq0$，设

$$f_m(x)=(1-x^2)^{\frac{|m|}{2}}y_m(x) \tag{16-8}$$

式中 j 为整数，$x\neq\pm1$。$|m|$ 为 m 的绝对值。

将式（16－8）代入方程（16－3）可得

$$K_{33}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y_m(x)}{\mathrm{d}x^2}-2xK_{33}(|m|+1)\frac{\mathrm{d}y_m(x)}{\mathrm{d}x}+(-K_{33}|m|-m^2)y_m(x)+$$
$$\frac{(1-K_{22})m^2+2K_{23}\mathrm{i}m|m|x}{1-x^2}y_m(x)-2K_{23}\mathrm{i}m\frac{\mathrm{d}y_m(x)}{\mathrm{d}x}=0 \tag{16-9a}$$

对于各向异性介质 $K_{22}\neq1$，设

$$y_m(x)=(1-x^2)X_m(x)$$

将上式代入式（16－9a）可得

$$K_{33}(1-x^2)^2\frac{\mathrm{d}^2X(x)}{\mathrm{d}x^2}-2[K_{33}x(|m|+3)+K_{23}\mathrm{i}m](1-x^2)\frac{\mathrm{d}X(x)}{\mathrm{d}x}+\{-m^2K_{22}+$$
$$K_{33}(|m|+2)^2+2\mathrm{i}K_{23}m(|m|+2)x+[-K_{33}(|m|+2)(|m|+3)](1-x^2)\}X(x)=0 \tag{16-9b}$$

再引入新的参数变换

$$E_{33}=|m|+3,E_{22}=[K_{22}-K_{33}\frac{(|m|+2)^2}{m^2}]\frac{1}{K_{33}},E_{23}=\frac{K_{23}}{K_{33}},\lambda_m=-(|m|+2)(|m|+3)$$

采用以上参数变换，可将方程（16－9b）改写为

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2X(x)}{\mathrm{d}x^2}-(2xE_{33}+2E_{23}\mathrm{i}m)\frac{\mathrm{d}X(x)}{\mathrm{d}x}+[-\frac{m^2E_{22}}{1-x^2}+\frac{2\mathrm{i}E_{23}m(|m|+2)}{1-x^2}x+\lambda_m]X(x)=0 \tag{16-9c}$$

方程（16－9c）是一典型的复数微分方程，这个复数微分方程在球坐标下各向异性数学物理问题求解中要经常遇到，可记为缔合球 Z_n 方程。

注意到方程（16－9c）和（14－8）结构类似，这预示着可以采用类似方法求解。

设

$$X(x)=\sum_{j=0}^{\infty}A_{m,j}x^{j} \tag{16-9d}$$

式中 j 为整数，$x\neq\pm1$ 。$A_{m,j}$ 为复数常数，这与实数级数法不同。

综上所述，可得以下函数形式

$$T=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}A_{m,j}\,(1-x^{2})^{\frac{|m|}{2}+1}x^{j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{16-10}$$

式（16－10）定义了一个复数级数函数。此处 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty}A_{m,j}\,(1-x^{2})^{\frac{m}{2}+1}x^{j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$ 可称为缔合复数球面函数（缔合 $\hat{Z}_{is}(\theta,\varphi)$ 函数）。根据数学物理实数化原理，描述现实物理现象的数学函数应该是实数函数，因此，如果式（16－10）是问题解，式（16－10）应该是实数函数，即

如果 $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty}A_{m,j}\,(1-x^{2})^{\frac{|m|}{2}+1}x^{j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$ 是实数函数，当 $m\neq0$ ，可得

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}A_{m,j}\,(1-x^{2})^{\frac{|m|}{2}+1}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}2A_{m,j}\,(1-x^{2})^{\frac{|m|}{2}+1}x^{j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{16-11}$$

因为 $A_{m,j}$ 为待定复数常数，上面 $2A_{m,j}$ 可以改写为 $A_{m,j}$ 。因此可得

$$T=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}A_{m,j}\,(1-x^{2})^{\frac{m}{2}+1}x^{j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{16-12}$$

将式（16－9d）代入方程（16－9c），经化简可得一个复杂的有关 x 的复数系数多项式控制方程（具体形式略去，读者可参照式（15.12）直接推导），式（16－9d）中 $A_{m,0}\neq0$ ，$A_{m,1}\neq0$ 。令所得复数系数多项式控制方程中 $(1-x^{2})^{\frac{|m|}{2}+1}$ ，$x\,(1-x^{2})^{\frac{|m|}{2}+1}$ ，$x^{2}\,(1-x^{2})^{\frac{|m|}{2}+1}$ ，$x^{3}\,(1-x^{2})^{\frac{|m|}{2}+1}$ 前系数为 0 可以推得

$$\begin{cases}A_{m,2}=\dfrac{1}{2!}(D_{22}-\lambda_{m})A_{m,0}+\mathrm{i}A_{m,1}D_{23}\\[2ex] A_{m,3}=\mathrm{i}\,\dfrac{D_{23}}{3}[D_{22}-\lambda_{m}-(m+2)]A_{m,0}+A_{m,1}\left(\dfrac{E_{33}}{3}-\dfrac{2}{3}D_{23}^{2}+\dfrac{D_{22}-\lambda_{m}}{3!}\right)\\[2ex] A_{m,4}=A_{m,0}\left\{\dfrac{(\lambda_{m})^{2}}{4!}+\lambda_{m}\,\dfrac{1}{3!}\left[-E_{33}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{D_{22}}{2}+(D_{23})^{2}\right]+\dfrac{(D_{23})^{2}}{3!}(2+|m|-D_{22})+\right.\\[2ex] \qquad\left.\dfrac{D_{22}}{3!}\left(1+\dfrac{D_{22}}{4}+E_{33}\right)\right\}+\mathrm{i}A_{m,1}\,\dfrac{D_{23}}{3!}\left[-\lambda_{m}+D_{22}+3E_{33}-|m|-1-2\,(D_{23})^{2}\right]\end{cases} \tag{16-13}$$

式中 $D_{22}=E_{22}m^{2}$ ，$D_{23}=E_{23}m$ 。

令复数系数多项式控制方程中 $x^{j}\,(1-x^{2})^{\frac{|m|}{2}+1}$ 项（$j>3$）前系数为 0，可以推得四项递推公式

$$\begin{aligned}A_{m,j+2}=&A_{m,j-2}\,\frac{\lambda_{m}-(j-2)(j-3+2E_{33})}{(j+2)(j+1)}-A_{m,j-1}2D_{23}\,\frac{\mathrm{i}(j+1+m)}{(j+2)(j+1)}+\\ &A_{m,j}\,\frac{2j^{2}+D_{22}+2E_{33}j-2j-\lambda_{m}}{(j+2)(j+1)}+A_{m,j+1}\,\frac{2D_{23}\mathrm{i}}{(j+2)}\end{aligned} \tag{16-14}$$

结合式（16 - 12）（16 - 13）和（16 - 14）可得递推公式

$$A_{m,j} = \mathrm{i}A_{m,1}\hat{Z}_{m,j,1} + A_{m,0}\hat{Z}_{m,j,0}\ (j\ \text{为偶数}) \tag{16 - 15a}$$

$$A_{m,j+1} = \mathrm{i}A_{m,0}\hat{Z}_{m,j+1,0} + A_{m,1}\hat{Z}_{m,j+1,1}\ (j+1\ \text{为奇数}) \tag{16 - 15b}$$

其中 $\hat{Z}_{m,j,1}, \hat{Z}_{m,j,0}, \hat{Z}_{m,j+1,0}, \hat{Z}_{m,j+1,1}$ 为实数，可由本章 16.6 节公式推得。

将式（16 - 15a）和（16 - 15b）代入式（16 - 12）可得

$$\begin{aligned} T = \sum_{m=1}^{\infty} [& A_{m,0}x^0 e^{\mathrm{i}m\varphi} + A_{m,1}x^1 e^{\mathrm{i}m\varphi} + (\mathrm{i}A_{m,1}\hat{Z}_{m,2,1} + A_{m,0}\hat{Z}_{m,2,0})x^2 e^{\mathrm{i}m\varphi} + \\ & (\mathrm{i}A_{m,0}\hat{Z}_{m,3,0} + A_{m,1}\hat{Z}_{m,3,1})x^3 e^{\mathrm{i}m\varphi} + (\mathrm{i}A_{m,1}\hat{Z}_{m,4,1} + A_{m,0}\hat{Z}_{m,4,0})x^4 e^{\mathrm{i}m\varphi} + \\ & (\mathrm{i}A_{m,0}\hat{Z}_{m,5,0} + A_{m,1}\hat{Z}_{m,5,1})x^5 e^{\mathrm{i}m\varphi} + \cdots + (\mathrm{i}A_{m,1}\hat{Z}_{m,j,1} + A_{m0}\hat{Z}_{m,j,0})x^j e^{\mathrm{i}m\varphi} + \\ & (\mathrm{i}A_{m,0}\hat{Z}_{m,j+1,0} + A_{m,1}\hat{Z}_{m,j+1,1})x^{j+1} e^{\mathrm{i}m\varphi} + \cdots](1 - x^2)^{\frac{m}{2}+1} \end{aligned} \tag{16 - 16}$$

式中 $A_{m,0}, A_{m,1}, e^{\mathrm{i}m\varphi}$ 为复数，可写为

$$\begin{cases} A_{m,0} = A_{m,0,r} + \mathrm{i}A_{m,0,i} \\ A_{m,1} = A_{m,1,r} + \mathrm{i}A_{m,1,i} \\ e^{\mathrm{i}m\varphi} = \cos(m\varphi) + \mathrm{i}\sin(m\varphi) \end{cases}$$

其中 $A_{m,0,r}, A_{m,0,i}, A_{m,1,r}, A_{m,1,i}$ 为实数。

定义缔合复数球多项式

$$\begin{cases} \hat{\Omega}_{m,n}^{(1)}(x) = [\hat{Z}_{s_1}(x) + \mathrm{i}\hat{Z}_{s_2}(x)](1 - x^2)^{\frac{|m|}{2}+1} \\ \hat{\Omega}_{m,n}^{(2)}(x) = [\hat{Z}_{s_3}(x) + \mathrm{i}\hat{Z}_{s_1}(x)](1 - x^2)^{\frac{|m|}{2}+1} \end{cases} \tag{16 - 17}$$

其中 $\hat{\Omega}_{m,n}^{(1)}(x)$ 称为第一类缔合复数球多项式，$\hat{\Omega}_{m,n}^{(2)}(x)$ 称为第二类缔合复数球多项式；

$\hat{Z}_{s_1}(x), \hat{Z}_{s_2}(x), \hat{Z}_{s_3}(x), \hat{Z}_{s_1}(x)$ 为实数多项式，定义如下

$$\begin{cases} \hat{Z}_{s_1}(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \hat{Z}_{m,2k,0}x^{2k} + 1 \\ \hat{Z}_{s_2}(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \hat{Z}_{m,2k+1,0}x^{2k+1} \\ \hat{Z}_{s_3}(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \hat{Z}_{m,2k+1,1}x^{2k+1} + x \\ \hat{Z}_{s_1}(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \hat{Z}_{m,2k,1}x^{2k} \end{cases} \tag{16 - 18}$$

其中 $\hat{Z}_{s_1}(x), \hat{Z}_{s_2}(x), \hat{Z}_{s_3}(x), \hat{Z}_{s_1}(x)$ 多项式由 m，j（$j = 2k$ 或 $j = 2k+1$）和 $k_{22}, k_{33}, k_{23}, \lambda_m$ 确定。$\hat{Z}_{s_1}(x), \hat{Z}_{s_2}(x), \hat{Z}_{s_3}(x), \hat{Z}_{s_1}(x)$ 分别称为第一、二、三、四种缔合球多项式。在某种

意义上，$\hat{Z}_{s_1}(x)$，$\hat{Z}_{s_2}(x)$，$\hat{Z}_{s_3}(x)$，$\hat{Z}_{s_4}(x)$ 为各向异性物理场的特征函数。

将式（16－17）和（16－18）代入式（16－16）可得

$$T=\sum_{m=1}^{\infty}[(A_{m,0,r}+\mathrm{i}A_{m,0,i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\overset{\wedge}{\Omega}{}^{(1)}_{m,n}(x)+(A_{m,1,r}+\mathrm{i}A_{m,1,i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\overset{\wedge}{\Omega}{}^{(2)}_{m,n}(x)](1-x^2)^{\frac{m}{2}+1} \tag{16-19a}$$

$$\begin{aligned}T=\sum_{m=1}^{\infty}\{&A_{m,0,r}[\hat{Z}_{s_1}(x)\cos(m\varphi)-\hat{Z}_{s_2}(x)\sin(m\varphi)]-A_{m,0,i}[\hat{Z}_{s_2}(x)\cos(m\varphi)+\hat{Z}_{s_1}(x)\sin(m\varphi)]+\\&A_{m,1,r}[\hat{Z}_{s_3}(x)\cos(m\varphi)-\hat{Z}_{s_1}(x)\sin(m\varphi)]-A_{m,1,i}[\hat{Z}_{s_3}(x)\sin(m\varphi)+\hat{Z}_{s_4}(x)\cos(m\varphi)]\}\\&(1-x^2)^{\frac{|m|}{2}+1}\end{aligned} \tag{16-19b}$$

定义：缔合复数球面函数 $\overset{\wedge}{\Omega}(x,\varphi)$

$$\overset{\wedge}{\Omega}(x,\varphi)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}A_{m,j}(1-x^2)^{\frac{|m|}{2}+1}x^j\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$$

式中 m，j 为整数，$x\neq\pm1$。$A_{m,j}$ 为复数常数。

16.2.2　各向异性球面稳态热传导缔合复数球面函数解

根据偏微分方程的可叠加性原理，可得方程（16－3）一般解析解

$$\begin{aligned}T=\sum_{m=1}^{\infty}\{&A_{m,0,r}[\hat{Z}_{s_1}(x)\cos(m\varphi)-\hat{Z}_{s_2}(x)\sin(m\varphi)]-A_{m,0,i}[\hat{Z}_{s_2}(x)\cos(m\varphi)+\hat{Z}_{s_1}(x)\sin(m\varphi)]+\\&A_{m,1,r}[\hat{Z}_{s_3}(x)\cos(m\varphi)-\hat{Z}_{s_4}(x)\sin(m\varphi)]-A_{m,1,i}[\hat{Z}_{s_3}(x)\sin(m\varphi)+\hat{Z}_{s_1}(x)\cos(m\varphi)]\}\\&(1-x^2)^{\frac{|m|}{2}+1}+a_0+\frac{a_1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})+T_0\end{aligned} \tag{16-20}$$

其中 $A_{m,0,r}$，$A_{m,0,i}$，$A_{m,1,r}$，$A_{m,1,i}$ $(m=1,\cdots,\infty)$，a_0 和 a_1 为实数常数；T_0 为方程（16－3）特解。

式（16－18）中 $\hat{Z}_{m,j,1}$，$\hat{Z}_{m,j,0}$，$\hat{Z}_{m,j+1,0}$，$\hat{Z}_{m,j+1,1}$ 可以根据本章 16.6 节公式计算确定。这样多项式 $\hat{Z}_{s_1}(x)$，$\hat{Z}_{s_2}(x)$，$\hat{Z}_{s_3}(x)$，$\hat{Z}_{s_4}(x)$ 中的 j 可以在 $2J$ 截断。如果式（16－20）级数解的 m 在 M 处截断，并代入到具有特定的纬度余角 θ 的边界条件，那么级数解存在 $4M+2$ 待定常数，具体包括 $A_{m,0,r}$，$A_{m,0,i}$，$A_{m,1,r}$，$A_{m,1,i}$ $(1\leqslant m\leqslant M)$，$a_0$，$a_1$。注意到，球带面有两个具有特定纬度余角 θ 的边界条件，这样根据 $\cos m\varphi$ 和 $\sin m\varphi$ 傅立叶级数正交性，可以得到 $4M+2$ 方程，可以求解 $4M+2$ 个未知数，问题得解。

作为特例，考虑球带面各向同性热传导问题，$\cos\theta$ 的幂级数和 φ 的傅立叶级数组合构建了基于分离变量法的球面函数。本章引入的缔合复数球面函数展开方法可用来求解各向同性球面热传导问题。

对于各向同性介质的完整球面（$K_{22}=1$，$K_{32}=0$），方程（16－9a）简化为

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2 y_m(x)}{\mathrm{d}x^2}-2x(m+1)\frac{\mathrm{d}y_m(x)}{\mathrm{d}x}-m(m+1)y_m(x)=0 \qquad (16-21)$$

方程（16－21）有解如下

$$y_m(x)=a_p P_0^{[m]}(x)+a_q Q_0^{[m]}(x) \qquad (16-22a)$$

式中 $P_0^{[m]}(x)$ 为 0 次第一类勒让德函数的 m 次偏导数，$Q_0^{[m]}(x)$ 为 0 次第二类勒让德函数的 m 次偏导数；a_p，a_q 为待定任意实数常数。

采用类似的步骤可得，各向同性完整球面稳态温度场一般解析解

$$T=\sum_{m=1}^{\infty}\{[A_{m,0,r}\cos m\varphi-A_{m,0,i}\sin m\varphi]P_0^{[m]}(x)(1-x^2)^{\frac{m}{2}}+$$

$$[A_{m,1,r}\cos m\varphi-A_{m,1,i}\sin m\varphi]Q_0^{[m]}(x)](1-x^2)^{\frac{m}{2}}\}+a_0+\frac{a_1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})+T_0$$

$$(16-22b)$$

式（16－22b）为各向同性完整球面稳态热传导问题的解析解。

16.3　数值实验

考虑各向异性薄球面，其球面半径 R 为 1m，热传导常数为 $k_2=0.30$kcal/(m・h・℃)，$k_3=0.11$kcal/(m・h・℃)。上纬度边界（$\theta_1=30°$）给定温度边界条件为 $(2\sin\varphi+\cos\varphi+5)$℃，下纬度边界（$\theta_2=80°$）给定温度边界条件为 $(4\sin\varphi+3\cos\varphi+8)$℃，球面与外界屏蔽。这样的各向异性介质中稳态温度场可以视为与径向 r 无关，温度只与 (θ,φ) 有关，即 $T=T(x,\varphi)$。$T(\cos\theta,\varphi)$ 单位为（℃），表中 φ 和 θ 的单位为（°）。

(1) 多项式 $\hat{Z}_{s_1}(x)$，$\hat{Z}_{s_2}(x)$，$\hat{Z}_{s_3}(x)$，$\hat{Z}_{s_4}(x)$ 系数分布

考虑多项式 $\hat{Z}_{s_1}(x)$，$\hat{Z}_{s_2}(x)$，$\hat{Z}_{s_3}(x)$，$\hat{Z}_{s_4}(x)$，需要研究分析多项式中的系数 $\hat{Z}_{m,j,1}$，$\hat{Z}_{m,j,0}$，$\hat{Z}_{m,j+1,0}$，$\hat{Z}_{m,j+1,1}$。对于上述各向异性球带面，各向异性角 $\beta=0°$ 时，系数 $\hat{Z}_{m,j,1}$，$\hat{Z}_{m,j,0}$，$\hat{Z}_{m,j+1,0}$，$\hat{Z}_{m,j+1,1}$ 显示在表 16－1，表 16－2（表中，$2k$ 和 $2k+1$ 用 j 表示）。

表 16－1　$\hat{Z}_{m,j,0}$，$\beta=0°$

j \ m	1	2	3
2	2.863636363636363	7.454545454545454	14.772727272727270
3	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000
4	5.139462839719675	22.504132281075500	68.341942223266120
5	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000
6	7.711197782332302	48.756323696889490	203.751362010267400
7	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000
8	10.520778111088300	88.524531817487340	477.934492680538500
9	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000
10	13.532272363188410	143.925942165015100	962.622072459938200

表 16 - 2 $\hat{Z}_{m,j,1}$ ，$\beta=0°$

j \ m	1	2	3
2	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000
3	2.287878796458244	4.151515175898870	6.924242481589316
4	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000
5	3.773347125337883	10.312947727784970	24.747176530889480
6	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000
7	5.413996396601545	20.224693353918070	64.460446993720280
8	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000
9	7.184526894551357	34.555128789233150	139.051095599719600
10	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000

对于各向异性角 $\beta=45°$ 的各向异性圆球面，系数 $\hat{Z}_{m,j+1,0}$，$\hat{Z}_{m,j+1,1}$ 数值计算结果见表 16 - 3 和表 16 - 4。

表 16 - 3 $\hat{Z}_{m,j,0}$ ，$\beta=45°$

j \ m	1	2	3
2	2.000000000000000	4.000000000000000	7.000000000000000
3	0.154471544715447	1.235772357723578	4.170731707317073
4	2.964207842612158	8.427325054627904	19.100832912102480
5	0.394991372451685	3.989317256024655	16.738999765754550
6	3.896034507524561	13.927604795350520	37.024401868834490
7	0.693476694717984	8.373355142183392	41.610523354008380
8	4.799817869488499	20.247680519258400	59.679119441483710
9	1.034882352604575	14.437958770627990	82.318290417063740
10	5.679100250260584	27.192965780662260	85.443878651118870
28	109.489761297365900	98.431841752554420	68.656326425223510
29	68.115251705786080	167.418158982737900	1916.745795286025000
30	125.971024447907500	105.885962707349000	−10.417315888697630
31	82.675669470064180	191.620036501038300	2281.392687751620000
40	17.048032349625220	137.946686821853000	−852.911166096510800
400	89.899163020052740	−14686.300913703210000	−2548900.668621454000000
401	134.465948019552800	19869.473193235340000	−482148.211732007300000
402	90.167301642966990	−14870.326366875150000	−2583224.04503602000000

表 16 - 4 $\hat{Z}_{m,j,1}$ ，$\beta=45°$

j \ m	1	2	3
2	0.463414634146342	0.926829268292683	1.390243902439025
3	1.856831246972581	2.427324977956214	3.044814536218342
4	1.048127566344075	2.824044920996504	5.592127218119297

续表

j \ m	1	2	3
5	2.626751994437241	4.036756945327763	5.582101431403620
6	1.694405827511994	5.677407607913432	13.764851650372010
7	3.334232209947656	5.676348838383759	7.796058987456398
8	2.379174141614214	9.458680466447728	26.837592327725060
9	3.993005736419583	7.239372599830444	8.734469673255610
10	3.090663247606782	14.136144916687530	45.549307703268320
35	30.401420598972400	−1.905744567250158	−579.296444598083900
36	14.519611800918880	143.831012172369900	928.014826672891300
40	14.894290516706780	173.346229033749600	1166.482052590917000
400	159.830912405411900	5367.183476551442000	−533854.877391464800000
401	17.892562928147970	−11151.407414139950000	−683477.236608297200000
402	160.604246252590700	5391.892277561832000	−543765.606253714100000

(2) 缔合复数球面函数解的收敛性验证

针对各向异性角 $\beta=45°$ 的各向异性薄球面进行数值实验，其他计算参数与上节相同。首先增加 j 的计算项数 J，观察 $T(\cos\frac{42.5}{180}\pi,0)$(℃) 变化趋势，见表 16－5。

表 16－5　$T(\cos\frac{42.5}{180}\pi,0)$(℃) 与 J 变化趋势

J	10	20	30	40	50	100	10000
$T(\cos\frac{42.5}{180}\pi,0)$	7.529	7.554	7.559	7.559	7.559	7.559	7.559

表 16－5 显示式（16－20）收敛稳定。计算发现对于不同的计算参数，缔合复数球面函数收敛速率不同。

为比较起见，同时采用复数球面函数 $T=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty}A_{m,j}x^{j}e^{im\varphi}$ 和缔合复数球面函数 $T=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty}A_{m,j}(1-x^{2})^{\frac{m}{2}+1}x^{j}e^{im\varphi}$ 求解同一个各向异性球面稳态热传导，球带的各向异性角 $\beta=30°,45°$；$J=1000$，其他计算参数同上，结果见表 16－6。

表 16－6　$T(\cos\frac{55}{180}\pi,0)$ 对比计算结果

β	$\hat{Z}_{is}(\theta,\varphi)$ 计算结果	$Z_{is}(x,\varphi)$ 计算结果
45°	8.859	8.859
30°	8.729	8.729

表 16－6 显示两种方法在计算同一个球带面时，计算结果相同，但在求解包含南北极点在内的球冠和完整球时，两种方法就存在区别，$Z_{is}(x,\varphi)$ 在极点面临发散问题，缔合

$\hat{Z}_{ls}(\theta,\varphi)$ 在求解此类问题有独特优势。

16.4　各向异性球冠面稳态热传导与极点（极轴）绝热边界条件

由于球带面有两个边界条件，利用傅立叶级数正交性，建立 $4M+2$ 个方程，正好可以求解 $4M+2$ 个未知数。对于球冠问题，存在一个极点（南极或北极点）和一个边界条件，极点处式（16－20）为 0，剩余的一个边界条件只能给出 $2M+1$ 个方程，这样只能从另外渠道建立方程。我们可以在极点处设计一个无限小的虚拟圆周边界条件，虚拟圆周纬度余角 $\theta_1 \to 0$ 。这样根据能量守恒原理，可以得下式

$$q_\theta 2\pi R\theta_1\delta = q\pi(R\theta_1)^2\delta \tag{16-23}$$

其中

$$q_\theta = 0.5qR\theta_1 \tag{16-24}$$

式中 q 为球面极点处法向热流强度。因为 $q=0$，我们可得

$$\theta_1 \to 0,\ q_\theta = 0 \tag{16-25}$$

考虑到 $q_\theta = -\left(\frac{k_{23}}{R\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial\varphi} + \frac{k_{33}}{R}\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)$，因为 $x \neq 1$，$\theta_1 = 0$ 不能直接代入。我们可令 $\theta_1 \to 0$，因为 θ_1 很小。因此，另一个边界条件可以设置为

$$\theta = \theta_1|_{\theta_1\to 0},\ q_\theta = -\left(\frac{k_{23}}{R\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial\varphi} + \frac{k_{33}}{R}\frac{\partial T}{\partial\theta}\right) = 0 \tag{16-26}$$

θ_1 可以通过数值实验确定。式（16－26）可以假想为球冠极点有一个无限小的缺陷，而这个缺陷是绝热的。根据物理常识，这样一个小的缺陷不能影响到远的区域，这样我们就可以在球冠底部和球冠极点虚拟圆周建立两个边界条件，可以求解式（16－20）全部未知数。这种极点边界条件可以称为极点（极轴）绝热边界条件。

本章计算一个各向异性薄圆球冠，球冠面与外界绝热。材料参数和结构参数为 $k_2 = 0.30\text{kcal/(m·h·℃)}$，$k_3 = 0.11\text{kcal/(m·h·℃)}$，$R=1\text{m}$，$q=0$。球冠底端（$\theta_2 = 90°$）温度边值条件为 $(4\sin\varphi + 3\cos\varphi + 8)$℃ 。

（1）收敛性验证

各向异性球冠的各向异性角 $\beta = 45°$。收敛性验证计算通过增加 J 并减小 θ_1，观察 $T(\cos\frac{\pi}{16},0)$(℃) 变化趋势。计算结果在表 16－7。

表 16－7　收敛性计算结果

$T(\cos\frac{\pi}{16},0)$ \ J	49000	40000	30000	20000	10000	5000	1000	500
$\theta_1 = 1°$	8.626	8.626	8.626	8.626	8.624	8.619	8.571	8.515
$\theta_1 = 0.1°$	8.636	8.636	8.632	8.634	8.628	8.622	8.572	8.515
$\theta_1 = 0.01°$	8.637	8.637	8.632	8.634	8.628	8.622	8.572	8.515
$\theta_1 = 0.001°$	8.637	8.637	8.632	8.634	8.628	8.622	8.572	8.515
$\theta_1 = 0.00001°$	8.637	8.637	8.632	8.634	8.628	8.622	8.572	8.515
$\theta_1 = 0.0000001°$	8.637	8.637	8.632	8.634	8.628	8.622	8.572	8.515

表 16 - 7 显示本节给出的算法收敛稳定。

(2) 各向异性球冠温度场分布情况

计算中通过改变球冠各向异性角 β 观察球冠面温度变化情况。计算时 $J=40000$，$\theta_1=0.0000001°$，结果见表 16 - 8～表 16 - 10。

表 16 - 8　$T(\cos\theta,\varphi)$ (℃)，$\beta=0°$

θ \ φ	0	45	90	135	180	225	270	315
0.0000001	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000
11.25	8.021	8.034	8.028	8.005	7.979	7.966	7.972	7.995
22.50	8.194	8.321	8.259	8.046	7.806	7.679	7.741	7.954
45.00	8.696	9.148	8.928	8.164	7.304	6.852	7.072	7.836
67.50	9.540	10.540	10.050	8.363	6.460	5.459	5.947	7.637
78.75	10.160	11.570	10.890	8.510	5.836	4.430	5.115	7.490
90.00	11.000	12.900	12.000	8.707	5.000	3.050	4.000	7.293

表 16 - 9　$T(\cos\theta,\varphi)$ (℃)，$\beta=45°$

θ \ φ	0	45	90	135	180	225	270	315
0.0000001	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000
11.25	8.637	8.392	7.917	7.491	7.363	7.608	8.083	8.509
22.50	9.176	8.986	8.218	7.323	6.824	7.014	7.782	8.677
45.00	9.987	10.210	9.138	7.399	6.013	5.790	6.862	8.601
67.50	10.580	11.490	10.360	7.844	5.419	4.506	5.639	8.156
78.75	10.810	12.190	11.110	8.212	5.186	3.809	4.887	7.788
90.00	11.000	12.900	12.000	8.707	5.000	3.050	4.000	7.293

表 16 - 10　$T(\cos\theta,\varphi)$ (℃)，$\beta=90°$

θ \ φ	0	45	90	135	180	225	270	315
0.0000001	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000	8.000
11.25	8.713	9.176	8.951	8.168	7.287	6.824	7.049	7.832
22.50	9.114	9.838	9.485	8.263	6.886	6.162	6.515	7.737
45.00	9.752	10.890	10.890	8.413	6.248	5.109	5.664	7.587
67.50	10.350	11.870	11.130	8.553	5.653	4.128	4.871	7.447
78.75	10.660	12.390	11.550	8.627	5.340	3.611	4.453	7.373
90.00	11.000	12.900	12.000	8.707	5.000	3.050	4.000	7.293

表 16 - 8～表 16 - 10 显示各向异性对温度场影响显著，各向异性不能忽略。

值得指出的是，当球冠底端温度边界条件为 $b_0+b_1\cos m\varphi+b_2\sin m\varphi$，球冠极点温度值就为 b_0。

16.5　缔合复数球面函数展开法总结

本章引入的连带复数球面函数可用来分析计算球坐标下的各向异性物理问题，该方法同样可以分为四步。

第一步：首次展开

$$T = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$$

以此将控制偏微分方程从实数空间变换到虚数空间。

第二步：两次展开

$$f_m(x) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{m,j}\,(1-x^2)^{\frac{|m|}{2}+1} x^j$$

其中 $A_{m,j}$ 为复数。令 x 的 j 次幂前系数为 0，可以得到 $A_{m,j}$（$j>1$）与 $A_{m,0}$，$A_{m,1}$ 的四项递推公式，进而得到缔合复数球面函数复数形式解。

第三步：合并 m 的计算区间

根据相关函数的奇偶性检查和物理特性，缔合 $\hat{Z}_{is}(\theta,\varphi)$ 函数解中 m 的计算区间能从 $(-\infty,\infty)$ 合并到 $[0,\infty)$，如此就简化了计算，并得到实数形式的一般解析解。

第四步：根据傅立叶级数方法处理边界条件

为了求解数学物理问题，需要确定待定常数。将所得一般解析解代入到边界条件，根据傅立叶级数的正交性可确定待定常数。

16.6　缔合复数球多项式系数递推公式

根据式（16 - 13）和（16 - 14），可得

$$\begin{cases}
\hat{Z}_{m,2,0} = \dfrac{1}{2!}(D_{22}-\lambda_m) \\
\hat{Z}_{m,2,1} = D_{23} \\
\hat{Z}_{m,3,0} = \dfrac{D_{23}}{3}[D_{22}-\lambda_m-(m+2)] \\
\hat{Z}_{m,3,1} = \dfrac{E_{33}}{3} - \dfrac{2}{3}D_{23}^2 + \dfrac{(D_{22}-\lambda_m)}{3!} \\
\hat{Z}_{m,4,1} = \dfrac{D_{23}}{3!}[-\lambda_m + D_{22} + 3E_{33} - |m| - 1 - 2\,(D_{23})^2] \\
\hat{Z}_{m,4,0} = \dfrac{(\lambda_m)^2}{4!} + \lambda_m\dfrac{1}{3!}[-E_{33} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{D_{22}}{2} + (D_{23})^2] + \dfrac{(D_{23})^2}{3!}(2+|m|-D_{22}) + \\
\qquad \dfrac{D_{22}}{3!}(1+\dfrac{D_{22}}{4}+E_{33})
\end{cases} \tag{16 - 23}$$

当 j 为大于或等于 4 的偶数时，可得

$$\begin{cases}\hat{Z}_{m,j+2,0}=\dfrac{\lambda_m-(j-2)(j-3+2E_{33})}{(j+2)(j+1)}\hat{Z}_{m,j-2,0}+2D_{23}\dfrac{(j+1+m)}{(j+2)(j+1)}\hat{Z}_{m,j-1,0}+\\ \qquad\dfrac{2j^2+D_{22}+2E_{33}j-2j-\lambda_m}{(j+2)(j+1)}\hat{Z}_{m,j,0}-2\dfrac{D_{23}}{(j+2)}\hat{Z}_{m,j+1,0}\\ \hat{Z}_{m,j+2,1}=\dfrac{\lambda_m-(j-2)(j-3+2E_{33})}{(j+2)(j+1)}\hat{Z}_{m,j-2,1}-2D_{23}\dfrac{(j+1+m)}{(j+2)(j+1)}\hat{Z}_{m,j-1,1}+\\ \qquad\dfrac{2j^2+D_{22}+2E_{33}j-2j-\lambda_m}{(j+2)(j+1)}\hat{Z}_{m,j,1}+2\dfrac{D_{23}}{(j+2)}\hat{Z}_{m,j+1,1}\end{cases}\tag{16-24}$$

当 j 为大于或等于 3 的奇数时可得

$$\begin{cases}\hat{Z}_{m,j+2,0}=\dfrac{\lambda_m-(j-2)(j-3+2E_{33})}{(j+2)(j+1)}\hat{Z}_{m,j-2,0}-2D_{23}\dfrac{(j+1+m)}{(j+2)(j+1)}\hat{Z}_{m,j-1,0}+\\ \qquad\dfrac{2j^2+D_{22}+2E_{33}j-2j-\lambda_m}{(j+2)(j+1)}\hat{Z}_{m,j,0}+2\dfrac{D_{23}}{(j+2)}\hat{Z}_{m,j+1,0}\\ \hat{Z}_{m,j+2,1}=\dfrac{\lambda_m-(j-2)(j-3+2E_{33})}{(j+2)(j+1)}\hat{Z}_{m,j-2,1}+2D_{23}\dfrac{(j+1+m)}{(j+2)(j+1)}\hat{Z}_{m,j-1,1}+\\ \qquad\dfrac{2j^2+D_{22}+2E_{33}j-2j-\lambda_m}{(j+2)(j+1)}\hat{Z}_{m,j,1}-2\dfrac{D_{23}}{(j+2)}\hat{Z}_{m,j+1,1}\end{cases}\tag{16-25}$$

第 17 章　表面与外界换热的各向异性球带面稳态热传导方程——参数缔合复数球多项式与复数球面函数

在本书第 14 章、第 15 章、第 16 章基础上，本章讨论考虑球面与外界换热的球面稳态热传导问题偏微分方程求解。为了避免在球面南极、北极处，复数球多项式发散的问题，本章沿用第 16 章的求解思路，给出了参数缔合球 Z_{is} 方程，采用缔合复数球多项式和缔合复数球面函数，求解考虑球面与外界换热各向异性球面稳态热传导方程。完成理论求解后，进行了验证计算，并给出计算结果。

17.1　球坐标下考虑球面换热的各向异性热传导偏微分方程

考虑球坐标 (r,θ,φ) 下的曲线型各向异性薄球壳面，球半径为 R，温度场分布与 r 无关，球面与外界环境换热，且在球面边界与外界也进行热交换。这样球坐标下稳态热传导控制偏微分方程为

$$k_{22}\frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+k_{33}\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta})+2k_{23}\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi\partial\theta}-2\frac{h_a}{\delta}(T-T_a)=q \tag{17-1}$$

其中 k_{22}、k_{23}、k_{33} 为热传导系数

$$k_{22}=k_2\cos^2\beta+k_3\sin^2\beta$$
$$k_{23}=k_{32}=(k_2-k_3)\sin\beta\cos\beta$$
$$k_{33}=k_2\sin^2\beta+k_3\cos^2\beta$$

式中 $T(\theta,\varphi)$ 为沿球面的温度函数；q 是热源函数，方向 2 为球坐标方向角 φ（$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$）方向（地理纬线方向），方向 3 为球坐标 θ（$0<\theta<\pi$）高低角方向（地理经线方向）。δ 为球壳厚，h_a 为壳与壳面上下介质之间的换热系数，T_a 为壳面上下介质的环境温度。k_2、k_3 为各向异性介质两个主轴方向热传导常数（$k_2>k_3$），β 为 k_2 主轴方向与 φ 方向（地理纬线方向）的夹角。

引入如下参数变换

$$\lambda=-2\frac{h_a r^2}{k_{33}\delta},q*=\frac{qr^2-2T_a r^2\dfrac{h_a}{\delta}}{k_{33}} \tag{17-2}$$
$$K_{33}=1,K_{32}=K_{23}=\frac{k_{32}}{k_{33}},K_{22}=\frac{k_{22}}{k_{33}},x=\cos\theta$$

可将方程（17-1）变换为如下偏微分方程

$$\frac{K_{22}}{1-x^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+K_{33}[-2x\frac{\partial T}{\partial x}+(1-x^2)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}]-2K_{23}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi\partial x}+\lambda T=q*$$

(17－3)

带参数λ的方程（17－3）求解和没有参数的方程（16.3）求解的程序类似，但得到解和相关函数不一样。

17.2 参数缔合球 Z_{is} 方程、复数球面函数、复数球多项式及球面换热的各向异性球面热传导解

17.2.1 参数缔合球 Z_{is} 方程、参数缔合复数球面函数和参数缔合复数球多项式

设方程（17－3）有如下形式解

$$T=\sum_{m=-\infty}^{\infty}f_m(x)e^{im\varphi} \tag{17-4}$$

其中 $i^2=-1$；m 为整数。

$m=0$ 时，方程（17－4）简化为

$$-2x\frac{dT^*}{dx}+(1-x^2)\frac{d^2T^*}{dx^2}+\lambda T^*=0 \tag{17-5}$$

方程（17－5）是勒让德方程。设 $\lambda=l^0(1+l^0)$，（17－5）勒让德方程解为

$$T^*=a_0L_1(x,l^0)+a_1L_2(x,l^0) \tag{17-6}$$

其中

$$\begin{cases}L_1(x,l^0)=1-\dfrac{l^0(l^0+1)}{2!}x^2+\dfrac{l^0(l^0-2)(l^0+1)(l^0+2)}{4!}x^4-\cdots\\ L_2(x,l^0)=x-\dfrac{(l^0-1)(l^0+2)}{3!}x^3+\dfrac{(l^0-1)(l^0-3)(l^0+2)(l^0+4)}{5!}x^5-\cdots\end{cases} \tag{17-7}$$

式中 a_0、a_1 为待定实数常数。

对于 $m\neq0$，设

$$f_m(x)=(1-x^2)^{\frac{|m|}{2}}y_m(x) \tag{17-8}$$

式中 j 为整数，$x\neq\pm1$。

将式（17－8）代入方程（17－3）可得

$$K_{33}(1-x^2)\frac{d^2y_m(x)}{dx^2}-2xK_{33}(|m|+1)\frac{dy_m(x)}{dx}+(\lambda-K_{33}|m|-m^2)y_m(x)+\frac{(1-K_{22})m^2+2K_{23}im|m|x}{1-x^2}y_m(x)-2K_{23}im\frac{dy_m(x)}{dx}=0 \tag{17-9a}$$

对于各向异性介质 $K_{22}\neq1$，设

$$y_m(x)=(1-x^2)X_m(x) \tag{17-9b}$$

再设

$$X_m(x) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{m,j} x^j \tag{17-9c}$$

综上所述，可得以下函数形式

$$T = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} A_{m,j} (1-x^2)^{\frac{|m|}{2}+1} x^j e^{im\varphi} \tag{17-10}$$

式（17-10）定义了一个复数级数函数，可称为参数缔合复数球面函数，记为 $\hat{Z}_{is}(\theta,\varphi,\lambda)$。其实数形式见后续式（17-20）。根据数学物理实数化原理：描述现实物理现象的数学函数应该是实数函数，因此，如果式（17-10）是问题解，式（17-10）应该是实数函数，即

如果 $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} A_{m,j} (1-x^2)^{\frac{|m|}{2}+1} x^j e^{im\varphi}$ 是实数函数，当 $m \neq 0$，可得

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} A_{m,j} (1-x^2)^{\frac{|m|}{2}+1} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} 2A_{m,j} (1-x^2)^{\frac{|m|}{2}+1} x^j e^{im\varphi}$$

因为 $A_{m,j}$ 为待定复数常数，上面 2 $A_{m,j}$ 可以改写为 $A_{m,j}$。因此可得

$$T = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} A_{m,j} (1-x^2)^{\frac{m}{2}+1} x^j e^{im\varphi} \tag{17-11}$$

将式（17-9b）代入方程（17-9a）可得

$$K_{33}(1-x^2)2\frac{d^2X(x)}{dx^2} - 2[K_{33}x(|m|+3)+K_{23}im](1-x^2)\frac{dX(x)}{dx} + \{-m^2K_{22} + K_{33}(|m|+2)^2 + 2iK_{23}m(|m|+2)x + [\lambda - K_{33}(|m|+2)(|m|+3)](1-x^2)\}X(x) = 0 \tag{17-12a}$$

引入以下参数变换

$$E_{33} = |m|+3, E_{22} = (K_{22} - K_{33}\frac{(|m|+2)^2}{m^2})\frac{1}{K_{33}}$$

$$E_{23} = \frac{K_{23}}{K_{33}}, \lambda_m = \frac{\lambda - K_{33}(|m|+2)(|m|+3)}{K_{33}}$$

运用以上参数变换，可将方程（17-12*a*）改写为

$$(1-x^2)\frac{d^2X(x)}{dx^2} - (2xE_{33} + 2E_{23}im)\frac{dX(x)}{dx} + [-\frac{m^2E_{22}}{1-x^2} + \frac{2iE_{23}m(|m|+2)x}{1-x^2} + \lambda_m]X(x) = 0 \tag{17-12b}$$

方程（17-12b）是一典型复数微分方程，这个复数微分方程在球坐标下各向异性数学物理问题求解中要经常遇到，可记为参数缔合球 Z_{is} 方程。这个方程在后续球坐标数学物理问题求解中要广泛采用。将式（17-9c）代入到参数形式缔合 Z_{is} 方程（17-12b）中，可得一复数系数多项式控制方程。令式（17-9c）中 $A_{m,0} \neq 0$，$A_{m,1} \neq 0$，$x \neq \pm 1$。令所得多项式控制方程中 $(1-x^2)^{\frac{|m|}{2}+1}$，$x(1-x^2)^{\frac{|m|}{2}+1}$，$x^2(1-x^2)^{\frac{|m|}{2}+1}$，$x^3(1-x^2)^{\frac{|m|}{2}+1}$ 乘幂项的系数为 0，可以推得：

$$\begin{cases} A_{m,2} = \dfrac{1}{2!}(D_{22} - \lambda_m)A_{m,0} + \mathrm{i}A_{m,1}D_{23} \\ A_{m,3} = \mathrm{i}\dfrac{D_{23}}{3}[D_{22} - \lambda_m - (m+2)]A_{m,0} + A_{m,1}[\dfrac{E_{33}}{3} - \dfrac{2}{3}D_{23}^2 + \dfrac{(D_{22} - \lambda_m)}{3!}] \\ A_{m,4} = A_{m,0}\left\{\dfrac{(\lambda_m)^2}{4!} + \lambda_m \dfrac{1}{3!}[-E_{33} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{D_{22}}{2} + (D_{23})^2] + \dfrac{(D_{23})^2}{3!}(2 + |m| - D_{22}) + \right. \\ \qquad \left. \dfrac{D_{22}}{3!}(1 + \dfrac{D_{22}}{4} + E_{33})\right\} + \mathrm{i}A_{m,1}\dfrac{D_{23}}{3!}[-\lambda_m + D_{22} + 3E_{33} - |m| - 1 - 2(D_{23})^2] \end{cases} \tag{17-13}$$

其中 $D_{22} = E_{22}m^2, D_{23} = E_{23}m$ 。

令多项式控制方程中 $x^j(1-x^2)^{\frac{|m|}{2}+1}$ $(j>3)$ 乘幂项前系数为0，可得四项递推公式

$$A_{m,j+2} = A_{m,j-2}\frac{\lambda_m - (j-2)(j-3+2E_{33})}{(j+2)(j+1)} - A_{m,j-1}2D_{23}\frac{\mathrm{i}(j+1+m)}{(j+2)(j+1)} + A_{m,j}\frac{2j^2 + D_{22} + 2E_{33}j - 2j - \lambda_m}{(j+2)(j+1)} + A_{m,j+1}\frac{2D_{23}\mathrm{i}}{(j+2)} \tag{17-14}$$

结合式（17－13）和（17－14）可得递推公式

$$A_{m,j} = \mathrm{i}A_{m,1}\hat{Z}_{m,j,1}(\lambda) + A_{m,0}\hat{Z}_{m,j,0}(\lambda) \quad (j\text{ 为偶数}) \tag{17-15a}$$

$$A_{m,j+1} = \mathrm{i}A_{m,0}\hat{Z}_{m,j+1,0}(\lambda) + A_{m,1}\hat{Z}_{m,j+1,1}(\lambda) \quad (j+1\text{ 为奇数}) \tag{17-15b}$$

其中 $\hat{Z}_{m,j,1}(\lambda), \hat{Z}_{m,j,0}(\lambda), \hat{Z}_{m,j+1,0}(\lambda), \hat{Z}_{m,j+1,1}(\lambda)$ 为实数，且为 λ 的函数，可由本章17.4节公式推得。

将式（17－15a）和（17－15b）代入式（17－11）可得

$$\begin{aligned} T = \sum_{m=1}^{\infty}(1-x^2)^{\frac{m}{2}+1}\{&A_{m,0}x^0\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} + A_{m,1}x^1\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} + \\ &[\mathrm{i}A_{m,1}\hat{Z}_{m,2,1}(\lambda) + A_{m,0}\hat{Z}_{m,2,0}(\lambda)]x^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} + [\mathrm{i}A_{m,0}\hat{Z}_{m,3,0}(\lambda) + A_{m,1}\hat{Z}_{m,3,1}(\lambda)]x^3 + \\ &[\mathrm{i}A_{m,1}\hat{Z}_{m,4,1}(\lambda) + A_{m,0}\hat{Z}_{m,4,0}(\lambda)]x^4\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} + [\mathrm{i}A_{m,0}\hat{Z}_{m,5,0}(\lambda) + A_{m,1}\hat{Z}_{m,5,1}(\lambda)]x^5\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} + \cdots + \\ &[\mathrm{i}A_{m,1}\hat{Z}_{m,j,1}(\lambda) + A_{m0}\hat{Z}_{m,j,0}(\lambda)]x^j\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} + [\mathrm{i}A_{m,0}\hat{Z}_{m,j+1,0}(\lambda) + A_{m,1}\hat{Z}_{m,j+1,1}(\lambda)]x^{j+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} + \cdots\} \end{aligned} \tag{17-16}$$

式中 $A_{m,0}, A_{m,1}$ ，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$ 为复数，可写为

$$\begin{cases} A_{m,0} = A_{m,0,r} + \mathrm{i}A_{m,0,i} \\ A_{m,1} = A_{m,1,r} + \mathrm{i}A_{m,1,i} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} = \cos(m\varphi) + \mathrm{i}\sin(m\varphi) \end{cases} \tag{17-17}$$

其中 $A_{m,0,r}, A_{m,0,i}, A_{m,1,r}, A_{m,1,i}$ 为实数。

将式（17－17）代入式（17－16）化简可得

$$T = \sum_{m=1}^{\infty}[(A_{m,0,r} + \mathrm{i}A_{m,0,i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\hat{\Omega}_{m,n}^{(1)}(x,\lambda) + (A_{m,1,r} + \mathrm{i}A_{m,1,i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\hat{\Omega}_{m,n}^{(2)}(x,\lambda)](1-x^2)^{\frac{m}{2}} + 1 \tag{17-18a}$$

定义参数缔合复数球多项式 $\hat{\Omega}_{m,n}^{(k)}(x,\lambda)$

$$\begin{cases}\hat{\Omega}_{m,n}^{(1)}(x) = [\hat{Z}_{s_1}(x) + \mathrm{i}\,\hat{Z}_{s_2}(x)](1-x^2)^{\frac{\lfloor m\rfloor}{2}+1}\\ \hat{\Omega}_{m,n}^{(2)}(x) = [\hat{Z}_{s_3}(x) + \mathrm{i}\,\hat{Z}_{s_1}(x)](1-x^2)^{\frac{\lfloor m\rfloor}{2}+1}\end{cases} \tag{17-18b}$$

其中 $\hat{\Omega}_{m,n}^{(1)}(x,\lambda)$ 称为第一类参数缔合复数球多项式，$\hat{\Omega}_{m,n}^{(2)}(x,\lambda)$ 称为第二类参数缔合复数球多项式。$\hat{Z}_{s_1}(x,\lambda)$，$\hat{Z}_{s_2}(x,\lambda)$，$\hat{Z}_{s_3}(x,\lambda)$，$\hat{Z}_{s_4}(x,\lambda)$ 为新定义的实数多项式

$$\begin{cases}\hat{Z}_{s_1}(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty}\hat{Z}_{m,2k,0}(\lambda)x^{2k} + 1\\ \hat{Z}_{s_2}(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty}\hat{Z}_{m,2k+1,0}(\lambda)x^{2k+1}\\ \hat{Z}_{s_3}(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty}\hat{Z}_{m,2k+1,1}(\lambda)x^{2k+1} + x\\ \hat{Z}_{s_1}(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty}\hat{Z}_{m,2k,1}(\lambda)x^{2k}\end{cases} \tag{17-19}$$

其中 $\hat{Z}_{s_1}(x,\lambda)$，$\hat{Z}_{s_2}(x,\lambda)$，$\hat{Z}_{s_3}(x,\lambda)$，$\hat{Z}_{s_4}(x,\lambda)$ 多项式由 m，j（$j=2k$ 或 $j=2k+1$）和 k_{22}，k_{33}，k_{23}，λ 确定。

$\hat{Z}_{s_1}(x,\lambda)$，$\hat{Z}_{s_2}(x,\lambda)$，$\hat{Z}_{s_3}(x,\lambda)$，$\hat{Z}_{s_1}(x,\lambda)$ 可分别称为第一、二、三、四种参数缔合球多项式。在某种意义上，$\hat{Z}_{s_1}(x,\lambda)$，$\hat{Z}_{s_2}(x,\lambda)$，$\hat{Z}_{s_3}(x,\lambda)$，$\hat{Z}_{s_4}(x,\lambda)$ 为各向异性温度场的特征函数。

17.2.2　球面换热的各向异性球面热传导问题复数球面函数解

根据偏微分方程的可叠加性原理，根据式（17－16）（17－18a）（17－18b）和（17－19），可得方程（17－3）一般解析解

$$\begin{aligned}T = \sum_{m=1}^{\infty}\{&A_{m,0,r}[\hat{Z}_{s_1}(x,\lambda)\cos(m\varphi) - \hat{Z}_{s_2}(x,\lambda)\sin(m\varphi)] -\\ &A_{m,0,i}[\hat{Z}_{s_2}(x,\lambda)\cos(m\varphi) + \hat{Z}_{s_1}(x,\lambda)\sin(m\varphi)] +\\ &A_{m,1,r}[\hat{Z}_{s_3}(x,\lambda)\cos(m\varphi) - \hat{Z}_{s_4}(x,\lambda)\sin(m\varphi)] -\\ &A_{m,1,i}[\hat{Z}_{s_3}(x,\lambda)\sin(m\varphi) + \hat{Z}_{s_4}(x,\lambda)\cos(m\varphi)]\}(1-x^2)^{\frac{m}{2}+1} +\\ &a_0L_1(x,l^0) + a_1L_2(x,l^0) + T_0\end{aligned} \tag{17-20}$$

其中 $A_{m,0,r}, A_{m,0,i}, A_{m,1,r}, A_{m,1,i}$ $(m=1,\cdots,\infty)$，a_0 和 a_1 为实数常数；T_0 为方程（17-3）特解。

式（17-16）中 $\hat{Z}_{m,j,1}(\lambda), \hat{Z}_{m,j,0}(\lambda), \hat{Z}_{m,j+1,0}(\lambda), \hat{Z}_{m,j+1,1}$ 可以根据本章 17.4 公式计算出来。这样，多项式 $\hat{Z}_{s_1}(x,\lambda), \hat{Z}_{s_2}(x,\lambda), \hat{Z}_{s_3}(x,\lambda), \hat{Z}_{s_4}(x,\lambda)$ 中的 j 可以在 $2J$ 截断。如果式（17-20）级数解的 m 在 M 处截断，并代入到具有特定的纬度余角 θ 的边界条件，那么级数解存在 $4M+2$ 待定常数，具体包括 $A_{m,0,r}, A_{m,0,i}, A_{m,1,r}, A_{m,1,i}$ $(1\leqslant m\leqslant M)$，$a_0, a_1$。注意到，球带具有两个具有特定纬度余角 θ 的边界条件，这样根据 $\cos m\varphi$ 和 $\sin m\varphi$ 傅立叶级数正交性，可以得到 $4M+2$ 方程，可以求解 $4M+2$ 个未知数，问题得解。

17.3 数值实验

考虑各向异性薄球面，其球面半径 R 为 1m，热传导常数为 $k_{22}=0.30\text{kcal}/(\text{m}\cdot\text{h}\cdot℃)$，$k_{33}=0.11\text{kcal}/(\text{m}\cdot\text{h}\cdot℃)$，$h_a=0.1\text{kcal}/(\text{m}^2\cdot\text{h}\cdot℃)$，$R=1m$，$\delta=0.01m$。上纬度边界（$\theta_1=10°$）给定温度边界条件为 $(3\sin\varphi+2\cos\varphi+7)$℃，下纬度边界（$\theta_2=100°$）给定温度边界条件为 $(6\sin\varphi+5\cos\varphi+12)$℃，球面与外界换热，$T_a=0$℃。这样的各向异性介质中稳态温度场可以视为与径向 r 无关，温度只与 (θ,φ) 有关即 $T=T(x,\varphi)$。$T(\cos\theta,\varphi)$ 单位为（℃），表中 φ 和 θ 的单位为（°）。

（1）多项式 $\hat{Z}_{s_1}(x,\lambda), \hat{Z}_{s_2}(x,\lambda), \hat{Z}_{s_3}(x,\lambda), \hat{Z}_{s_4}(x,\lambda)$ 系数分布

考虑球多项式 $\hat{Z}_{s_1}(x,\lambda), \hat{Z}_{s_2}(x,\lambda), \hat{Z}_{s_3}(x,\lambda), \hat{Z}_{s_4}(x,\lambda)$，需要研究分析多项式中的系数 $\hat{Z}_{m,2k,0}(\lambda), \hat{Z}_{m,2k+1,0}(\lambda), \hat{Z}_{m,2k+1,1}(\lambda), \hat{Z}_{m,2k,1}(\lambda)$。对于上述各向异性球带面，各向异性角 $\beta=0°$ 时，系数 $\hat{Z}_{m,2k,0}(\lambda), \hat{Z}_{m,2k+1,0}(\lambda), \hat{Z}_{m,2k+1,1}(\lambda), \hat{Z}_{m,2k,1}(\lambda)$ 显示在表 17-1 和 17-2（表中，$2k$ 和 $2k+1$ 用 j 表示）。$J=1000$。

表 17-1 $\hat{Z}_{m,j,0}(\lambda)$，$\beta=0°$

j \ m	1	2	3	4
2	93.772727272727270	98.363636363636360	105.681818181818200	115.727272727272700
3	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000
4	1605.690427478598000	1792.476584523259000	2090.380510167929000	2522.088154825831000
5	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000
6	12373.194547483970000	14844.398702077080000	18906.825496453930000	25204.737796905310000
7	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000
8	58481.768369458380000	75833.263724103220000	105780.587945948700000	155843.610591279200000
9	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000
10	198861.353547966600000	279406.581667270600000	426969.182404951900000	694056.245867685500000

表 17-2　$\hat{Z}_{m,j,1}(\lambda)$，$\beta=0°$

j \ m	1	2	3	4
2	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000
3	32.590909099488550	34.454545478929170	37.227272784619620	40.909091016559890
4	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000
5	354.186570343828800	400.671074671218200	471.579132975089900	571.993389963627600
6	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000
7	2082.537355668717000	2540.223979524120000	3271.038928192695000	4385.474005549504000
8	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000
9	8225.370186962649000	10861.335353203430000	15323.581351638990000	22690.169943288760000
10	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000

$\beta=45°$ 的各向异性圆球面中 $\hat{Z}_{m,2k,0}(\lambda)$，$\hat{Z}_{m,2k+1,0}(\lambda)$，$\hat{Z}_{m,2k+1,1}(\lambda)$，$\hat{Z}_{m,2k,1}(\lambda)$ 数值计算结果见表 17-3 和表 17-4。

表 17-3　$\hat{Z}_{m,j,0}(\lambda)$，$\beta=45°$

j \ m	1	2	3	4
2	50.780487804878050	55.780487804878050	55.780487804878050	59.780487804878050
3	15.224866151100540	49.381915526472350	49.381915526472350	70.167757287328980
4	501.752676040973100	603.775073710009800	603.775073710009800	678.368809079307100
5	185.958974594522100	675.445238680065700	675.445238680065700	1023.254784885512000
6	2393.397886434688000	3132.398190597177000	3132.398190597177000	3620.435365954028000
7	992.677368783528000	4087.454158137545000	4087.454158137545000	6598.141954560051000
8	7490.208684700865000	10516.253122114520000	10516.253122114520000	12212.528292644170000
9	3386.575620609534000	15841.855045990780000	15841.855045990780000	27166.434074252440000
10	17900.366835529100000	26460.626191650270000	26460.626191650270000	29881.266708498900000
16	132597.628277704200000	146834.400251403300000	146834.400251403300000	90034.844114307770000
17	181101.222811067500000	426270.225136722900000	426270.225136722900000	889083.199671344100000
18	198634.475946827100000	203511.029900719600000	203511.029900719600000	33621.802061017840000
19	296347.639571788000000	729417.605418162900000	729417.605418162900000	1579106.564748696000000
20	279662.298000972800000	254181.275646661500000	254181.275646661500000	−149190.908567604000000
24	481222.006740268600000	270213.168307127800000	270213.168307127800000	−1283883.158804141000000
25	931700.201880085100000	2570196.218829975000000	2570196.218829975000000	6071731.209322093000000
26	597267.451385836200000	190456.772877145600000	190456.772877145600000	−2503528.524030705000000

表 17-4 $\hat{Z}_{m,j,1}(\lambda)$，$\beta=45^\circ$

j \ m	1	2	3	4
2	4.634146341463415E−0011	9.268292682926831E−001	1.390243902439025	1.853658536585366
3	18.116993848598600	18.687487579582230	19.304977137844360	19.969462523384985
4	8.583324869536622	17.894439527381590	28.197719127696930	39.757538824644660
5	117.247839885871100	125.380517544500000	132.710262375237000	138.888000599404100
6	57.862630163785570	127.481040484356400	212.603064186554500	317.598540032892400
7	440.312407692623200	488.033120001470700	522.898361615520100	536.835241196413000
8	228.482082800338000	535.024331291513700	946.078803282386200	1495.037076580353000
9	1184.308119663237000	1355.373672249769000	1445.757812303600000	1386.027002848626000
10	648.476189243893000	1615.586203450463000	3025.075066996053000	5038.654835182033000
16	5013.058988477604000	14840.472554131020000	32340.669760171590000	61306.337170580100000
17	111935.364445307530000	14552.914212670720000	11261.508405302820000	−7806.602456474267000
18	8015.321244969457000	24969.470847143390000	56807.111570652410000	111335.466884127700000
19	17081.236888844760000	20788.295745878140000	12611.648285171260000	−29301.181215490900000
20	11997.739154945240000	39201.126286896140000	92775.152335814970000	187117.938946319300000
24	23228.174018537330000	82734.089867291810000	209830.936145809600000	442311.324559332700000
25	38618.810165038230000	44767.263634197890000	−10554.316742564230000	−268245.249893950900000
26	30584.180731942510000	113273.311077623400000	296103.968036766100000	634114.749860510900000

（2）参数连带复数球面函数的收敛性验证

针对各向异性角 $\beta=45^\circ$ 的各向异性薄球面进行数值实验，其他计算参数与上节相同。首先增加 j 的计算项数 J，观察 $T(\cos\frac{21.25}{180}\pi,0)$（℃）变化趋势。计算结果见表 17-5。

表 17-5 $T(\cos\frac{21.25}{180}\pi,0)$（℃）与 J 变化趋势

β \ J	380	400	500	600	700	710	1000	10000
45°	0.2949	0.5067	0.7797	0.7967	0.7976	0.7977	0.7977	0.7977
30°	error	error	0.4801	0.5850	0.5912	0.5913	0.5916	0.5916

表 17-显示式（17-20）收敛稳定。计算发现对于不同的计算参数，缔合复数球面函数收敛速率不同。为比较起见，同时采用参数缔合复数球面函数 $\hat{Z}_{v}(\theta,\varphi,\lambda)$ 和参数复数球面函数 $Z_{v}(x,\varphi,\lambda)$ 求解同一个各向异性球面稳态热传导，球带的各向异性角 $\beta=30^\circ,45^\circ$。J=1000，其他计算参数同上一节，计算结果见表 17-6。

表 17 - 6　对比计算结果

$T(\cos\frac{21.25}{180}\pi,0)$ / β	$\hat{Z}_{is}(\theta,\varphi,\lambda)$ 计算结果	$Z_{is}(x,\varphi,\lambda)$ 计算结果
45°	0.7977	0.7977
30°	0.5916	0.5916

表 17 - 6 显示两种方法在计算同一个球带面时，计算结果相同，但在求解包含南北极点在内的球冠和完整球，两种方法就存在区别，$Z_{is}(x,\varphi,\lambda)$ 在极点面临发散问题，$\hat{Z}_{is}(\theta,\varphi,\lambda)$ 在求解此类问题有独特优势。

式（17 - 8）引入，使得在求解球坐标下的热传导方程时有望获得在南北极有限值的函数解。根据缔合复数球面函数获得的级数解（17 - 20）在南北极有限值特点，这使得式（17 - 20）有着更大的应用范围。

17.4　参数缔合复数球多项式递推公式

根据式（17 - 13）和（17 - 14）可得

$$\begin{cases}\hat{Z}_{m,2,0}(\lambda)=\dfrac{1}{2!}(D_{22}-\lambda_m)\\ \hat{Z}m,2,1(\lambda)=D_{23}\\ \hat{Z}_{m,3,0}(\lambda)=\dfrac{D_{23}}{3}[D_{22}-\lambda_m-(m+2)]\\ \hat{Z}_{m,3,1}(\lambda)=\dfrac{E_{33}}{3}-\dfrac{2}{3}D_{23}^2+\dfrac{D_{22}-\lambda_m}{3!}\\ \hat{Z}_{m,4,1}(\lambda)=\dfrac{D_{23}}{3!}[-\lambda_m+D_{22}+3E_{33}-|m|-1-2(D_{23})^2]\\ \hat{Z}_{m,4,0}(\lambda)=\dfrac{(\lambda_m)^2}{4!}+\lambda_m\dfrac{1}{3!}[-E_{33}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{D_{22}}{2}+(D_{23})^2]+\dfrac{(D_{23})^2}{3!}(2+|m|-D_{22})+\\ \dfrac{D_{22}}{3!}(1+\dfrac{D_{22}}{4}+E_{33})\end{cases}$$

（17 - 21）

当 j 为大于或等于 4 的偶数时，可得

$$
\begin{cases}
\hat{Z}_{m,j+2,0}(\lambda) = \dfrac{\lambda_m - (j-2)(j-3+2E_{33})}{(j+2)(j+1)} \hat{Z}_{m,j-2,0}(\lambda) + 2D_{23} \dfrac{(j+1+m)}{(j+2)(j+1)} \hat{Z}_{m,j-1,0}(\lambda) + \\
\dfrac{2j^2 + D_{22} + 2E_{33}j - 2j - \lambda_m}{(j+2)(j+1)} \hat{Z}_{m,j,0}(\lambda) - \dfrac{2D_{23}}{(j+2)} \hat{Z}_{m,j+1,0}(\lambda) \\
\hat{Z}_{m,j+2,1}(\lambda) = \dfrac{\lambda_m - (j-2)(j-3+2E_{33})}{(j+2)(j+1)} \hat{Z}_{m,j-2,1}(\lambda) - 2D_{23} \dfrac{(j+1+m)}{(j+2)(j+1)} \hat{Z}_{m,j-1,1}(\lambda) + \\
\dfrac{2j^2 + D_{22} + 2E_{33}j - 2j - \lambda_m}{(j+2)(j+1)} \hat{Z}_{m,j,1}(\lambda) + \dfrac{2D_{23}}{(j+2)} \hat{Z}_{m,j+1,1}(\lambda)
\end{cases}
\tag{17-22}
$$

当 j 为大于或等于 3 的奇数时可得

$$
\begin{cases}
\hat{Z}_{m,j+2,0}(\lambda) = \dfrac{\lambda_m - (j-2)(j-3+2E_{33})}{(j+2)(j+1)} \hat{Z}_{m,j-2,0}(\lambda) - 2D_{23} \dfrac{(j+1+m)}{(j+2)(j+1)} \hat{Z}_{m,j-1,0}(\lambda) + \\
\dfrac{2j^2 + D_{22} + 2E_{33}j - 2j - \lambda_m}{(j+2)(j+1)} \hat{Z}_{m,j,0}(\lambda) + \dfrac{2D_{23}}{(j+2)} \hat{Z}_{m,j+1,0}(\lambda) \\
\hat{Z}_{m,j+2,1}(\lambda) = \dfrac{\lambda_m - (j-2)(j-3+2E_{33})}{(j+2)(j+1)} \hat{Z}_{m,j-2,1}(\lambda) + 2D_{23} \dfrac{(j+1+m)}{(j+2)(j+1)} \hat{Z}_{m,j-1,1}(\lambda) + \\
\dfrac{2j^2 + D_{22} + 2E_{33}j - 2j - \lambda_m}{(j+2)(j+1)} \hat{Z}_{m,j,1}(\lambda) - \dfrac{2D_{23}}{(j+2)} \hat{Z}_{m,j+1,1}(\lambda)
\end{cases}
\tag{17-23}
$$

第 18 章　各向异性薄圆锥壳热传导问题解析

18.1　概述

锥形壳各向异性物理问题求解是数学物理经常遇到的经典问题。球坐标可以用来分析锥形域数学物理问题。本章及后续第 19 章，20 章应用本书提出的复数级数方法，研究各向异性薄锥形壳稳态热传导、非稳态热传导和与外界换热的稳态热传导方程解析求解，提出了相关问题一般解析解。

18.2　各向异性薄圆锥壳稳态热传导控制方程

球坐标系 (r,θ,φ) 下，与余纬度 θ 方向无关的二维各向异性球形域温度场控制方程如下

$$k_{22}\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+k_{11}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+2k_{12}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi\partial r}+k_{12}\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial\varphi}=q \tag{18-1}$$

其中 $T(r,\varphi)$ 温度函数，q 热源函数。锥面与外界环境热绝缘，热只在圆锥面（$r_1\leqslant r\leqslant r_2$，$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$，$\theta$ 固定，$0<\theta<\pi$）内传导。方向 2 为球坐标经度 φ（$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$）方向，方向 1 为球坐标径向 r（$r_1\leqslant r\leqslant r_2$）方向。$k_{11}$、$k_{12}$、$k_{22}$ 为热传导系数

$$k_{11}=k_1\cos^2\beta+k_2\sin^2\beta$$
$$k_{12}=(k_1-k_2)\sin\beta\cos\beta$$
$$k_{22}=k_1\sin^2\beta+k_2\cos^2\beta$$

其中 k_1、k_2 为 r 方向主热传导系数、切向 θ 方向主传导系数。β 为锥面内最大热传导轴方向与径向 r 的夹角。

鉴于锥壳很薄，可以假设物理量沿纬度（厚度）方向不变，即对于任意锥壳圆锥半角 θ（即球坐标中余纬度 θ）固定不变。定义

$$K_{11}=1,K_{12}=\frac{k_{12}}{k_{11}\sin\theta},K_{22}=\frac{k_{22}}{k_{11}\sin^2\theta} \tag{18-2}$$

将方程（18－1）变换为下式

$$K_{22}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+2K_{12}r\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi\partial r}+K_{12}\frac{\partial T}{\partial\varphi}=\frac{q}{k_{11}}r^2 \tag{18-3}$$

18.3 一般解析解的建立

设方程（18－3）有如下解

$$T=\sum_{m=-\infty}^{\infty}f_m(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{18-4}$$

其中 $\mathrm{i}^2=-1$；m 为整数。

$m=0$ 时，实际上是求解锥面轴对称问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r})=0 \tag{18-5}$$

根据常微分方程理论，得出补充解

$$T^{**}=A_0+A_1\frac{1}{r} \tag{18-6}$$

其中 A_0,A_1 为待定实常数。

在 $m\neq 0$ 时，设

$$f_m(r)=A_m r^{\mathrm{i}s} \tag{18-7}$$

其中 $A_m=A_{m,r}+\mathrm{i}A_{m,i}$ 是复数，$A_{m,r},A_{m,i}$ 为实数，s 为特征根。

将式（18－4）和（18－7）代入方程（18－3），可得

$$s^2+(-\mathrm{i}+2mK_{12})s+K_{22}m^2-\mathrm{i}K_{12}m=0 \tag{18-8}$$

（18－8）为特征方程，求解可得特征根

$$s_1=a_1+\mathrm{i}b_1$$

$$s_2=a_2+\mathrm{i}b_2$$

其中

$$\begin{aligned}a_1&=a_2=-K_{12}m\\ b_1&=0.5[1+\sqrt{1+4m^2(K_{22}-(K_{12})^2)}]\\ b_2&=0.5[1-\sqrt{1+4m^2(K_{22}-(K_{12})^2)}]\end{aligned} \tag{18-9}$$

可以推导得出方程（18－3）齐次解

$$\begin{aligned}T=\sum_{m=1}^{\infty}\{&r^{-b_1}[A_{1,m,r}\cos(m\varphi+a_1\ln r)-A_{1,m,i}\sin(m\varphi+a_1\ln r)]+\\ &r^{-b_2}[A_{2,m,r}\cos(m\varphi+a_2\ln r)-A_{2,mi,}\sin(m\varphi+a_2\ln r)]\}\end{aligned} \tag{18-10}$$

考虑线性偏微分方程的线性叠加原理，综合式（18－6）和（18－10），该问题的一般解析解

$$\begin{aligned}T=\sum_{m=1}^{\infty}\{&r^{-b_1}[A_{1,m,r}\cos(m\varphi+a_1\ln r)-A_{1,m,i}\sin(m\varphi+a_1\ln r)]+\\ &r^{-b_2}[A_{2,m,r}\cos(m\varphi+a_2\ln r)-A_{2,m,i}\sin(m\varphi+a_2\ln r)]\}+A_0+A_1\frac{1}{r}+T_0\end{aligned} \tag{18-11}$$

其中 $A_{1,m,r}, A_{1,m,i}, A_{2,m,r}, A_{2,m,i}(m = 1,\cdots,\infty), A_0, A_1$ 为待定常数；T_0 是针对给定热源分布的温度场特解。

在实际计算中，m 不可能取无穷大，设 m 最多取到 M。式（18－11）定义的新函数实际上是单重级数，可以有 $4M+2$ 个未知数。对于环圆锥壳每边有 1 个边界条件。在每个边界条件所建立的方程中将非傅立叶级数的部分展开成为傅立叶级数，根据级数的正交性总共可得到 $4M+2$ 方程可求得 $4M+2$ 未知数。对于尖圆锥面，式（18－11）在锥尖处有限可以消减 $2M+1$ 个常数，再利用锥底边界条件所建立的方程中将非傅立叶级数的部分展开成为傅立叶级数，根据级数的正交性可得到 $2M+1$ 方程可求得 $2M+1$ 未知数。可以求解尖圆锥壳温度场问题。当 $\theta = 90°$ 时，圆锥壳变为圆域。本文解同样适用于圆域问题求解。

在求解中，本文从数学角度建立如下函数：$T = \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} A_m r^{is} e^{im\varphi}$ 。实际上是将物理问题在数学上延拓到复数空间求解，在复数空间完成了分离变量，建立了形式解。根据实数化原理，形式解要符合实际物理，就要能回归实数函数形式。18.5 节给出证明，如 $T = \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} A_m r^{is} e^{im\varphi}$ 能归并为实数函数，需要 $T = \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} A_m r^{is} e^{im\varphi}$ 可归并为 $T = \sum\limits_{m=1}^{\infty} A_m r^{is} e^{im\varphi}$ 的实数部分表示即式（18－10）表示。这样，为简便起见，在求解偏微分方程时可将 $T = \sum\limits_{m=1}^{\infty} A_m r^{is} e^{im\varphi}$ 代入微分方程并直接从其实数部分推导求解，不需要再分析 m 的正负和函数的虚部、实部。研究表明，$T = \sum\limits_{m=1}^{\infty} A_m r^{is} e^{im\varphi}$ 是求解球坐标、极坐标下线性常系数偏微分方程问题时的基本函数。

对于复数形式的 $T = \sum\limits_{m=1}^{\infty} A_m r^{is} e^{im\varphi}$ ，实数形式的 $T = \sum\limits_{m=1}^{\infty} A_m r^{is} e^{im\varphi}$ 根据偏微分方程的阶数 N 可写为

$$T = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{N} r^{-b_n} \left[A_{n,m,r} \cos(m\varphi + a_n \ln r) - A_{n,m,i} \sin(m\varphi + a_n \ln r) \right] \right\} \quad (18-12)$$

18.4 数值实验

考虑各向异性薄圆锥面，热传导系数为 $k_{11} = 2$ kcal/(m · h · ℃)，$k_{22} = 1$ kcal/(m · h · ℃)，下边界（$r_1 = 0.1$m）给定温度边界条件为 $(2\sin\varphi + \cos\varphi + 5)$℃ ，上边界（$r_2 = 1.0$m）给定温度边界条件为 $(4\sin\varphi + 3\cos\varphi + 8)$℃ ，薄圆锥面与外界屏蔽，这样的介质稳态温度场形式上可以视为只与 (r,φ) 有关，即 $T = T(r,\varphi)$ 。从式（18－2）可知，圆锥半角（余纬度角 θ）对场分布影响也存在，但隐含在（18－2）的系数中间。

（1）特征根情况

解析解形式取决于特征解的形式。圆锥半角 $\theta = 60°$ 。针对不同的各向异性角和 m，计算特征根，特征根分布见下表。

表 18－1 特征根分布

s \ m	1	2	3	4	10	β
$s_1=a_1+\mathrm{i}b_1$	1.9121888489i	3.1883283615i	4.4935568236i	5.8064524419i	13.7165704510i	0°
$s_2=a_2+\mathrm{i}b_2$	−0.9121888489i	−2.1883283615i	−3.4935568236i	−4.8064524419i	−12.7165704510i	
$s_1=a_1+\mathrm{i}b_1$	−0.6498786495+2.3439085331i	−1.2997572991+4.0846889351i	−1.9496359486+5.8478956710i	−2.5995145981+7.6168798541i	−6.4987864954+18.2552771834i	60°
$s_2=a_2+\mathrm{i}b_2$	−0.6498786495−1.3439085331i	−1.2997572991−3.0846889351i	−1.9496359486−4.8478956710i	−2.5995145981−6.6168798541i	−6.4987864953−17.2552771834i	

从表 18－1 可看出，对应不同的 m，特征根均为复数。当 $\beta=0°$ 即正交异性情况下的特征根为纯虚数，而 $\beta\neq 0°$ 即各向异性情况下特征根为一般复数。复数特征根的虚部 b_1，b_2 分别为正数、负数，这就为处理尖锥壳面问题打下了基础，对于虚部为正数的级数项前待定系数在锥尖处应为 0，这样消减了 $M+1$ 个待定系数。

（2）各向异性锥壳稳态温度场分布分析

为检验本文解的正确性，考核本文解边界条件满足情况和温度分布总体情况。选取锥面域上边界（$r_1=0.1\mathrm{m}$）、温度为 $(2\sin\varphi+\cos\varphi+5)$℃，下边界（$r_1=1\mathrm{m}$）温度为 $(4\sin\varphi+3\cos\varphi+8)$℃，锥面与外界热绝缘，热传导系数同上算例。为研究热各向异性影响，改变各向异性角 β，观察当各向异性角 β 变化时，锥壳面温度场变化情况见表 18－2～表 18－3。

表 18－2 $T(r,\varphi)(\beta=0°,\theta=50°)$

r \ φ	0	45	90	135	180	225	270	315
0.1	6.0000	7.1213	7.0000	5.7071	4.0000	2.8787	3.0000	4.2929
0.3	8.2975	9.0523	8.7350	7.5315	6.1469	5.3922	5.7095	6.9129
0.5	9.2860	10.3569	9.8520	8.0670	6.0475	4.9764	5.4813	7.2663
0.7	10.0337	11.4555	10.7695	8.3774	5.6806	4.2588	4.9448	7.3369
0.9	10.6905	12.4650	11.6023	8.6077	5.2354	3.4609	4.3237	7.3183
1.0	11.0000	12.9498	12.0000	8.7071	5.0000	3.0503	4.0000	7.2929

表 18－3 $T(r,\varphi)(\beta=45°,\theta=50°)$

r \ φ	0	45	90	135	180	225	270	315
0.1	6.0000	7.1213	7.0000	5.7071	4.0000	2.8787	3.0000	4.2929
0.3	8.1447	8.0893	7.5259	6.7847	6.2997	6.3552	6.9185	7.6598
0.5	9.3863	9.5484	8.6081	7.1164	5.9470	5.7850	6.72520	8.2170
0.7	10.2204	10.9386	9.8517	7.5965	5.4939	4.7757	5.86265	8.1178
0.9	10.7946	12.2900	11.2506	8.2854	5.1313	3.6360	4.6753	7.6405
1.0	11.0000	12.9498	12.0000	8.7071	5.0000	3.0503	4.0000	7.2930

对以上数值分析结果可以得到以下结论：

各向异性锥形壳边界条件得到满足。各向异性对于各向异性温度场分布有较大影响。当各向异性角变化时，温度分布发生较大变化。这表明各向异性增强后加剧了锥面温度场不均匀性。

18.5 复数级数解实数化证明

对应于特征根 $s_n = a_n + \mathrm{i}b_n$ 的函数解为

$$
\begin{aligned}
T_n = &\sum_{m=-\infty}^{\infty}\{r^{-b_n}[A_{1,m,r}\cos(m\varphi + a_n\ln r) - A_{1,m,i}\sin(m\varphi + a_n\ln r)]\}+ \\
&\mathrm{i}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\{r^{-b_n}[A_{1,m,i}\cos(m\varphi + a_n\ln r) + A_{1,m,r}\sin(m\varphi + a_n\ln r)]\}
\end{aligned}
\tag{18-13}
$$

根据式（18-9），m 为正数对应的特征根实部 a_1 、虚部 b_1 即 $s_n = a_1 + \mathrm{i}b_1$ ，那么 $-m$ 对应的特征根为 $-a_1 + \mathrm{i}b_1$ ，对应可得

$$
\begin{aligned}
T_1 = &\sum_{m=1}^{\infty}\{r^{-b_1}[A_{1,m,r}\cos(m\varphi + a_1\ln r) - A_{1,m,i}\sin(m\varphi + a_1\ln r)]\}+ \\
&\sum_{m=-\infty}^{-1}\{r^{-b_1}[A_{1,m,r}\cos(m\varphi - a_1\ln r) - A_{1,m,i}\sin(m\varphi - a_1\ln r)]\}+ \\
&\mathrm{i}\{\sum_{m=1}^{\infty}r^{-b_1}[A_{1,m,i}\cos(m\varphi + a_1\ln r) + A_{1,m,r}\sin(m\varphi + a_1\ln r)]+ \\
&\sum_{m=-\infty}^{-1}r^{-b_1}[A_{1,m,i}\cos(m\varphi - a_1\ln r) + A_{1,m,r}\sin(m\varphi - a_1\ln r)]\}+ T^{**}
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
T_1 = &\sum_{m=1}^{\infty}\{r^{-b_1}[A_{1,m,r}\cos(m\varphi + a_1\ln r) - A_{1,m,i}\sin(m\varphi + a_1\ln r)]\}+ \\
&\sum_{m=1}^{\infty}\{r^{-b_1}[A_{1,(-m),r}\cos(m\varphi + a_1\ln r) + A_{1,(-m),i}\sin(m\varphi + a_1\ln r)]\}+ \\
&\mathrm{i}\{\sum_{m=1}^{\infty}r^{-b_1}[A_{1,m,i}\cos(m\varphi + a_1\ln r) + A_{1,m,r}\sin(m\varphi + a_1\ln r)]+ \\
&\sum_{m=1}^{\infty}r^{-b_1}[A_{1,(-m),i}\cos(m\varphi + a_1\ln r) - A_{1,(-m),r}\sin(m\varphi + a_1\ln r)]\}+ T^{**}
\end{aligned}
\tag{18-14}
$$

如 T_1 的虚部为 0，因 $r^{-b_1}\cos(m\varphi + a_1\ln r)$ 、$r^{-b_1}\sin(m\varphi + a_1\ln r)$ 是线性无关函数，可得

$$
\begin{aligned}
A_{1,m,i} &= -A_{1,(-m),i} \\
A_{1,m,r} &= A_{1,(-m),r}
\end{aligned}
\tag{18-15}
$$

将（18-15）代入（18-14），可得

$$
T_1 = 2\sum_{m=1}^{\infty}\{r^{-b_1}[A_{1,m,r}\cos(m\varphi + a_1\ln r) - A_{1,m,i}\sin(m\varphi + a_1\ln r)]\}
$$

第19章 与外界换热的各向异性薄圆锥壳稳态热传导方程——变形复数球柱函数应用

19.1 概述

各向异性圆锥薄壳与外界环境热传导问题是工程中经常遇到的问题，此问题在数学上提供了新的数学物理方程类型。本章应用变形复数球柱函数 $e^{i\nu\theta}\hat{C}_{i\rho}(x)$ 求解与外界换热的各向异性二维圆锥薄壳稳态热传导问题，并针对具体各向异性圆锥薄壳热传导问题进行了数值计算。

19.2 球坐标下各向异性稳态热传导方程

球坐标系 (r,θ,φ) 下，考虑面内换热的锥形薄壳（$r_1 \leqslant r \leqslant r_2$，$0\leqslant \varphi \leqslant 2\pi$，$\theta$ 固定，$0< \theta <\pi$），二维各向异性稳态热传导控制方程如下

$$k_{22}\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+k_{11}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial T}{\partial r})+2k_{12}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi\partial r}+k_{12}\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial\varphi}-2\frac{h_a}{\delta}(T-T_a)=q \tag{19-1}$$

其中 k_{11},k_{12},k_{22} 为热传导常数

$$\begin{cases}k_{11}=k_1\cos^2\beta+k_2\sin^2\beta\\ k_{12}=(k_1-k_2)\sin\beta\cos\beta\\ k_{22}=k_1\sin^2\beta+k_2\cos^2\beta\end{cases} \tag{19-2}$$

式中 $T(r,\varphi)$ 为温度，q 为热源函数，方向1为球坐标 r 经向方向，方向2为球坐标 φ（$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$）经线方向，$\delta$ 为板厚，h_a 为壳与壳面上下介质之间的换热系数，T_a 为壳面上下介质的环境温度。k_1,k_2 为各向异性介质两个主轴方向热传导常数，β 为 k_1 主轴方向与径线 r 方向的夹角。

鉴于设定锥壳很薄，可以假设物理量沿厚度（余纬度 θ）方向不变。定义

$$K_{11}=1,K_{12}=\frac{k_{12}}{k_{11}\sin\theta},K_{22}=\frac{k_{22}}{k_{11}\sin^2\theta}$$
$$\lambda=2\frac{h_a}{\delta k_{11}},q*=\frac{q-2T_a\dfrac{h_a}{\delta}}{k_{11}},x=r\sqrt{\lambda} \tag{19-3}$$

将式（19-3）代入方程（19-1），可得

$$K_{22}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial}{\partial x}(x^2\frac{\partial T}{\partial x})+2K_{12}x\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi\partial x}+K_{12}\frac{\partial T}{\partial\varphi}-x^2T=x^2q* \tag{19-4}$$

19.3　一般解析解

方程（19-4）与方程（9-3）一致，解析解也一致。

根据本书第9章类似步骤，求解圆锥壳热传导方程的特征方程，特征根为

$$\begin{cases} p_{1,n} = a_{1,n} + \mathrm{i}b_{1,n} \\ p_{2,n} = a_{1,n} + \mathrm{i}b_{2,n} \end{cases} \tag{19-5}$$

其中

$$\begin{cases} a_{1,n} = a_{2,n} = -nK_{12} \\ b_{1,n} = 0.5 + \sqrt{\dfrac{1}{4} + n^2(K_{22} - (K_{12})^2} \\ b_{2,n} = 0.5 - \sqrt{\dfrac{1}{4} + n^2(K_{22} - (K_{12})^2} \end{cases} \tag{19-6}$$

根据第9章求解方法，（19-4）复数形式解析解为

$$T = \sum_{l=1}^{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[(A_{l,n,0,r} + \mathrm{i}A_{l,n,0,i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\hat{C}_{ip_{l,n}}(x)] + c_0\mathrm{i}_0(x) + d_0\mathrm{k}_0(x) \tag{19-7}$$

其中 $n \neq 0$；$\hat{C}_{ip_{l,n}}(x) = x^{\mathrm{i}a_{l,n}}\mathrm{i}_{-b_{l,n}}(x)$。$i_0(x)$，$k_0(x)$ 分别为0阶第一，二类变形球贝塞尔函数。

式（19-7）实数形式解为

$$\mathrm{T}(\mathrm{r},\theta) = T_0 +$$

$$c_0\mathrm{i}_0(r\sqrt{\lambda}) + d_0\mathrm{k}_0(r\sqrt{\lambda}) +$$

$$2\sum_{l=1}^{2}\sum_{n=1}^{\infty}[A_{l,n,0,r}\mathrm{i}_{-b_{l,n}}(r\sqrt{\lambda})\cos(n\varphi + a_{l,n}\ln(r\sqrt{\lambda})) - A_{l,n,0,i}\mathrm{i}_{-b_{l,n}}(r\sqrt{\lambda})\sin(n\varphi + a_{l,n}\ln(r\sqrt{\lambda}))] \tag{19-8}$$

式中 $\mathrm{i}_{-b_{l,n}}(x)$ 为 $-b_{l,n}$ 阶第一类变形球贝塞尔函数。

式（19-8）可以求解与外界换热的薄圆锥壳温度场问题。在实际计算中，n 不可能取无穷大，取 n 最多取到 N，$\mathrm{i}_{-b_{l,n}}(x)$ 计算项数最多取到 M。这样一般解有 $4N+2$ 个未知数（即 $A_{l,n,0,r}$，$A_{l,n,0,i}(l=1,2;n=1,\cdots,N)$，$c_0$，$d_0$），对于圆锥环壳每边有1个边界条件，在每个边界条件所建立的方程中将非傅立叶级数的部分展开成为傅立叶级数，根据级数的正交性可得到 $4N+2$ 方程可求得 $4N+2$ 未知数。

对于实心圆锥环壳，根据中心处温度、热流为有限值的条件，可将待定常数削减一半，再根据圆锥环壳外边界的1个边界条件建立 $2N+1$ 线性代数方程，可以求解 $2N+1$ 个未知数，这样与外界换热各向异性圆锥环壳稳态温度场问题得解。

作为作业，求解各向同性圆锥薄壳与外界换热的稳态热传导问题。对于各向同性圆锥薄壳有，$k_{11} = k_{22} = k, k_{12} = 0$。

各向同性圆锥环壳与外界换热的稳态热传导控制偏微分方程为

$$K_{22}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial T}{\partial x}\right)-x^2T=x^2q* \tag{19-9}$$

式中 $K_{22}=\frac{1}{\sin^2\theta},\lambda=2\frac{h_a}{\delta k},q*=\frac{q}{k}-2T_a\frac{h_a}{\delta k},x=r\sqrt{\lambda}$ 。

对于各向同性圆锥薄壳

$$\begin{cases}a_{1,n}=a_{2,n}=0\\ b_{1,n}=0.5+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{n^2}{\sin^2\theta}}\\ b_{2,n}=0.5-\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{n^2}{\sin^2\theta}}\end{cases} \tag{19-10}$$

这样可得各向同性圆锥薄壳与外界换热的稳态热传导解析解

$$\mathrm{T}=c_0\mathrm{i}_0(x)+d_0\mathrm{k}_0(x)+\sum_{l=1}^{2}\sum_{n=1}^{\infty}[A_{l,n,0,r}\mathrm{i}_{-b_{l,n}}(x)\cos n\varphi-A_{l,n,0,i}\mathrm{i}_{-b_{l,n}}(x)\sin n\varphi]+T_0 \tag{19-11}$$

19.4 数值实验

研究壳表面与外界环境换热的曲线型各向异性实心圆锥薄壳，$T_a=0,h=0.01\mathrm{m}$，$R=1\mathrm{m}$，$q=0$，材料热传导系数和圆锥薄壳与外界热交换系数为 $k_1=2.29\mathrm{kcal/(m\cdot h\cdot ℃)}$，$k_2=0.59\mathrm{kcal/(m\cdot h\cdot ℃)}$，$h_a=0.50\mathrm{kcal/(m^2\cdot h\cdot ℃)}$。半锥角为 $\theta=45°$。圆锥薄壳内边界（$r_1=0.1\mathrm{m}$）温度边界条件为 $(2\sin\varphi+\cos\varphi+5)$℃。圆锥薄壳外边界（$r_2=1\mathrm{m}$）温度边界条件为 $(4\sin\varphi+3\cos\varphi+6)$℃。

（1）特征根分布

特征根 $p_{1,n}$，$p_{2,n}$ 可以根据式（19－6）计算，计算结果见表 19－1。

表 19－1　$p_{1,n},p_{2,n}(n=1,2,3)$ 随 β 变换情况

p \ β 0°	45°	90°	
$p_{1,1}$	i 1.37481	−0.83478+i1.74625	i2.53257
$p_{2,1}$	− i 0.37481	−0.83478−i0.74625	− i1.53257
$p_{1,2}$	i 2.02024	−1.66956+i2.83722	i4.47183
$p_{2,2}$	− i 1.02024	−1.66956−i1.83722	− i3.47183

其他计算结果可以表明，对于各向异性问题，特征根 $p_{1,n}$，$p_{2,n}$ 为复数根。$p_{1,n}$，$p_{2,n}$ 的虚部交叉正值、负值，这就为求解实心圆锥壳热传导问题提供了基础。这样锥心温度函数有限值条件，可以消减一半待定未知常数（$2N+1$）。

（2）各向异性圆锥薄壳温度场分布情况

本节选取各向异性角（$\beta=0°,\beta=45°$）和半锥角（$\theta=45°$），针对各向异性圆锥薄

壳进行计算壳内温度。$M=20$，其他计算参数同上节，φ 单位为（°），r 单位为 m。

表 19-2　$\beta=0°,\theta=45°$ 的各向异性圆锥薄壳温度 $T(r,\varphi)$（℃）

r \ φ	0	45	90	135	180	225	270	315
0.1	6.000	7.121	7.000	5.707	4.000	2.879	3.000	4.293
0.3	0.785	0.924	0.889	0.700	0.468	0.329	0.364	0.553
0.5	0.730	0.879	0.811	0.567	0.289	0.141	0.208	0.452
0.7	1.773	2.151	1.968	1.331	0.613	0.235	0.419	1.056
0.9	5.158	6.271	5.729	3.849	1.732	0.619	1.161	3.041
1.0	9.000	10.950	10.000	6.707	3.000	1.050	2.000	5.293

表 19-3　$\beta=45°,\theta=45°$ 的各向异性实心圆锥薄壳温度 $T(r,\varphi)$（℃）

r \ φ	0	45	90	135	180	225	270	315
0.1	6.000	7.121	7.000	5.707	4.000	2.879	3.000	4.293
0.3	0.363	0.430	0.462	0.441	0.379	0.313	0.281	0.301
0.5	0.345	0.348	0.277	0.173	0.098	0.095	0.167	0.270
0.7	1.163	1.265	1.041	0.622	0.254	0.152	0.376	0.795
0.9	4.494	5.285	4.677	3.027	1.301	0.511	1.119	2.770
1.0	9.000	10.950	10.000	6.707	3.000	1.050	2.000	5.293

根据以上计算结果，可以得到以下结论：

本章所得解析解收敛性好，很好地满足定解条件（边界条件）。各向异性显著地影响了各向异性圆锥薄壳温度场分布。各向异性角变化时，圆锥壳温度场就显著地变化。

第 20 章　各向异性薄圆锥壳非稳态热传导方程——复数球柱函数应用

薄圆锥壳中与时间相关的数学物理问题是常见的工程问题。而热传导问题又是工程中经常遇到的问题。本章应用复数球柱函数方法，求解薄圆锥壳各向异性热传导方程非稳态问题，得到了该问题一般解析解，并给出了数值计算结果。

20.1　球坐标下各向异性非稳态热传导方程

球坐标系(r,θ,φ)下，圆锥薄壳（$r_1 \leqslant r \leqslant r_2$，$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$，$\theta$固定，$0<\theta<\pi$）二维各向异性热传导非稳态问题控制方程如下

$$k_{22}\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+k_{11}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+2k_{12}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi\partial r}+k_{12}\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial\varphi}+q=\rho C_p\frac{\partial T}{\partial t} \tag{20-1}$$

其中 k_{11},k_{12},k_{22} 为热传导常数

$$\begin{cases} k_{11}=k_1\cos^2\beta+k_2\sin^2\beta \\ k_{12}=(k_1-k_2)\sin\beta\cos\beta \\ k_{22}=k_1\sin^2\beta+k_2\cos^2\beta \end{cases} \tag{20-2}$$

式中 $T(r,\varphi,t)$ 为温度。q 为热源函数。方向 1 为球坐标 r 经向方向，方向 2 为球坐标 φ 经线方向；球坐标 θ 为纬度余角（在圆锥壳中，θ 为圆锥顶角的一半）。k_1、k_2 为各向异性介质 r，φ 两个主轴方向热传导常数，β 为锥面内各向异性材料最大热传导系数轴向与 r 方向的夹角。

在工程中，以上物理模型可应用于大气中的纤维增强复合材料单层薄锥壳热传导。纤维采取圆锥等角螺线（角度为 β）铺设（即纤维与过圆锥顶端径线交角 β 都相等），$\beta=0$ 铺设即是纤维沿锥面地理径向射线铺设，$\beta=90^\circ$ 铺设即是纤维沿锥面圆周纬线方向铺设。

鉴于设定锥壳很薄，可以假设物理量沿厚度（θ）方向不变。

边界条件选定为

$$r=r_1, T(r,\varphi,t)=0; r=r_2, T(r,\varphi,t)=0 \tag{20-3}$$

初始条件为

$$T(r,\varphi,0)=f(r,\varphi) \tag{20-4}$$

设

$$T(r,\varphi,t)=u(r,\varphi)\Gamma(\mathrm{t}) \tag{20-5}$$

设研究区域无热源，$q=0$。对于有热源区域，求得式（20-1）特解并叠加到后文所得级数解一并展开处理即可。

将式（20 - 5）代入方程（20 - 1），可得

$$\frac{\frac{\partial \Gamma}{\partial t}}{\alpha\Gamma}=\frac{\left[k_{22}\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+k_{11}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})+2k_{12}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\partial r}+k_{12}\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right]\frac{1}{k_{11}}}{u}=-\lambda \tag{20-6}$$

其中 $\alpha=\frac{k_{11}}{\rho C_p}$，$\alpha$ 为热扩散系数，$\lambda>0$ 。

引入如下变量变换

$$K_{11}=1,K_{12}=\frac{k_{12}}{k_{11}\sin\theta},K_{22}=\frac{k_{22}}{k_{11}\sin^2\theta},x=r\sqrt{\lambda} \tag{20-7}$$

将式（20 - 7）代入式（20 - 6）可得

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t}+\alpha\lambda\Gamma=0 \tag{20-8}$$

$$K_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial}{\partial x}(x^2\frac{\partial u}{\partial x})+2K_{12}x\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\partial x}+K_{12}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+x^2u=0 \tag{20-9}$$

从方程（20 - 8）可得

$$\Gamma(t)=A\mathrm{e}^{-\lambda\alpha t} \tag{20-10}$$

式（20 - 3）可重新写为

$$r=r_1,u(r_1,\varphi)=0;r=r_2,u(r_2,\varphi)=0 \tag{20-11}$$

方程（20 - 9）与方程（10 - 8）一致，解析解形式也一致。

20.2　求解过程

20.2.1　齐次解

方程（20 - 9）的解假设为

$$u=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} \tag{20-12}$$

其中 $\mathrm{i}^2=-1$；n 为整数。

当 $n=0$，可得下面解

$$u(x)=c_0j_0(x)+d_0y_0(x) \tag{20-13}$$

其中 c_0,d_0 为实数待定常数；$j_0(x)$ 为第一类 0 阶球贝塞尔函数；$y_0(x)$ 为第二类 0 阶球贝塞尔函数。

其中

$$j_0(x)=\frac{\sin(x)}{x},y_0(x)=-\frac{\cos(x)}{x}$$

当 $n\neq0$，设

$$u=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A_{n,k}x^{k+\mathrm{i}p}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} \tag{20-14}$$

将式（20-14）代入方程（20-9），可得

$$u=\sum_{l=1}^{2}\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}A_{l,n,2m}x^{2m+ip_{l,n}}e^{in\varphi} \tag{20-15}$$

其中

$$p_{l,n}=a_{l,n}+ib_{l,n} \tag{20-16}$$

$$\begin{cases}a_{1,n}=-nK_{12}\\ b_{1,n}=0.5+\sqrt{\dfrac{1}{4}+n^2[K_{22}-(K_{12})^2]}\\ a_{2,n}=-nK_{12}\\ b_{2,n}=0.5-\sqrt{\dfrac{1}{4}+n^2[K_{22}-(K_{12})^2]}\end{cases} \tag{20-17}$$

当 $n\neq 0$，可有

$$u_{l,n}=\sum_{m=0}^{\infty}A_{l,n,m}x^{2m+ip_{l,n}}e^{in\varphi}=A_{l,n,0}e^{in\varphi}C_{ip_{l,n}}(x) \tag{20-18}$$

$$u_{l,n}=(A_{l,n,0,r}+iA_{l,n,0,i})e^{in\varphi}C_{ip_{l,n}}(x) \tag{20-19}$$

式（20-6）中的 λ 可根据式（20-15）非平凡解条件确定。下面分情况研究热传导问题。

20.2.2 具有第一类边界条件的薄实心圆锥壳非稳态热传导解

圆锥薄壳中心温度值有限性条件可以消除一半未知数，式（20-15）只有 $l=2$ 对应的一半级数项存在。

第一类边界条件简写为

$$r=R,u(x,\varphi)=0 \tag{20-20}$$

将式（20-19）代入式（20-20），可得

$$C_{ip_{l,n}}(x)=0 \tag{20-21}$$

当 $n=0$, $u=c_0j_0(x)$，这种解为对称解。下面首先研究对称问题，其次再研究一般情况问题。

（1）各向异性薄实心圆锥壳非稳态热传导解：对称情况

考虑到 $j_0(x)$ 为第一类 0 阶球贝塞尔函数，可得 $j_0(x)$ 的零点

$$\mu_j^0(\mu_j^0=j\pi)\text{，}j=1,2,\cdots$$

$$\lambda=\left(\frac{\mu_j^0}{R}\right)^2$$

关于 μ_j^0 的特征函数为

$$u_j=j_0\left(\frac{r}{R}\mu_j^0\right) \tag{20-22}$$

关于 μ_j^0 的 $\Gamma(t)$ 为

$$\Gamma(t)=Ae^{-\left(\frac{\mu_j^0}{R}\right)^2at} \tag{20-23}$$

这样可得方程（20-1）的中心对称解为

$$T(r,t) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \mathrm{e}^{-(\frac{\mu_j^0}{R})^2 at} j_0(\frac{r\mu_j^0}{R}) \tag{20-24}$$

对于边界条件（20-20）和初始条件 $T(r,0)=\varphi(r)$，如果初始条件是中心对称的，那么温度场就与 θ 无关。因此式（20-24）就是非稳态问题解。将 $t=0$ 代入式（20-24）后，代入初始条件 $T(r,0)=\varphi(r)$，将 $\varphi(r)$ 展开为 $j_0(\frac{r\mu_j^0}{R})$ 级数，对比所得初始条件方程左右两式，可以确定待定常数 A_j，问题得解。

（2）各向异性薄实心圆锥壳非稳态热传导解：一般情况

根据实心圆锥壳锥顶温度值有限值特性，式（20-17）只能取 $l=2$。

分析 $C_{ip_{l,n}}(x)=x^{ia_{l,n}} j_{-b_{l,n}}(x)$，$C_{ip_{l,n}}(x)=0$ 有无限多零点，记为 $\mu_{l,n,j}^0, j=1,2,3,\cdots$。

求解式（20-21）可得

$$\mu_{l,n,j}^0 = R\sqrt{\lambda} \tag{20-25}$$

$$\lambda = (\frac{\mu_{l,n,j}^0}{R})^2 \tag{20-26}$$

综合推导可得

$$T(r,\varphi,t) = \sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (A_{l,n,0,j,r} + \mathrm{i}A_{l,n,0,j,i}) C_{ip_{l,n}}(\frac{r\mu_{l,n,j}^0}{R}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} \mathrm{e}^{-(\frac{\mu_{l,n,j}^0}{R})^2 at} + \sum_{j=1}^{\infty} c_j j_0(\frac{r\mu_j^0}{R}) \mathrm{e}^{-(\frac{\mu_j^0}{R})^2 at} \tag{20-27}$$

将 $t=0$ 代入式（20-27）后再代入初始条件（20-4），可得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (A_{l,n,0,j,r} + \mathrm{i}A_{l,n,0,j,i}) C_{ip_{l,n}}(\frac{r\mu_{l,n,j}^0}{R}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} + \sum_{j=1}^{\infty} c_j j_0(\frac{r\mu_j^0}{R}) = f(r,\varphi) \tag{20-28}$$

根据复数球柱函数展开定理，将 $f(r,\varphi)$ 展开为二重复数级数函数

$$\varphi(r,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} B_{l,n,0,j} C_{ip_{l,n}}(\frac{r\mu_{l,n,j}^0}{R}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} + \sum_{j=1}^{\infty} b_j j_0(\frac{r\mu_j^0}{R}) \tag{20-29}$$

其中 $B_{l,n,0,j}$ 为复数常数，记为 $B_{l,n,0,j}=B_{l,n,0,j,r}+\mathrm{i}B_{l,n,0,j,i}$。$B_{l,n,0,j}$，$b_j$ 可分别由（10-78），（10-80）确定。比较式（20-28）和（20-29），可得下式

$$A_{l,n,0,j,r} = B_{l,n,0,j,r}, A_{l,n,0,j,i} = B_{l,n,0,j,i}, c_j = b_j \tag{20-30}$$

这样可得圆锥壳内温度场分布为

$$T(r,\varphi,t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j j_0(\frac{r\mu_j^0}{R}) \mathrm{e}^{-(\frac{\mu_j^0}{R})^2 at} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} j_{-b_{2,n}}(\frac{r\mu_{2,n,j}^0}{R})$$

$$\{A_{2,n,0,j,r}\cos[n\varphi + a_{2,n}\ln(\frac{r\mu_{2,n,j}^0}{R})] - A_{2,n,0,j,i}\sin[n\varphi + a_{2,n}\ln(\frac{r\mu_{2,n,j}^0}{R})]\} \mathrm{e}^{-(\frac{\mu_{2,n,j}^0}{R})^2 at} \tag{20-31}$$

其中求解（20-21）可得 $\mu_{2,n,j}^0$。

20.3 数值实验

研究实心曲线型各向异性薄圆锥薄壳，材料热传导系数 $k_1 = 0.301$kcal/(m·h·℃)，$k_2 = 0.129$kcal/(m·h·℃)，$\rho = 590$kg/m^3，$C_p = 1756$W·s/(kg·℃)，其他计算参数为 $R=1$m，$q=0$，薄圆锥薄壳外边界（$r_2 = 1$m）温度边界条件为 0℃，薄圆锥薄壳初始条件为 $[(r-r^4)\cos(\theta + a_{2,1}\ln r) + 1 - r^2]$℃。

（1）分离常数 $\lambda_{l,n,j} = (\frac{\mu^0_{l,n,j}}{R})^2$ 分布情况

根据式（20－21）可以确定分离常数（正值 $\lambda_{l,n,j}$ 或特征根 $\mu^0_{l,n,j}$）。式（20－18）中 m 计算最大项数 M 设定为 56，计算结果见表 20－1。

表 20－1 $\lambda_{l,n,j} = (\frac{\mu^0_{l,n,j}}{R})^2$ $(l=2,\ n=1)$，$\theta = 45°$

j \ β	0°	45°	90°
1	15.225037048688740	18.911614649295460	29.269131242765010
2	50.277262815216520	57.300711509957430	75.924426967362040
3	105.073626596288900	115.426138329920700	142.251482405573600
4	179.610246816043100	193.290217864666200	228.301181317912600
5	273.886425493360900	290.893327147443300	334.084001109468300
6	387.901938768544100	408.235561299960100	459.603115572782100
7	521.657403267406700	545.316342995984800	604.865943251547000
8	675.136394279666900	702.156815803817600	769.750790715321600
9	848.559402049809500	878.410578648152100	956.673451859297000
10	1045.164911389706000	1074.809260972434000	1121.941215226416000
11	1174.683244598336000		
12	2551.555027303531000		

计算表明复数球柱函数有无限多特征根，排序为 $0 < \lambda_{l,n,1} < \lambda_{l,n,2} < \lambda_{l,n,3} < \cdots$，当 $m \to \infty$，$\lambda_{l,n,j} \to \infty$。由于各向异性存在，$K_{11}$，$K_{12}$，$K_{22}$ 随 β 变化而变化，所以无法如同各向同性温度场（$K_{11} = 1$，$K_{12} = 0$，$K_{22} = 1$）计算中球贝塞尔函数那样给出固定的函数表，需要根据具体情况计算。

（2）验证所得解收敛性

针对各向异性角 $\beta = 45°$ 的曲线型各向异性实心薄圆锥薄壳非稳态问题进行收敛性验证计算，验证计算中其他参数与上节相同。具体增加 M 值，观察 $T(0.5,0,0)$(℃)数值变化情况，计算结果见表 20－2。计算表明 J（正值的 $\lambda_{l,n,j}$ 个数）与 M 相关联。

表 20 - 2　$T(0.5,0,0)$(℃)，$\beta=45°,\theta=45°$

M	6($J=2$)	20($J=4$)	20($J=4$)	40($J=10$)	56($J=10$)	*
$T(0.5,0,0)$	1.249	1.178	1.150	1.163	1.154	1.154

注：* 是精确解 $(r-r^{1})\cos(\theta+a_{2,1}\ln(r))+1-r^{2}$ 数值。

表 20 - 2 表明式（20 - 31）解随着 M（或 J）增加收敛稳定。

（3）实心各向异性薄圆锥薄壳温度场分析研究

首先验证式（20 - 31）对边界条件和初始条件的满足情况。计算结果见表 20 - 3～表 20 - 5。计算时，取 $M=56$，其他计算参数与上节相同。θ 单位为（°），r 单位为 m，t 时间单位为 s。

表 20 - 3　$T(r,\varphi,0)$ (°C)，$\beta=45°,\theta=45°,t=0$s

r \ φ	0	45	90	135	180	225	270	315
0.0	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
0.1	1.0150	0.9434	0.8990	0.9080	0.9650	1.0370	1.0810	1.0720
0.3	1.1360	0.9403	0.7270	0.6210	0.6842	0.8797	1.0930	1.1990
0.5	1.1540	0.9177	0.5828	0.3459	0.3457	0.5823	0.9172	1.1540
0.7	0.9615	0.7639	0.4530	0.1255	0.0585	0.2561	0.6024	0.8945
0.9	0.4356	0.3533	0.1753	0.0059	−0.0556	0.0267	0.2047	0.3741
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

表 20 - 4　初始温度条件$[(r-r^{1})\cos(\theta+0.5\ln r)+1-r^{2}]$℃ 数值

r \ φ	0	45	90	135	180	225	270	315
0.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.00001	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	1.0160	0.9406	0.8937	0.9032	0.9635	1.0390	1.0860	1.0770
0.3	1.1370	0.9404	0.7262	0.6197	0.6832	0.8796	1.0940	1.2000
0.5	1.1540	0.9177	0.5828	0.3459	0.3457	0.5823	0.9172	1.1540
0.7	0.9606	0.7634	0.4178	0.1262	0.0594	0.2566	0.6022	0.8938
0.9	0.4335	0.3519	0.1755	0.0076	−0.0535	0.0281	0.2045	0.3724
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

表 20 - 5　$T(r,\varphi,10^{5})$ (℃)，$\beta=45°,\theta=45°,t=1.250\times10^{5}$ **s**

r \ φ	0	45	90	135	180	225	270	315
0.001	0.8444	0.8444	0.8444	0.8444	0.8444	0.8444	0.8444	0.8444
0.1	0.8609	0.7849	0.7379	0.7474	0.8079	0.8838	0.9308	0.9213
0.3	0.9213	0.7802	0.5995	0.5097	0.5633	0.7289	0.9095	0.9993

续表

r \ φ	0	45	90	135	180	225	270	315
0.5	0.8866	0.7167	0.4763	0.3062	0.3061	0.4760	0.7164	0.8865
0.7	0.6255	0.5139	0.3182	0.1531	0.1153	0.2269	0.4226	0.5877
0.9	0.2092	0.1778	0.1100	0.0455	0.0221	0.0534	0.1212	0.1857
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	.0000

根据以上计算结果，可以得到以下结论：

本章所得解析解收敛性好，很好地满足定解条件（边界条件，初始条件）。随着时间增加，温度场数值趋向于0℃，这与物理常识一致。计算表明，所得解是正确的。本章引入的复数球柱函数方法可以广泛应用于求解薄圆锥壳域内的数学物理问题。

第 21 章　复数柱函数系列积分变换

在数学物理问题求解中，可以通过积分变换，把一个函数变换成另外一个函数

$$T[f(x)] = \int_a^b K(s,x)f(x)\mathrm{d}x = F(s)$$

式中 $K(s,x)$ 为已知函数，称为积分变换的核；$F(s)$ 为象函数；$f(x)$ 为原函数（或原象函数）。根据积分核 $K(s,x)$ 的不同，可以建立多种积分变换，本章将本书中提出的系列复数柱函数作为积分核，建立了复数柱函数变换、复数球柱函数变换、变形复数柱函数变换、变形复数球柱函数变换及其多重变换，并给出了相应有限变换公式。

21.1　复数柱函数变换

21.1.1　基本公式

设 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上有定义，由以下积分所确定的函数

$$Z(\alpha) = \int_0^\infty xf(x)\left[Z_{ip}(\alpha x)\right]^* \mathrm{d}x \tag{21-1}$$

称为 $f(x)$ 的 ip 阶复数柱函数变换，记作 $\chi_{ip}[f(x)]$，即

$$Z(\alpha) = \chi_{ip}[f(x)]$$

其中 $Z_{ip}(x)$ 为 ip 阶复数柱函数（见第 5 章），$[Z_{ip}(\alpha x)]^*$ 为 $Z_{ip}(\alpha x)$ 为共轭函数；$p = a + \mathrm{i}b$，a 和 b 为实数。

定理 21.1　设积分 $\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，且 $f(x)$ 在点 x 的邻域内是有界变差函数，则当 $\mathrm{Im}(\mathrm{i}p) \geqslant -\frac{1}{2}$ 且 $f(x)$ 在点 x 连续时，复数柱函数变换的反演公式为

$$f(x) = \int_0^\infty Z(\alpha)Z_{ip}(\alpha x)\alpha \mathrm{d}\alpha$$

证明：

根据汉克尔定理，设积分 $\int_0^\infty f(y)\mathrm{d}y$ 绝对收敛，且 $f(y)$ 在点 x 的邻域内是有界变差函数，则当 $\mathrm{Im}(\mathrm{i}p) \geqslant -\frac{1}{2}$ 且 $f(x)$ 在点 x 连续时，有

$$f(x) = \int_0^\infty J_{-b}(\alpha x)(x\alpha)^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^\infty J_{-b}(\alpha y)(y\alpha)^{\frac{1}{2}} f(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}\alpha \tag{21-2}$$

根据式（5-75），可有

$$Z_{ip}(x) = x^{\mathrm{i}a}J_{-b}(x)$$

$$J_{-p}(x)=x^{ia}\left[Z_{ip}(x)\right]^{*} \tag{21-3}$$

式（21－3）代入式（21－2）可得

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}(\alpha x)^{ia}\left[Z_{ip}(\alpha x)\right]^{*}(x\alpha)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\alpha\int_{0}^{\infty}(\alpha y)^{ia}\left[Z_{ip}(\alpha y)\right]^{*}(y\alpha)^{\frac{1}{2}}f(y)\mathrm{d}y \tag{21-4}$$

在式（21－4）中用 $\sqrt{x}f(x)x^{-ia}$ 替代 $f(x)$，可得

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}(\alpha x)^{2ia}\left[Z_{ip}(\alpha x)\right]^{*}F(\alpha)\alpha\mathrm{d}\alpha$$

其中 $Z(\alpha)=\int_{0}^{\infty}yf(y)\left[Z_{ip}(\alpha y)\right]^{*}\mathrm{d}x$

根据式（5－75），可得

$$Z_{ip}(\alpha x)=(\alpha x)^{2ia}\left[Z_{ip}(\alpha x)\right]^{*}$$

这样上式改写为

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}Z(\alpha)Z_{ip}(\alpha x)\alpha\mathrm{d}\alpha \tag{21-5}$$

式（21－5）为复数柱函数变换的反演公式，$f(x)$ 称为 $Z(\alpha)$ 的复数柱函数积分反变换（或原象函数），记为 $Z^{-1}[Z(\alpha)]$。

21.1.2 复数柱函数变换性质

性质 1. $\chi_{ip}[f(Cx)]=\frac{1}{C^{2}}Z(\frac{\alpha}{C})$（$C$ 为常数）

性质 2. $\chi_{ip}[\frac{f(x)}{x}]=\frac{\alpha}{ip+(ip)^{*}}\{\chi_{ip-1}[f(x)]+\chi_{ip+1}[f(x)]\}$

性质 3. $-\chi_{ip}[f(x)]=\chi_{ip}\left\{\frac{\mathrm{d}^{2}f}{\mathrm{d}x^{2}}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}[1+(ip)^{*}-ip]-f\frac{ip(ip)^{*}}{x^{2}}\right\}$

证明：

$$\chi_{ip}[f(Cx)]=\int_{0}^{\infty}xf(Cx)\left[Z_{ip}(\alpha x)\right]^{*}\mathrm{d}x=\frac{1}{C^{2}}\int_{0}^{\infty}Cxf(Cx)\left[Z_{ip}(C\frac{\alpha x}{C})\right]^{*}\mathrm{d}(Cx)$$

令 $y=Cx$，上式可写为

$$\chi_{ip}[f(Cx)]=\frac{1}{C^{2}}\int_{0}^{\infty}yf(y)\left[Z_{ip}(\frac{\alpha y}{C})\right]^{*}\mathrm{d}y=\frac{1}{C^{2}}Z(\frac{\alpha}{C})$$

性质 1 得证。

根据复数柱函数递推公式（5－85）

$$Z_{ip-1}(x)+Z_{ip+1}(x)=\frac{ip+(ip)^{*}}{x}Z_{ip}(x)$$

将上式乘以 x^{-2ai}，可得

$$\left[Z_{ip-1}(x)\right]^{*}+\left[Z_{ip+1}(x)\right]^{*}=\frac{ip+(ip)^{*}}{x}\left[Z_{ip}(x)\right]^{*} \tag{21-6}$$

对式（21－6）左右两端进行复数柱函数变换，可得

$$\chi_{ip}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=\frac{\alpha}{ip+(ip)^*}\{\chi_{ip-1}[f(x)]+\chi_{ip+1}[f(x)]\}$$

性质 2 得证。

考虑 Z_{ip} 方程

$$x^2\frac{d^2f}{dx^2}+x\frac{df}{dx}(1+2K_{12}in)+f(x^2-K_{22}n^2)=0$$

将式（5－14）代入上式，可得

$$-f=\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{df}{dx}[1+(ip)^*-ip]-f\frac{ip(ip)^*}{x^2}$$

对上式左右两端进行复数柱函数变换，可得

$$-\chi_{ip}[f(x)]=\chi_{ip}\left\{\frac{d^2f(x)}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{df(x)}{dx}[1+(ip)^*-ip]-f(x)\frac{ip(ip)^*}{x^2}\right\}$$

性质 3 得证。

21.1.3　复数柱函数变换表

复数柱函数变换表见表 21－1。

表 21－1　复数柱函数变换表

$f(x)$	ip	$\chi_{ip}[f(x)]$
$x^{\mu-1}$	$\mathrm{Im}(ip)>-1$	$\dfrac{2^{\mu-ia}\Gamma(\frac{1+\mu-ia-b}{2})}{\alpha^{\mu+1}\Gamma(\frac{1-\mu+ia-b}{2})}$
1	$\mathrm{Im}(ip)>-1$	$\dfrac{2^{1-ia}\Gamma(\frac{2-ia-b}{2})}{\alpha^2\Gamma(\frac{ia-b}{2})}$
$\begin{cases}x^{ip},0<x<z\\0,x>z\end{cases}$	$\mathrm{Im}(ip)>-1$	$z^{ip+1}[Z_{ip+1}(\alpha z)]^*$
$\begin{cases}1,0<x<z\\0,x>z\end{cases}$	$\mathrm{Im}(ip)>-1$	$z[Z_1(\alpha z)]^*$
$e^{-tx}x^s$		$\dfrac{\alpha^{-ia-b}\Gamma(-ia-b+s+2)F(\frac{-ia-b+s+2}{2},\frac{-ia-b+s+3}{2},-b+1,-\frac{\alpha^2}{t^2})}{t^{-ia-b+s+2}2^{-b}\Gamma(-b+1)}$
e^{-tx}		$\dfrac{\alpha^{-ia-b}\Gamma(-ia-b+2)F(\frac{-ia-b+2}{2},\frac{-ia-b+3}{2},-b+1,-\frac{\alpha^2}{t^2})}{t^{-ia-b+2}2^{-b}\Gamma(-b+1)}$

注：① $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ 为超几何函数。

②当 $\mathrm{Im}(p)=0$，复数柱函数变换即退化为汉克尔变换，读者可以自行验证。

21. 2 有限复数柱函数变换

21. 2. 1 基本公式

设 $f(r)$ 在 $[0,R]$ 上有定义，$f(r)$ 的有限复数柱函数变换由以下积分所确定

$$F_z(\alpha_j) = \int_0^R rf(r)\left[Z_{ip}(\alpha_j \frac{r}{R})\right]^* \mathrm{d}r \tag{21-7}$$

其中 α_j 为 $Z_{ip}(x)=0$ 的第 j 个根。

定理 21.2 设 $f(r)$ 在区间 $[0,R]$ 内满足狄利克雷条件，则在区间 $[0,R]$ 内 $f(r)$ 的每个连续点处，都有

$$f(r) = \sum_j \frac{F_z(\alpha_j)Z_{ip}(\frac{r}{R}\alpha_j)}{\int_0^R \left[Z_{ip}(\frac{r}{R}\alpha_j)\right]^* Z_{ip}(\frac{r}{R}\alpha_j)r\mathrm{d}r}. \tag{21-8}$$

其中 $\sum_j$ 表示对方程 $Z_{ip}(x)=0$ 的一切实数根求和，$\left[Z_{ip}(\frac{r}{R}\alpha_j)\right]^*$ 为 $Z_{ip}(\frac{r}{R}\alpha_j)$ 的共轭函数。

式（21-8）为式（21-7）的反演公式。

21. 2. 2 有限复数柱函数变换表

有限复数柱函数变换表见表 21-2。

表 21-2 有限复数柱函数变换表

$f(x)$	ip	$\chi_{ip}[f(x)]$
$\begin{cases} x^{ip}, 0<x<z \\ 0, x>z \end{cases}$	$\mathrm{Im}(ip)>-1$	$z^{ip+1}\left[Z_{ip+1}(\alpha z)\right]^*$
$\begin{cases} 1, 0<x<z \\ 0, x>z \end{cases}$	$\mathrm{Im}(ip)>-1$	$z\left[Z_1(\alpha z)\right]^*$

21. 3 复数球柱函数变换

21. 3. 1 基本公式

设 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上有定义，由下列积分所确定的函数

$$H(\alpha) = \int_0^\infty x^2 f(x)\left[C_{ip-\frac{1}{2}}(\alpha x)\right]^* \mathrm{d}x \tag{21-9}$$

称为 $f(x)$ 的 $(\mathrm{i}p-\frac{1}{2})$ 阶复数球柱函数变换，记作 $\bar{\omega}_{ip}[f(x)]$

即

$$H(\alpha)=\bar{\omega}_{ip}[f(x)]$$

其中 $C_{ip-\frac{1}{2}}(x)$ 为 $(\mathrm{i}p-\frac{1}{2})$ 阶复数球柱函数，见第 10 章式（10 - 56），$[C_{ip-\frac{1}{2}}(\alpha x)]^*$ 为 $C_{ip-\frac{1}{2}}(\alpha x)$ 的共轭函数，$p=a+\mathrm{i}b$，a 和 b 为实数。

定理 21.3　设积分 $\int_0^\infty f(y)\mathrm{d}y$ 绝对收敛，且 $f(y)$ 在点 x 的邻域内是有界变差函数，则当 $\mathrm{Im}(\mathrm{i}p)\geqslant-\frac{1}{2}$ 且 $f(x)$ 在点 x 连续时，有 $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty H(\alpha)C_{ip-\frac{1}{2}}(\alpha x)\alpha^2\mathrm{d}\alpha$，此式为复数球柱函数变换的反演公式。

证明：

根据定理 21.1，设积分 $\int_0^\infty f(y)\mathrm{d}y$ 绝对收敛，且 $f(y)$ 在点 x 的邻域内是有界变差函数，则当 $\mathrm{Im}(\mathrm{i}p)\geqslant-\frac{1}{2}$ 且 $f(x)$ 在点 x 连续时，有

$$f(x)=\int_0^\infty(\alpha x)^{\mathrm{i}a}[Z_{ip}(\alpha x)]^*(x\alpha)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\alpha\int_0^\infty(\alpha y)^{\mathrm{i}a}[Z_{ip}(\alpha y)]^*(y\alpha)^{\frac{1}{2}}f(y)\mathrm{d}y$$

将复数球柱函数和复数柱函数关系式 $C_{ip}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}Z_{ip+\frac{1}{2}}(x)$ 代入上式，可得

$$f(x)=\int_0^\infty(\alpha x)^{\mathrm{i}a}[C_{ip-\frac{1}{2}}(\alpha x)]^*\sqrt{\frac{2x\alpha}{\pi}}(x\alpha)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\alpha\int_0^\infty(\alpha y)^{\mathrm{i}a}[C_{ip-\frac{1}{2}}(\alpha y)]^*\sqrt{\frac{2y\alpha}{\pi}}(y\alpha)^{\frac{1}{2}}f(y)\mathrm{d}y \tag{21-10}$$

在式（21 - 10）中用 $xf(x)x^{-\mathrm{i}a}$ 替代 $f(x)$，可得

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty(\alpha x)^{2\mathrm{i}a}[C_{ip-\frac{1}{2}}(\alpha x)]^*\left\{\int_0^\infty y^2f(y)[C_{ip-\frac{1}{2}}(\alpha y)]^*\mathrm{d}y\right\}\alpha^2\mathrm{d}\alpha$$

根据式（10 - 56），可得 $C_{ip}(\alpha x)=(\alpha x)^{2\mathrm{i}a}[C_{ip}(\alpha x)]^*$，这样上式改写为

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty C_{ip-\frac{1}{2}}(\alpha x)\left\{\int_0^\infty y^2f(y)[C_{ip-\frac{1}{2}}(\alpha y)]^*\mathrm{d}y\right\}\alpha^2\mathrm{d}\alpha \tag{21-11}$$

定义 $H(\alpha)=\left\{\int_0^\infty y^2f(y)[C_{ip-\frac{1}{2}}(\alpha y)]^*\mathrm{d}y\right\}$ 为 f 的 $(\mathrm{i}p-\frac{1}{2})$ 阶复数球柱函数变换，那么

$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\alpha^2H(\alpha)C_{ip-\frac{1}{2}}(\alpha x)\mathrm{d}\alpha$ 为复数球柱函数变换的反演公式。

$f(x)$ 称为 $H(\alpha)$ 的复数球柱函数积分反变换（或原象函数），记为 $H^{-1}[H(\alpha)]$。

21.3.2　复数球柱函数变换性质

性质 1. $\bar{\omega}_{ip}[f(Cx)]=\frac{1}{C^3}H(\frac{\alpha}{C})$（C 为常数）

性质 2. $\bar{\omega}_{ip}[\frac{f(x)}{x}]=\frac{\alpha}{ip+(ip)^*+1}\{\bar{\omega}_{ip-1}[f(x)]+\bar{\omega}_{ip+1}[f(x)]\}$

性质 3. $-\bar{\omega}_{ip}[f(x)]=\bar{\omega}_{ip}[\frac{d^2f(x)}{dx^2}+\frac{2}{x}[1+\frac{(ip-\frac{1}{2})^*-(ip-\frac{1}{2})}{2}]\frac{df(x)}{dx}+\frac{A}{x^2}f(x)]$

其中 $A=\frac{1}{4}-\left\{\frac{1}{2}[(ip-\frac{1}{2})+(ip-\frac{1}{2})^*]+1\right\}^2+[\frac{(ip-\frac{1}{2})^*-(ip-\frac{1}{2})}{2}]^2+\frac{(ip-\frac{1}{2})^*-(ip-\frac{1}{2})}{2}$

证明：

$$\bar{\omega}_{ip}[f(Cx)]=\int_0^\infty x^2f(Cx)[C_{ip-\frac{1}{2}}(\alpha x)]^*\mathrm{d}x=\frac{1}{C^3}\int_0^\infty(Cx)^2f(Cx)[C_{ip-\frac{1}{2}}(\alpha x)]^*\mathrm{d}(Cx)$$

令 $y=Cx$ ，上式可写为

$$\bar{\omega}_{ip}[f(Cx)]=\frac{1}{C^3}\int_0^\infty y^2f(y)[C_{ip-\frac{1}{2}}(\frac{\alpha y}{C})]^*\mathrm{d}y=\frac{1}{C^3}H(\frac{\alpha}{C})$$

性质 1 得证。

根据复数球柱函数递推公式式（10－87）

$$C_{ip-1}(x)+C_{ip+1}(x)=\frac{ip+(ip)^*+1}{x}C_{ip}(x) \tag{21-12}$$

将上式乘以 x^{-2ai} ，可得

$$[C_{ip-1}(x)]^*+[C_{ip+1}(x)]^*=\frac{ip+(ip)^*+1}{x}[C_{ip}(x)]^* \tag{21-13}$$

对式（21－13）左右两端进行复数球柱函数变换，可得

$$\bar{\omega}_{ip}[\frac{f(x)}{x}]=\frac{\alpha}{ip+(ip)^*+1}\{\bar{\omega}_{ip-1}[f(x)]+\bar{\omega}_{ip+1}[f(x)]\} \tag{21-14}$$

性质 2 得证。

考虑球 Z_{ip} 方程 $x^2\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}+2x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(1+K_{12}in)+f(x^2-K_{22}n^2+iK_{12}n)=0$ ，可得

$$\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}+\frac{2}{x}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(1+K_{12}in)+f(1+\frac{-K_{22}n^2+iK_{12}n}{x^2})=0$$

将（10－21）代入上式，可得

$$\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}+\frac{2}{x}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}[1+\frac{(ip-\frac{1}{2})^*-(ip-\frac{1}{2})}{2})]+$$
$$f(1+\frac{\frac{1}{4}-\left\{\frac{1}{2}[(ip-\frac{1}{2})+(ip-\frac{1}{2})^*]+1\right\}^2+[\frac{(ip-\frac{1}{2})^*-(ip-\frac{1}{2})}{2}]^2+\frac{(ip-\frac{1}{2})^*-(ip-\frac{1}{2})}{2}}{x^2})=0$$

对上式进行复数柱函数变换，可得

$$-\bar{\omega}_{ip}[f(x)] = \bar{\omega}_{ip}\left\{\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{2}{x}\left[1 + \frac{(ip-\frac{1}{2})^* - (ip-\frac{1}{2})}{2}\right]\frac{df(x)}{dx} + \frac{A}{x^2}f(x)\right\}$$

性质 3 得证。

21.4　有限复数球柱函数变换

设 $f(r)$ 在 $[0,R]$ 上有定义，$f(r)$ 的有限复数球柱函数变换由下列积分所确定

$$H_z(\alpha_j) = \int_0^R r^2 f(r)\left[C_{ip-\frac{1}{2}}(\alpha_j \frac{r}{R})\right]^* dr \tag{21-15}$$

其中 α_j 为 $C_{ip-\frac{1}{2}}(x) = 0$ 的第 j 个根，$x = \alpha r$ 。

定理 21.4　设 $f(r)$ 在区间 $[0,R]$ 内满足狄利克雷条件，则在区间 $[0,R]$ 内 $f(r)$ 的每个连续点处，都有

$$f(r) = \sum_j \frac{H_z(\alpha_j)C_{ip-\frac{1}{2}}(\frac{r}{R}\alpha_j)}{\int_0^R \left[C_{ip-\frac{1}{2}}(\frac{r}{R}\alpha_j)\right]^* C_{ip-\frac{1}{2}}(\frac{r}{R}\alpha_j)r^2 dr} \tag{21-16}$$

其中 $\sum_j$ 表示对方程 $C_{ip-\frac{1}{2}}(x) = 0$ 的一切正实数根 α_j 求和，$\left[C_{ip-\frac{1}{2}}(\frac{r}{R}\alpha_j)\right]^*$ 为 $C_{ip-\frac{1}{2}}(\frac{r}{R}\alpha_j)$ 的共轭函数。

式（21－16）为式（21－15）的反演公式。

21. 5　变形复数柱函数变换

21.5.1　基本公式

设 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上有定义，由下列积分所确定的函数

$$G(\beta) = \int_0^\infty x f(x)\left[\hat{Z}_{ip}(\beta x)\right]^* dx \tag{21-17}$$

称为 $f(x)$ 的 ip 阶变形复数柱函数变换，记作 $\psi_{ip}[f(x)]$

即

$$G(\beta) = \psi_{ip}[f(x)]$$

其中 $\hat{Z}_{ip}(x)$ 为 ip 阶变形复数柱函数，见第 7 章式（7－15）；$[\hat{Z}_{ip}(\beta x)]^*$ 为 $\hat{Z}_{ip}(\beta x)$ 的共轭函数；$p = a + ib$，a 和 b 为实数。

定理 21.5　设积分 $\int_0^\infty f(y)dy$ 绝对收敛，且 $f(y)$ 在点 x 的邻域内是有界变差函数，则当 $\mathrm{Im}(ip) \geqslant -\frac{1}{2}$ 且 $f(x)$ 在点 x 连续时，变形复数柱函数变换的反演公式为

$$f(x)=\begin{cases}-\mathrm{i}^{2b}\int_0^\infty \beta \hat{Z}_{ip}(\beta x)G(\beta)\mathrm{d}\beta,\ -\pi<\arg(\beta x)\leqslant \pi/2\\ i^{2b}\int_0^\infty \beta \hat{Z}_{ip}(\beta x)G(\beta)\mathrm{d}\beta,\ \pi/2<\arg(\beta x)\leqslant \pi\end{cases}$$

其中 $\arg(\beta x)$ 是 βx 的幅角。

证明：

根据汉克尔定理，设积分 $\int_0^\infty f(y)\mathrm{d}y$ 绝对收敛，且 $f(y)$ 在点 x 的邻域内是有界变差函数，则当 $\mathrm{Im}(\mathrm{i}p)\geqslant -\frac{1}{2}$ 且 $f(x)$ 在点 x 连续时，有

$$f(x)=\int_0^\infty J_\nu(\alpha x)(x\alpha)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\alpha\int_0^\infty J_\nu(\alpha y)(y\alpha)^{\frac{1}{2}}f(y)\mathrm{d}y$$

记 $\alpha=\mathrm{i}\beta$，上式改写为

$$f(x)=\int_0^\infty J_\nu(\mathrm{i}\beta x)(x\mathrm{i}\beta)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\alpha\int_0^\infty J_\nu(\mathrm{i}\beta y)(y\mathrm{i}\beta)^{\frac{1}{2}}f(y)\mathrm{d}y \tag{21-18}$$

根据贝塞尔函数与变形贝塞尔函数关系式

当 $-\pi<\arg(x)\leqslant\pi/2$ 时，$I_{-b}(x)=(-\mathrm{i})^{-b}J_{-b}(\mathrm{i}x)$ (21-19a)

当 $\pi/2<\arg(x)\leqslant\pi$ 时，$I_{-b}(x)=(\mathrm{i})^{-b}J_{-b}(-\mathrm{i}x)$ (21-19b)

根据上式，可以分两种情况讨论积分变换。

当 $-\pi<arg(\beta\mathrm{x})\leqslant\pi/2$，$J_{-b}(\mathrm{i}\beta x)=(-\mathrm{i})^{b}I_{-b}(\beta x)$ (21-20)

式（21-20）代入式（21-18）可得

$$f(x)=-\mathrm{i}^{-2b}\sqrt{x}\int_0^\infty \beta I_{-b}(\beta x)\mathrm{d}\beta\int_0^\infty \sqrt{y}I_{-b}(\beta y)f(y)\mathrm{d}y \tag{21-21}$$

根据变形复数柱函数关系式 $\hat{Z}_{ip}(x)=x^{\mathrm{i}a}I_{-b}(x)$，可得

$$I_{-b}(x)=x^{-\mathrm{i}a}\hat{Z}_{ip}(x) \tag{21-22}$$

其中 $p=a+\mathrm{i}b$。

式（21-22）代入式（21-21）可得

$$f(x)=-\mathrm{i}^{2b}\sqrt{x}\int_0^\infty(\beta x)^{-\mathrm{i}a}\hat{Z}_{ip}(\beta x)\mathrm{d}\beta\int_0^\infty(\beta y)^{-\mathrm{i}a}\hat{Z}_{ip}(\beta y)\sqrt{y}f(y)\mathrm{d}y \tag{21-23}$$

在（21-23）中用 $\sqrt{x}f(x)x^{-\mathrm{i}a}$ 替代 $f(x)$ 可得

$$f(x)=-\mathrm{i}^{2b}\int_0^\infty\beta\hat{Z}_{ip}(\beta x)\left[\int_0^\infty yf(y)\left[\hat{Z}_{ip}(\beta y)\right]^*\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}\beta \tag{21-24}$$

定义

$$G(\beta)=\int_0^\infty yf(y)\left[\hat{Z}_{ip}(\beta y)\right]^*\mathrm{d}y \tag{21-25}$$

这样（21-25）可写为

$$f(x)=-\mathrm{i}^{2b}\int_0^\infty\beta\hat{Z}_{ip}(\beta x)G(\beta)\mathrm{d}\beta \tag{21-26}$$

式（21-25）为变形复数柱函数变换，式（21-26）为复数柱函数变换的反演公式，

$f(x)$ 称为 $G(\beta)$ 的变形复数柱函数积分反变换（或原象函数），记为 $G^{-1}[G(\beta)]$。

当 $\pi/2 < \arg(\beta x) \leqslant \pi$，按照类似步骤可得

$$f(x) = \mathrm{i}^{2b}\int_0^{\infty}\beta\hat{Z}_{ip}(\beta x)\left[\int_0^{\infty}yf(y)\left[\hat{Z}_{ip}(\beta y)\right]^{*}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}\beta \tag{21-27}$$

这样式（21-27）可写为

$$f(x) = \mathrm{i}^{2b}\int_0^{\infty}\beta\hat{Z}_{ip}(\beta x)G(\beta)\mathrm{d}\beta \tag{21-28}$$

对应变形复数柱函数变换，式（21-28）为 $\pi/2 < \arg(\beta x) \leqslant \pi$ 情况下的变形复数柱函数变换的反演公式。

21.5.2　变形复数柱函数变换性质

性质 1. $\psi_{ip}[f(Cx)] = \frac{1}{C^2}G(\frac{\beta}{C})$（$C$ 为常数）

性质 2. $\psi_{ip}[\frac{f(x)}{x}] = \frac{\alpha}{ip+(ip)^{*}}\{\chi_{ip-1}[f(x)]-\chi_{ip+1}[f(x)]\}$

21.6　有限变形复数柱函数变换

设 $f(r)$ 在 $[0,R]$ 上有定义，$f(r)$ 的有限变形复数柱函数变换由下列积分所确定

$$G_z(\beta_j) = \int_0^R rf(r)\left[\hat{Z}_{ip}(\beta_j\frac{r}{R})\right]^{*}\mathrm{d}r \tag{21-29}$$

其中 β_j 为 $\hat{Z}_{ip}(x)=0$ 的第 j 个根，$x=\beta r$。

定理 21.6　设 $f(r)$ 在区间 $[0,R]$ 内满足狄利克雷条件，则在区间 $[0,R]$ 内 $f(r)$ 的每个连续点处，都有

$$f(r) = \sum_j \frac{G_z(\beta_j)\hat{Z}_{ip}(\frac{r}{R}\beta_j)}{\int_0^R\left[\hat{Z}_{ip}(\frac{r}{R}\beta_j)\right]^{*}\hat{Z}_{ip}(\frac{r}{R}\beta_j)r\mathrm{d}r} \tag{21-30}$$

其中 $\sum_j$ 表示对方程 $\hat{Z}_{ip}(x)=0$ 的一切实数根 β_j 求和；$\left[\hat{Z}_{ip}(\frac{r}{R}\beta_j)\right]^{*}$ 为 $\hat{Z}_{ip}(\frac{r}{R}\beta_j)$ 的共轭函数。

式（21-30）为式（21-29）的反演公式。

21.7　变形复数球柱函数变换

21.7.1　基本公式

设 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上有定义，$f(x)$ 的 ip 阶变形复数球柱函数变换由下列积分所确定

$$Y(\beta) = \int_0^{\infty}x^2f(x)\left[\hat{C}_{ip-\frac{1}{2}}(\beta x)\right]^{*}\mathrm{d}x \tag{21-31}$$

记作 $\vartheta_{ip}[f(x)]$，即

$$Y(\beta)=\vartheta_{ip}[f(x)]$$

其中 $\hat{C}_{ip-\frac{1}{2}}(\beta x)$ 为 $(ip-\frac{1}{2})$ 阶变形复数球柱函数，见第 9 章式（9－52）；$[\hat{C}_{ip-\frac{1}{2}}(\beta x)]^*$ 为 $\hat{C}_{ip-\frac{1}{2}}(\beta x)$ 的共轭函数，$p=a+ib$，a 和 b 为实数。

定理 21.7　设积分 $\int_0^\infty f(y)\mathrm{d}y$ 绝对收敛，且 $f(y)$ 在点 x 的邻域内是有界变差函数，则当 $\mathrm{Im}(ip)\geqslant -\frac{1}{2}$ 且 $f(x)$ 在点 x 连续时，变形复数球柱函数变换的反演公式为

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{\pi}i^{2b}\displaystyle\int_0^\infty \beta^2\hat{C}_{ip-\frac{1}{2}}(\beta x)Y(\beta)\mathrm{d}\beta, & -\pi<\arg(\beta x)\leqslant\pi/2\\ \dfrac{2}{\pi}i^{2b}\displaystyle\int_0^\infty \beta^2\hat{C}_{ip-\frac{1}{2}}(\beta x)Y(\beta)\mathrm{d}\beta, & \pi/2<\arg(\beta x)\leqslant\pi\end{cases}$$

证明：

根据定理 21.5，设积分 $\int_0^\infty f(y)\mathrm{d}y$ 绝对收敛，且 $f(y)$ 在点 x 的邻域内是有界变差函数，则当 $\mathrm{Im}(ip)\geqslant -\frac{1}{2}$ 且 $f(x)$ 在点 x 连续时，当 $-\pi<\arg(\beta x)\leqslant\pi/2$，可有

$$f(x)=-i^{2b}\sqrt{x}\int_0^\infty\beta(\beta x)^{-ia}\hat{Z}_{ip}(\beta x)\mathrm{d}\beta\int_0^\infty(\beta y)^{-ia}\hat{Z}_{ip}(\beta y)\sqrt{y}f(y)\mathrm{d}y \tag{21-32}$$

将变形复数球柱函数和变形复数柱函数关系式 $\hat{C}_{ip}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\hat{Z}_{ip+\frac{1}{2}}(x)$ 代入上式，可得

$$f(x)=-i^{2b}\sqrt{x}\int_0^\infty\beta(\beta x)^{-ia}\hat{C}_{ip-\frac{1}{2}}(\beta x)\sqrt{\frac{2x\beta}{\pi}}\mathrm{d}\beta\int_0^\infty(\beta y)^{-ia}\hat{C}_{ip-\frac{1}{2}}(\beta y)\sqrt{\frac{2y\beta}{\pi}}(y)^{\frac{1}{2}}f(y)\mathrm{d}y \tag{21-33}$$

在式（21－33）中用 $xf(x)x^{-ia}$ 替代 $f(x)$，可得

$$f(x)=-\frac{2}{\pi}i^{2b}\int_0^\infty\beta^2\hat{C}_{ip-\frac{1}{2}}(\beta x)\{\int_0^\infty y^2f(y)[\hat{C}_{ip-\frac{1}{2}}(\beta y)]^*\mathrm{d}y\}\mathrm{d}\beta \tag{21-34}$$

定义

$$Y(\beta)=\int_0^\infty y^2f(y)[\hat{C}_{ip-\frac{1}{2}}(\beta y)]^*\mathrm{d}y \tag{21-35}$$

这样式（21－34）可写为

$$f(x)=-\frac{2}{\pi}i^{2b}\int_0^\infty\beta^2\hat{C}_{ip-\frac{1}{2}}(\beta x)Y(\beta)\mathrm{d}\beta \tag{21-36}$$

式（21－35）为变形复数球柱函数变换，式（21－36）为 $-\pi<\arg(\beta x)\leqslant\pi/2$ 情况下的变形复数球柱函数变换反演公式，$f(x)$ 称为 $G(\beta)$ 的变形复数球柱函数积分反变换（或原象函数），记为 $Y^{-1}[Y(\beta)]$。

当 $\pi/2<arg(\beta x)\leqslant\pi$，按照类似步骤可得

$$f(x)=\frac{2}{\pi}i^{2b}\int_0^\infty\beta^2\hat{C}_{ip-\frac{1}{2}}(\beta x)Y(\beta)\mathrm{d}\beta \tag{21-37}$$

对应变形复数球柱函数变换（21－35），当 $\pi/2 < arg(\beta x) \leqslant \pi$ 情况下，变形复数球柱函数变换的反演公式为式（21－37）。

21.7.2　变形复数球柱函数变换性质

性质1. $\vartheta_{ip}[f(Cx)] = \frac{1}{C^3}Y(\frac{\beta}{C})$（$C$ 为常数）

性质2. $\vartheta_{ip}[\frac{f(x)}{x}] = \frac{\alpha}{ip+(ip)^*+1}\{\vartheta_{ip-1}[f(x)] - \vartheta_{ip+1}[f(x)]\}$

21.8　有限变形复数球柱函数变换

设 $f(r)$ 在 $[0,R]$ 上有定义，$f(x)$ 的有限变形复数球柱函数变换由下列积分所确定

$$Y_z(\beta_j) = \int_0^R r^2 f(r)\left[\hat{C}_{ip-\frac{1}{2}}(\beta_j \frac{r}{R})\right]^* \mathrm{d}r \tag{21-38}$$

其中 β_j 为 $\hat{C}_{ip-\frac{1}{2}}(x) = 0$ 的第 j 个根，$x = \beta r$ 。

定理21.8　设 $f(r)$ 在区间 $[0,R]$ 内满足狄利克雷条件，则在区间 $[0,R]$ 内 $f(r)$ 的每个连续点处，都有

$$f(r) = \sum_j \frac{Y_z(\beta_j)\hat{C}_{ip-\frac{1}{2}}(\frac{r}{R}\beta_j)}{\int_0^R \left[\hat{C}_{ip-\frac{1}{2}}(\frac{r}{R}\beta_j)\right]^* \hat{C}_{ip-\frac{1}{2}}(\frac{r}{R}\beta_j) r^2 \mathrm{d}r} \tag{21-39}$$

其中 $\sum_j$ 表示对方程 $\hat{C}_{ip-\frac{1}{2}}(x) = 0$ 的一切实数根 β_j 求和；$\left[\hat{C}_{ip-\frac{1}{2}}(\frac{r}{R}\beta_j)\right]^*$ 为 $\hat{C}_{ip-\frac{1}{2}}(\frac{r}{R}\beta_j)$ 的共轭函数。

式（21－39）为（21－38）的反演公式。

21.9　多重复数柱函数变换

21.9.1　二重复数柱函数变换基本公式

设 $f(r,\theta)$ 在极坐标平面 (r,θ)（其中 $0 \leqslant r < \infty$，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$）上有定义，由下列积分所确定的函数

$$Z(\alpha,n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_0^{2\pi} rf(r,\theta)\left[Z_{ip}(\alpha r)e^{in\theta}\right]^* \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r \tag{21-40}$$

称为 $f(r,\theta)$ 的 $ip \times n$ 阶二重复数柱函数变换。记作 $\zeta_{ip,n}[f(r,\theta)]$，即

$$Z(\alpha,n) = \zeta_{ip,n}[f(r,\theta)] \tag{21-41}$$

其中 $Z_{ip}(\alpha r)$ 为 ip 阶复数柱函数；$[Z_{ip}(\alpha r)]^*$ 为 $Z_{ip}(\alpha r)$ 的共轭函数；$p = a+ib$，a 和 b 为实数，$n=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\cdots$ 。

$\zeta_{ip,n}[f(r,\theta)]$ 的二重复数柱函数逆变换公式为

$$f(r,\theta)=\sum_{n=0,\pm1,\pm2,\cdots}\int_0^\infty Z(\alpha,n)Z_{ip}(\alpha r)e^{in\theta}\alpha\,d\alpha \tag{21-42}$$

根据定理 21.1 和复数傅立叶级数原理，可以证明式（21-42），读者可以自行进行。

21.9.2 二重复数球柱函数变换基本公式

设 $f(r,\theta)$ 在极坐标平面 (r,θ)（其中 $0\leqslant r<\infty$，$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$）上有定义，由下列积分所确定的函数

$$Q(\alpha,n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}r^2f(r,\theta)\left[C_{ip-\frac{1}{2}}(\alpha r)e^{in\theta}\right]^*d\theta dr \tag{21-43}$$

称为 $f(r,\theta)$ 的 $(ip-\frac{1}{2})\times n$ 阶二重复数球柱函数变换。记作 $\upsilon_{ip,n}[f(r,\theta)]$，即

$$Q(\alpha,n)=\upsilon_{ip,n}[f(r,\theta)] \tag{21-44}$$

其中 $C_{ip-\frac{1}{2}}(\alpha r)$ 为 $ip-\frac{1}{2}$ 阶复数球柱函数，$[C_{ip-\frac{1}{2}}(\alpha r)]^*$ 为 $\dot{C}_{ip-\frac{1}{2}}(\alpha r)$ 为共轭函数，$p=a+ib$，a 和 b 为实数，$n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$。

$\zeta_{ip,n}[f(r,\theta)]$ 的二重复数球柱函数逆变换公式为

$$f(r,\theta)=\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=0,\pm1,\pm2,\cdots}\int_0^\infty Q(\alpha,n)C_{ip-\frac{1}{2}}(\alpha r)e^{in\theta}\alpha^2\,d\alpha \tag{21-45}$$

根据定理 21.3 和复数傅立叶级数原理可以证明式（21-45），读者可以自行进行。

21.9.3 二重变形复数柱函数变换基本公式

设 $f(r,\theta)$ 在极坐标平面 (r,θ)（其中 $0\leqslant r<\infty$，$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$）上有定义，由下列积分所确定的函数

$$X(\beta,n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}rf(r,\theta)\left[\hat{Z}_{ip}(\beta r)e^{in\theta}\right]^*d\theta dr \tag{21-46}$$

称为 $f(r,\theta)$ 的 $ip\times n$ 阶二重变形复数柱函数变换，记作 $\tau_{ip,n}[f(r,\theta)]$

即

$$X(\beta,n)=\tau_{ip,n}[f(r,\theta)] \tag{21-47}$$

其中 $\hat{Z}_{ip}(\beta r)$ 为 ip 阶复数柱函数，$[\hat{Z}_{ip}(\beta r)]^*$ 为 $\hat{Z}_{ip}(\beta r)$ 的共轭函数，$p=a+ib$，a 和 b 为实数，$n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$。

$\tau_{ip,n}[f(r,\theta)]$ 的二重变形复数柱函数逆变换公式为

$$f(r,\theta)=\begin{cases}-i^{2b}\displaystyle\sum_{n=0,\pm1,\pm2,\cdots}\int_0^\infty X(\beta,n)\hat{Z}_{ip}(\alpha r)e^{in\theta}\beta d\beta, & -\pi<\arg(\beta r)\leqslant\pi/2\\ i^{2b}\displaystyle\sum_{n=0,\pm1,\pm2,\cdots}\int_0^\infty X(\beta,n)\hat{Z}_{ip}(\alpha r)e^{in\theta}\beta d\beta, & \pi/2<\arg(\beta r)\leqslant\pi\end{cases} \tag{21-48}$$

根据定理 21.5 和复数傅立叶级数原理，可以证明式（21-48），读者可以自行证明。

21.9.4　二重变形复数球柱函数变换基本公式

设 $f(r,\theta)$ 在极坐标平面 (r,θ)（其中 $0\leqslant r<\infty$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$）上有定义，由下列积分所确定的函数

$$Y(\beta,n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}r^2 f(r,\theta)\left[\hat{C}_{ip-\frac{1}{2}}(\beta r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\right]^*\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \tag{21-49}$$

称为 $f(r,\theta)$ 的 $(\mathrm{i}p-\frac{1}{2})\times n$ 阶二重变形复数球柱函数变换，记作 $\sigma_{ip,n}[f(r,\theta)]$

即

$$Y(\beta,n)=\sigma_{ip,n}[f(r,\theta)] \tag{21-50}$$

其中 $\hat{C}_{ip-\frac{1}{2}}(\beta r)$ 为 $\mathrm{i}p-\frac{1}{2}$ 阶变形复数球柱函数，$[\hat{C}_{ip-\frac{1}{2}}(\beta r)]^*$ 为 $\hat{C}_{ip-\frac{1}{2}}(\beta r)$ 为共轭函数，$p=a+\mathrm{i}b$，a 和 b 为实数，$n=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\cdots$。

$\sigma_{ip,n}[f(r,\theta)]$ 的二重复数球柱函数逆变换公式为

$$f(r)=\begin{cases}-\mathrm{i}^{2b}\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0,\pm1,\pm2,\cdots}\int_0^{\infty}Y(\beta,n)\hat{C}_{ip-\frac{1}{2}}(\beta r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\beta^2\mathrm{d}\beta, & -\pi<\arg(\beta x)\leqslant\pi/2\\ i^{2\mathrm{b}}\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0,\pm1,\pm2,\cdots}\int_0^{\infty}Y(\beta,n)\hat{C}_{ip-\frac{1}{2}}(\beta r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\beta^2\mathrm{d}\beta, & \pi/2<\arg(\beta x)\leqslant\pi\end{cases} \tag{21-51}$$

根据定理 21.7 和复数傅立叶级数原理，可以证明式（21－51），读者可以自行证明。

21.9.5　三重复数柱函数变换基本公式

设 $f(r,\theta,z)$ 在三维柱坐标平面 (r,θ,z)（其中 $0\leqslant r<\infty$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，$-\infty<z<\infty$）上有定义，由下列积分所确定的函数

$$C(\alpha,n,\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_0^{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}rf(r,\theta,z)\left[Z_{ip}(\alpha r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z}\right]^*\mathrm{d}z\right\}\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}r \tag{21-52}$$

称为 $f(r,\theta,z)$ 的 $\mathrm{i}p\times n\times\omega$ 阶三重复数柱函数变换，记作 $T_{ip,n,\omega}[f(r,\theta,z)]$

即

$$C(\alpha,n,\omega)=T_{ip,n,\omega}[f(r,\theta,z)] \tag{21-53}$$

其中 $Z_{ip}(\alpha r)$ 为 $\mathrm{i}p$ 阶复数柱函数，$[Z_{ip}(\alpha r)]^*$ 为 $Z_{ip}(\alpha r)$ 的共轭函数，$p=a+\mathrm{i}b$，a 和 b 为实数，$n=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\cdots$，$\omega=c+\mathrm{i}d$。

$T_{ip,n,\omega}[f(r,\theta,z)]$ 的三重复数柱函数逆变换公式为

$$f(r,\theta,z)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0,\pm1,\pm2,\cdots}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}C(\alpha,n,\omega)Z_{ip}(\alpha r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z}\mathrm{d}\omega\right]\alpha\mathrm{d}\alpha \tag{21-54}$$

根据定理 21.1（对 r 方向复数柱函数变换）、复数傅立叶级数展开（对 θ 方向）和拉普拉斯变换（对 z 方向），可以证明式（21－54）。

本章定义的系列复数积分变换可用于柱坐标下各向异性数学物理方程无限域定解问题求解。

第 22 章　各向异性波动方程解析解

波动方程是一种重要的数学物理方程。在各向异性电磁场和其他技术领域研究中将会遇到各向异性波动方程。各向异性波动方程中同样出现了待定函数关于空间坐标的奇次偏导数，经典分离变量法解析求解各向异性波动方程会遇到困难。作者采用本书发展的复数分离变量法和有关复数特殊函数求解了圆域、圆柱域和球面域、球体内各向异性波动方程问题，给出了一些波动方程边值问题解析解。

22.1　圆柱坐标系下二维各向异性波动方程

圆柱坐标系 (r,θ,z) 下二维圆柱域内各向异性波动方程为

$$c_{11}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r})+2c_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}+c_{22}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (22-1)$$

式中 $u(r,\theta,t)$ 为圆域内物理场分布函数，圆域内 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，$0\leqslant r\leqslant R$，$z$ 为常数。c_{11}，c_{12}，c_{22} 为物理常数。c_{11},c_{12},c_{22} 中下标 1 代表径向 r 方向，下标 2 代表 θ 切向方向。

设实心圆域边界条件为

$$r=R,u(r,\theta,t)=0;r=0,u(0,\theta,t)\text{ 有限值} \qquad (22-2)$$

初始条件为

$$u(r,\theta,0)=f(r,\theta)\text{ , }\frac{\partial u(r,\theta,0)}{\partial t}=g(r,\theta) \qquad (22-3)$$

设方程（22－1）有如下形式解

$$u(r,\theta,t)=v(r,\theta)\Gamma(\mathrm{t}) \qquad (22-4)$$

将式（22－4）代入方程（22－1）后，再分离变量可得

$$\frac{\frac{\partial^2\Gamma}{\partial t^2}}{c_{11}\Gamma}=\frac{[c_{11}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial v}{\partial r})+2c_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial\theta}+c_{22}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}]\frac{1}{c_{11}}}{v}=-\lambda \qquad (22-5)$$

式中 λ 为分离变量常数。

本节定义如下无量纲量和参数变换

$$K_{11}=1,K_{12}=\frac{c_{12}}{c_{11}},K_{22}=\frac{c_{22}}{c_{11}}\text{ , }x=r\sqrt{\lambda} \qquad (22-6)$$

将式（22－6）代入式（22－5）可得

$$\frac{\partial^2\Gamma}{\partial t^2}+\lambda c_{11}\Gamma=0 \qquad (22-7)$$

$$K_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}+K_{11}x\frac{\partial}{\partial x}(x\frac{\partial v}{\partial x})+2K_{12}x\frac{\partial^2 v}{\partial\theta\partial x}+x^2 v=0 \qquad (22-8)$$

根据方程（22 - 7），可得

$$\Gamma(t) = C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda c_{11}}t} + D\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda c_{11}}t} \tag{22-9}$$

式中 C, D 为复数常数。

边界条件（22 - 2）改写为

$$x = x_2, v(x,\theta) = 0; x = 0, v(x,\theta) \text{ 有限} \tag{22-10}$$

式中 $x_2 = R\sqrt{\lambda}$ 。

方程（22 - 8）解设为

$$v = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \tag{22-11}$$

式中 $\mathrm{i}^2 = -1$ ；n 为整数。

当 n=0，方程（22 - 8）简化为

$$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}) + x^2 v = 0 \tag{22-12}$$

方程（22 - 12）为 0 阶贝塞尔方程，其解为

$$v(x) = c_0 J_0(x) + d_0 Y_0(x) \tag{22-13}$$

式中 c_0, d_0 为实数未知常数。$J_0(x)$ 为第一类 0 阶贝塞尔函数，$Y_0(x)$ 为第二类 0 阶贝塞尔函数。

对于 $n \neq 0$ 情况，将式（22 - 11）代入方程（22 - 8），化简后可得

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2 f_n}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}x}(1 + 2K_{12}\mathrm{i}n) + f_n(x^2 - K_{22}n^2) = 0 \tag{22-14}$$

方程（22 - 14）为 Z_{ip} 微分方程。沿用第 5 章类似步骤，可得方程（22 - 14）解为

$$f_n(x) = A_{1,n,0}Z_{\mathrm{i}p_{1,n}}(x) + A_{2,n,0}Z_{\mathrm{i}p_{2,n}}(x) \tag{22-15}$$

式中 $A_{1,n,0}$ ，$A_{2,n,0}$ 为复数常数。$p_{l,n} = a_{l,n} + \mathrm{i}b_{l,n}$（$l$=1，2），且有

$$\begin{cases} a_{1,n} = -nK_{12} \\ b_{1,n} = n\sqrt{(K_{22} - K_{12}{}^2)} \\ a_{2,n} = -nK_{12} \\ b_{2,n} = -n\sqrt{(K_{22} - K_{12}{}^2)} \end{cases} \tag{22-16}$$

方程（22 - 5）中 λ 可根据式（22 - 15）中的非平凡解条件确定。下面将分情况求解。

圆心处物理场有限条件可以用来消减待定常数。根据式（22 - 16），在 n>0 情况下，只有 l=2 对应函数项存在，由此可将式（22 - 15）简化为

$$f_n(x) = A_{l,n,0}Z_{\mathrm{i}p_{l,n}}(x) \tag{22-17}$$

式中 $l = 2$ 。

边界条件（22 - 2）可简写为

$$r = R, v(x,\theta) = 0$$

式中 $x = R\sqrt{\lambda}$ 。

将 $f_n(x) = A_{l,n,0}Z_{\mathrm{i}p_{l,n}}(x)$ 代入以上边界条件，可得

$$Z_{ip_{l,n}}(x) = 0 \tag{22-18}$$

对于 $n=0$，$v = c_0 J_0(x)$ 为圆心对称解。下面，第一步，研究对称问题，第二步将研究一般情况。

（1）中心对称波情况

根据线性偏微分方程可叠加性原理，可得方程（22－1）的中心对称解

$$u(r,t) = \sum_{j=1}^{\infty}(A_j \cos \sqrt{c_{11}} \frac{\mu_j^0}{R}t + B_j \sin \sqrt{c_{11}} \frac{\mu_j^0}{R}t) J_0(\frac{r\mu_j^0}{R}) \tag{22-19}$$

式中 μ_j^0（$j=1$，2，…）为 0 阶贝塞尔函数 $J_0(x)$ 的零点，$\lambda = (\frac{\mu_j^0}{R})^2$。

式（22－19）为实心圆域内波的中心对称解。如果圆域内波动方程的初始条件为

$$u(r,0) = f_0(r)\,,\ \frac{\partial u(r,0)}{\partial t} = g_0(r)$$

此种情况下的该波动物理场与 θ 无关，式（22－19）就是波动方程解。将 $t=0$ 代入到式（22－19）并代入以上初始条件：$u(r,0) = f_0(r)$，$\frac{\partial u(r,0)}{\partial t} = g_0(r)$，形成 2 个方程，并所得方程中的 $f_0(r)$ 和 $g_0(r)$ 分别展开成 $J_0(\frac{r\mu_j^0}{R})$ 的级数，根据级数正交性可确定待定常数 A_j 和 B_j，对称波问题求解完毕。

（2）一般波情况

考虑 $Z_{ip_{l,n}}(x) = x^{ia_{l,n}} \sum_{m=0}^{\infty} Z_{l,n,2m} x^{2m-b_{l,n}}$，$Z_{ip_{l,n}}(x)$ 有无穷多零点，记为 $\mu_{l,n,j}^0$，$j=1$，2，3，…。

求解 $Z_{ip_{l,n}}(x) = 0$ 可得零点 $\mu_{l,n,j}^0$

$$\mu_{l,n,j}^0 = R\sqrt{\lambda} \tag{22-20}$$

根据式（22－4）（22－9）（22－17）（22－20），可得

$$\begin{aligned} & u(r,\theta,t) = \\ & \sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} [(A_{l,n,0,j,r} + iA_{l,n,0,j,i}) Z_{ip_{l,n}}(\frac{r\mu_{l,n,j}^0}{R}) e^{in\theta} e^{i\sqrt{c_{11}}\frac{\mu_{l,n,j}^0}{R}t} + \\ & (B_{l,n,0,j,r} + iB_{l,n,0,j,i}) Z_{ip_{l,n}}(\frac{r\mu_{l,n,j}^0}{R}) e^{in\theta} e^{-i\sqrt{c_{11}}\frac{\mu_{l,n,j}^0}{R}t}] + \\ & \sum_{j=1}^{\infty}(A_j \cos \sqrt{c_{11}} \frac{\mu_j^0}{R}t + B_j \sin \sqrt{c_{11}} \frac{\mu_j^0}{R}t) J_0(\frac{r\mu_j^0}{R}) \end{aligned} \tag{22-21}$$

将 $t=0$ 代入到式（22－21）后，再代入初始条件式（22－3），可得

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} [(A_{l,n,0,j,r} + iA_{l,n,0,j,i}) Z_{ip_{l,n}}(\frac{r\mu_{l,n,j}^0}{R}) e^{in\theta} + \\ & (B_{l,n,0,j,r} + iB_{l,n,0,j,i}) Z_{ip_{l,n}}(\frac{r\mu_{l,n,j}^0}{R}) e^{in\theta}] + \sum_{j=1}^{\infty} A_j J_0(\frac{r\mu_j^0}{R}) = f(r,\theta) \end{aligned} \tag{22-22}$$

$$\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}[\mathrm{i}\sqrt{c_{11}}\frac{\mu_{l,n,j}^{0}}{R}(A_{l,n,0,j,r}+\mathrm{i}A_{l,n,0,j,i})Z_{\mathrm{i}p_{l,n}}(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R})\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}-$$

$$\mathrm{i}\sqrt{c_{11}}\frac{\mu_{l,n,j}^{0}}{R}(B_{l,n,0,j,r}+\mathrm{i}B_{l,n,0,j,i})Z_{\mathrm{i}p_{l,n}}(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R})\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}]+ \tag{22-23}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sqrt{c_{11}}\frac{\mu_{j}^{0}}{R}B_{j}J_{0}(\frac{r\mu_{j}^{0}}{R})=g(r,\theta)$$

根据第 5 章复数柱函数展开定理，可将 $f(r,\theta)$ 和 $g(r,\theta)$ 展开为以下级数

$$f(r,\theta)=\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}C_{l,n,0,j}Z_{\mathrm{i}p_{l,n}}(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R})\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}+\sum_{j=1}^{\infty}c_{j}J_{0}(\frac{r\mu_{j}^{0}}{R}) \tag{22-24}$$

$$g(r,\theta)=\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}D_{l,n,0,j}Z_{\mathrm{i}p_{l,n}}(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R})\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}+\sum_{j=1}^{\infty}d_{j}J_{0}(\frac{r\mu_{j}^{0}}{R}) \tag{22-25}$$

式中 $C_{l,n,0,j}$ 和 $D_{l,n,0,j}$ 为复数常数。$C_{l,n,0,j}$，$D_{l,n,0,j}$，c_j 和 d_j 可分别根据式（5—70）（5—72）确定。记 $C_{l,n,0,j}=C_{l,n,0,j,r}+\mathrm{i}C_{l,n,0,j,i}$，$D_{l,n,0,j}=D_{l,n,0,j,r}+\mathrm{i}D_{l,n,0,j,i}$。

对比式（22-22）（22-23）和式（22-24）（22-25）中 $Z_{\mathrm{i}p_{l,n}}(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R})\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$，$J_0(\frac{r\mu_{j}^{0}}{R})$ 前系数，可得

$$\begin{cases}A_{l,n,0,j}+B_{l,n,0,j}=C_{l,n,0,j}\\ \mathrm{i}\sqrt{c_{11}}\frac{\mu_{l,n,j}^{0}}{R}(A_{l,n,0,j}-B_{l,n,0,j})=D_{l,n,0,j}\\ A_{j}=c_{j}\\ \sqrt{c_{11}}\frac{\mu_{j}^{0}}{R}B_{j}=d_{j}\end{cases} \tag{22-26}$$

求解式（22-26），可得待定常数 $A_{l,n,0,j}$，$B_{l,n,0,j}$，A_j，B_j。

根据 $Z_{\mathrm{i}p_{l,n}}(x)=x^{\mathrm{i}a_{l,n}}J_{-b_{l,n}}(x)$，可将式（22-21）改写为

$$u(r,\theta,t)=$$

$$\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\{A_{l,n,0,j,r}\cos[n\theta+a_{l,n}\ln(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R})+\sqrt{c_{11}}\frac{\mu_{l,n,j}^{0}}{R}t]-$$

$$A_{l,n,0,j,i}\sin[n\theta+a_{l,n}\ln(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R})+\sqrt{c_{11}}\frac{\mu_{l,n,j}^{0}}{R}t]\}J_{-b_{l,n}}(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R})+$$

$$\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\{B_{l,n,0,j,r}\cos[n\theta+a_{l,n}\ln(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R})-\sqrt{c_{11}}\frac{\mu_{l,n,j}^{0}}{R}t]- \tag{22-27a}$$

$$B_{l,n,0,j,i}\sin[n\theta+a_{l,n}\ln(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R})-\sqrt{c_{11}}\frac{\mu_{l,n,j}^{0}}{R}t]\}J_{-b_{l,n}}(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R})+$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}(A_{j}\cos\sqrt{c_{11}}\frac{\mu_{j}^{0}}{R}t+B_{j}\sin\sqrt{c_{11}}\frac{\mu_{j}^{0}}{R}t)J_{0}(\frac{r\mu_{j}^{0}}{R})$$

根据数学物理的实数化原理，式（22-27a）可简写为

$$u(r,\theta,t)=$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\{A_{l,n,0,j,r}\cos[n\theta+a_{l,n}\ln(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R})+\sqrt{c_{11}}\frac{\mu_{l,n,j}^{0}}{R}t]-$$
$$A_{l,n,0,j,i}\sin[n\theta+a_{l,n}\ln(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R})+\sqrt{c_{11}}\frac{\mu_{l,n,j}^{0}}{R}t]\}J_{-b_{l,n}}(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R})+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\{B_{l,n,0,j,r}\cos[n\theta+a_{l,n}\ln(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R})-\sqrt{c_{11}}\frac{\mu_{l,n,j}^{0}}{R}t]- \qquad (22-27b)$$
$$B_{l,n,0,j,i}\sin[n\theta+a_{l,n}\ln(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R})-\sqrt{c_{11}}\frac{\mu_{l,n,j}^{0}}{R}t]\}J_{-b_{l,n}}(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R})+$$
$$\sum_{j=1}^{\infty}(A_j\cos\sqrt{c_{11}}\frac{\mu_j^{0}}{R}t+B_j\sin\sqrt{c_{11}}\frac{\mu_j^{0}}{R}t)J_0(\frac{r\mu_j^{0}}{R})$$

式（22－21）为方程（22－1）的复数形式解，式（22－27b）为方程（22－1）实数形式解。这样可得如下结论：如果给定一波动物理场，可确定 $p_{l,n}$ 和 $Z_{ip_{l,n}}(x)$，由此可确定 $\mu_{l,n,j}^{0}$。根据复数柱函数展开定理，可确定 $C_{l,n,0,j}$，$D_{l,n,0,j}$，$\dot{c}_j$，d_j。根据式（22－26）可确定待定常数 $A_{l,n,0,j}$，$B_{l,n,0,j}$，A_j，B_j。根据式（22－27b）可确定波动物理场待定函数解。至此，求解完毕。

22.2 圆柱坐标系下三维各向异性波动方程

圆柱坐标 (r,θ,z) 下的一种 A 类型的三维各向异性波动方程可写为

$$c_{11}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r})+2c_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}+c_{22}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+c_{33}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (22-28)$$

式中 $u(r,\theta,z,t)$ 为圆柱域内物理场分布函数。$c_{jk}(j,k=1,2,3)$ 为物理常数。c_{jk} 中下标 1 代表径向 r（$0\leqslant r\leqslant R$）方向，下标 2 为切向 θ（$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$）方向，下标 3 代表 z（$0\leqslant z\leqslant L$）方向。

设

$$u(r,\theta,z,t)=v(r,\theta,z)e^{i\omega t} \qquad (22-29)$$

将式（22－29）代入到方程（22－28），可得

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial v}{\partial r})+2K_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial\theta}+K_{22}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}+K_{33}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{\omega^2}{c_{11}}v=0 \qquad (22-30)$$

式中 $K_{11}=1,K_{12}=\frac{c_{12}}{c_{11}},K_{22}=\frac{c_{22}}{c_{11}},K_{33}=\frac{c_{33}}{c_{11}}$。

设

$$v(r,\theta,z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\theta}C_n(r,z) \qquad (22-31)$$

式中 n 为整数。

首先研究 $n=0$ 情况，将式（22－31）代入方程（22－30），可得

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial C_0}{\partial r})+K_{33}\frac{\partial^2 C_0}{\partial z^2}+\frac{\omega^2}{c_{11}}C_0=0 \qquad (22-32)$$

设

$$C_0(r,z) = e^{i\lambda z} f_0(r) \tag{22-33}$$

将式（22-33）代入到方程（22-32）可得

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{df_0}{dr}) - f_0(K_{33}\lambda^2 - \frac{\omega^2}{c_{11}}) = 0 \tag{22-34a}$$

记

$$s^2 = -(K_{33}\lambda^2 - \frac{\omega^2}{c_{11}}) \tag{22-34b}$$

这样，方程（22-34a）可改写为

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{df_0}{dr}) + f_0 s^2 = 0 \tag{22-34c}$$

方程（22-34c）为 0 阶贝塞尔方程，写为

$$r^2\frac{d^2 f_0}{dr^2} + r\frac{df_0}{dr} + f_0 s^2 r^2 = 0 \tag{22-35}$$

对于圆柱域上、下端面和侧面为 0 值的边界条件，可写为

$$r = R, u(R,\theta,z,t) = 0 \tag{22-36a}$$

$$z = 0, u(r,\theta,0,t) = 0 \tag{22-36b}$$

$$z = L, u(r,\theta,L,t) = 0 \tag{22-36c}$$

$$r = 0, u(0,\theta,z,t)\text{ 为有限值} \tag{22-36d}$$

设初始条件为

$$\begin{cases} u(r,\theta,z,0) = \varphi(r,\theta,z) \\ \dfrac{\partial u(r,\theta,z,0)}{\partial t} = g(r,\theta,z) \end{cases} \tag{22-37}$$

为简化起见，设 $\varphi(r,\theta,z)$、$g(r,\theta,z)$ 为三个坐标 (r,θ,z) 耦合函数，即不能分解为三个坐标耦合函数和其他两个 (r,z) 或 (r,z) 坐标耦合函数之和。对于包含其他两个 (r,z) 或 (r,z) 坐标耦合函数的一般情况下的 $\varphi(r,\theta,z)$、$g(r,\theta,z)$，根据叠加原理，分别求解对应两个 (r,z) 或 (r,z) 坐标耦合函数解的问题解，然后叠加到本节提出解析解即可。

根据式（22-33）和（22-34a），可得

$$C_0(r,z) = A_1 e^{i\lambda z} f_0(r) + A_2 e^{-i\lambda z} f_0(r) \tag{22-38}$$

将式（22-38）代入到式（22-36b）和（22-36c），可得以下特征行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{i\lambda L} & e^{-i\lambda L} \end{vmatrix} = 0 \tag{22-39}$$

$$\begin{cases} \sin\lambda L = 0 \\ \lambda = \dfrac{k\pi}{L}, k = 0,1,2,\cdots \end{cases} \tag{22-40}$$

考虑到 $v(0,\theta,z)$ 有限性，方程（22-35）解可简化为

$$f_0 = c_0 J_0(rs) \tag{22-41}$$

式 c_0 为待定实数常数；$J_0(x)$ 为第一类 0 阶贝塞尔函数，其零点为 $\mu_m^0 (m = 1,2,\cdots)$。再结

合式（22－34b），可得

$$\begin{cases} Rs = \mu_m^0 \\ \omega^2 = c_{11}\left[K_{33}\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\mu_m^0}{R}\right)^2\right] \end{cases} \tag{22-42}$$

式中 $\mu_m^0 > 0$。

由此，可得方程（22－28）关于 $n=0$ 的解 $u_0(r,z,t)$

$$u_0(r,z,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\{A_{m,k}\cos\sqrt{c_{11}\left[K_{33}\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\mu_m^0}{R}\right)^2\right]}t + B_{m,k}\sin\sqrt{c_{11}\left[K_{33}\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\mu_m^0}{R}\right)^2\right]}t\}J_0\left(\frac{r\mu_m^0}{R}\right)\sin\frac{k\pi z}{L} \tag{22-43}$$

当 $n \neq 0$，设

$$Z_n(r,z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_k z} f_{nk}(r) \tag{22-44}$$

式中 $\lambda_k = k\lambda$，k 为整数。

代入到方程（22－30），可得

$$r^2\frac{d^2 f_{nk}}{dr^2} + r\frac{d f_{nk}}{dr}(1 + 2K_{12}in) + f_{nk}\{[-K_{33}(\lambda_k)^2 + \frac{\omega^2}{c_{11}}]r^2 - K_{22}n^2\} = 0 \tag{22-45a}$$

将式（22－34b）代入到方程（22－45a），可得

$$r^2\frac{d^2 f_{nk}}{dr^2} + r\frac{d f_{nk}}{dr}(1 + 2K_{12}in) + f_{nk}(s^2r^2 - K_{22}n^2) = 0 \tag{22-45b}$$

记

$$x = rs \tag{22-45c}$$

式中 $s^2 = -(K_{33}\lambda^2 - \frac{\omega^2}{c_{11}})$。

据此，方程（22－45b）可写为

$$x^2\frac{d^2 f_{nk}}{dx^2} + x\frac{d f_{nk}}{dx}(1 + 2K_{12}in) + f_{nk}(x^2 - K_{22}n^2) = 0 \tag{22-45d}$$

方程（22－45d）为 Z_{ip} 方程，其解可写为

$$f_{nk} = A_{1,n,0}Z_{ip_{1,n}}(x) + A_{2,n,0}Z_{ip_{2,n}}(x) \tag{22-46}$$

式中 $A_{l,n,0}$ 为复数常数，$l=1$，2，k 为整数；$p_{l,n}$ 为特征根，$p_{l,n} = a_{l,n} + ib_{l,n}$

$$\begin{cases} a_{1,n} = -nK_{12} \\ b_{1,n} = n\sqrt{K_{22} - K_{12}^2} \\ a_{2,n} = -nK_{12} \\ b_{2,n} = -n\sqrt{K_{22} - K_{12}^2} \end{cases} \tag{22-47}$$

根据式（22－31）（22－33）（22－44）（22－46），可得方程（22－30）解为

$$v_{l,n,k}(r,\theta,z) = A_{l,n,k,0}e^{in\theta}e^{i\lambda_k z}Z_{ip_{l,n}}(x) \tag{22-48}$$

式中 $n \neq 0$，$l=2$。

将式（22 - 48）代入边界条件和初始条件，可以确定特征值 λ_k 和 ω。

考虑到 $v(0,\theta,z)$ 有限性，根据式（22 - 47）可得

$$A_{1,n,k,0} = 0(n > 0) \tag{22-49}$$

将式（22 - 48）代入到式（22 - 36a），可得

$$Z_{ip_{l,n}}(x) = 0 \tag{22-50}$$

求解 $Z_{ip_{l,n}}(x) = 0$，可得 $Z_{ip_{l,n}}(x)$ 零点 $\mu_{l,n,j}^0$

$$\left(\frac{\mu_{l,n,j}^0}{R}\right)^2 = -\left(K_{33}\lambda^2 - \frac{\omega^2}{c_{11}}\right) \tag{22-51}$$

由此可得

$$v_{l,n,k,j}(r,\theta,z) = A_{l,n,k,j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}e^{\mathrm{i}\lambda_k z}Z_{ip_{l,n}}\left(\frac{r}{R}\mu_{l,n,j}^0\right) \tag{22-52}$$

将式（22 - 52）代入到式（22 - 36b）（22 - 36c），根据式（22 - 34b），可知一个 $\mu_{l,n,j}^0$ 与一对 $\pm\lambda_k$ 关联。由此，可得

$v_{l,n,k,j} + v_{l,n,-k,j} = A_{l,n,k,j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}e^{\mathrm{i}\lambda_k z}Z_{ip_{l,n}}\left(\frac{r}{R}\mu_{l,n,j}^0\right) + A_{l,n,-k,j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}e^{-\mathrm{i}\lambda_k z}Z_{ip_{l,n}}\left(\frac{r}{R}\mu_{l,n,j}^0\right)$，代入到 z 方向边界条件：$v(r,\theta,0) = 0, v(r,\theta,L) = 0$，可得特征行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_k L} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda_k L} \end{vmatrix} = 0 \tag{22-53}$$

$$\sin\lambda_k L = 0 \tag{22-54}$$

由此可得

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{L}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{22-55}$$

根据式（22 - 34b），可得

$$\left(\frac{\mu_{l,n,j}^0}{R}\right)^2 = -\left[K_{33}\,(\lambda_k)^2 - \frac{\omega^2}{c_{11}}\right] \tag{22-56}$$

$$\omega^2 = \left[\left(\frac{\mu_{l,n,j}^0}{R}\right)^2 + K_{33}\,(\lambda_k)^2\right]c_{11} \tag{22-57}$$

根据式（22 - 29）（22 - 31）（22 - 52）（22 - 55）（22 - 57），可得

$$u = \sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{L}z}Z_{ip_{l,n}}\left(\frac{r}{R}\mu_{l,n,j}^0\right)\left[A_{l,n,j,k,0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sqrt{\left[\left(\frac{\mu_{l,n,j}^0}{R}\right)^2 + K_{33}(\lambda_k)^2\right]c_{11}}} + B_{l,n,j,k,0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\sqrt{\left[\left(\frac{\mu_{l,n,j}^0}{R}\right)^2 + K_{33}(\lambda_k)^2\right]c_{11}}}\right] + u_0(r,z,t) + u(r,\theta,t) \tag{22-58}$$

式 $u(r,\theta,t)$ 为对应 $k=0, n\neq 0$ 的解，由式（22 - 27b）给出。$u_0(r,z,t)$ 由式（22 - 43）给出。

将 $t=0$ 代入到式（22 - 58），再代入初始条件（22 - 37）可得

$$\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{L}z}Z_{ip_{l,n}}\left(\frac{r}{R}\mu_{l,n,j}^0\right)(A_{l,n,j,k,0} + B_{l,n,j,k,0}) + u_0(r,z,0) + u(r,\theta,0) = \varphi(r,\theta,z)$$

$$\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{\infty} \mathrm{i}\sqrt{[(\frac{\overset{0}{\mu}_{l,n,j}}{R})^2+K_{33}(\lambda_k)^2]c_{11}}(A_{l,n,j,k,0}-B_{l,n,j,k,0})\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{L}z}Z_{\mathrm{i}p_{l,n}}(\frac{r}{R}\overset{0}{\mu}_{l,n,j})+$$

$$\frac{\partial u_0(r,z,0)}{\partial t}+\frac{\partial u(r,\theta,0)}{\partial t}=g(r,\theta,z) \tag{22-59}$$

(22 - 60)

根据第 8 章中复数柱体函数展开定理，可将 $\varphi(r,\theta,z)$ 和 $g(r,\theta,z)$ 展开为

$$\begin{cases} f(r,\theta,z)=\sum\limits_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}C_{l,n,k,j,0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{L}z}Z_{\mathrm{i}p_{l,n}}(\frac{r}{R}\overset{0}{\mu}_{l,n,j}) \\ g(r,\theta,z)=\sum\limits_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}D_{l,n,k,j,0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{L}z}Z_{\mathrm{i}p_{l,n}}(\frac{r}{R}\overset{0}{\mu}_{l,n,j}) \end{cases} \tag{22-61}$$

式中 $C_{l,n,k,j,0}$ ，$D_{l,n,k,j,0}$ 为复数常数，可根据式（8—46）确定。记为 $C_{l,n,k,j,0}=C_{l,n,k,j,0,r}+\mathrm{i}C_{l,n,k,j,0,i}$ ，$D_{l,n,k,j,0}=D_{l,n,k,j,0,r}+\mathrm{i}D_{l,n,k,j,0,i}$ 。

分别比较式（22 - 59）（22 - 60）和式（22 - 61）中 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{L}z}Z_{\mathrm{i}p_{l,n}}(\frac{r}{R}\overset{0}{\mu}_{l,n,j})$ 系数可得

$$\begin{cases} A_{l,n,j,k,0}+B_{l,n,j,k,0}=C_{l,n,k,j,0} \\ \mathrm{i}\sqrt{[(\frac{\overset{0}{\mu}_{l,n,j}}{R})^2+K_{33}(\lambda_k)^2]c_{11}}(A_{l,n,j,k,0}-B_{l,n,j,k,0})=D_{l,n,k,j,0} \end{cases} \tag{22-62}$$

求解式（22 - 62），可得系数 $A_{l,n,j,k,0}$ ，$B_{l,n,j,k,0}$ 。由于 $\varphi(r,\theta,z)$，$g(r,\theta,z)$ 为三个坐标耦合函数，$u_0(r,z,t)$，$u(r,\theta,t)$ 中待定常数为 0。

考虑到 $A_{l,n,j,k,0}$ ，$B_{l,n,j,k,0}$ ，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ ，$r^{\mathrm{i}a_{l,n}}$ 为复数形式，可得

$$\begin{cases} A_{l,n,j,k,0}=A_{l,n,j,k,0,r}+\mathrm{i}A_{l,n,j,k,0,i} \\ B_{l,n,j,k,0}=B_{l,n,j,k,0,r}+\mathrm{i}B_{l,n,j,k,0,i} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta \\ r^{\mathrm{i}a_{l,n}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}a_{l,n}\ln(r)}=\cos(a_{l,n}\ln r)+\mathrm{i}\sin(a_{l,n}\ln r) \end{cases}$$

根据式（5—75）（22 - 29）（22 - 44）（22 - 58）和以上公式，可得

$$u(r,\theta,z,t)=u_0(r,z,t)+u(r,\theta,t)+$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\Big\{A_{l,n,j,k,0,r}J_{-b_{l,n}}(\frac{r\overset{0}{\mu}_{l,n,j}}{R})\cos[n\theta+a_{l,n}\ln(\frac{r\overset{0}{\mu}_{l,n,j}}{R})+\frac{k\pi}{L}z+\sqrt{[(\frac{\overset{0}{\mu}_{l,n,j}}{R})^2+K_{33}(\lambda_k)^2]c_{11}}\,t]-$$

$$A_{l,n,j,k,0,i}J_{-b_{l,n}}(\frac{r\overset{0}{\mu}_{l,n,j}}{R})\sin[n\theta+a_{l,n}\ln(\frac{r\overset{0}{\mu}_{l,n,j}}{R})+\frac{k\pi}{L}z+\sqrt{[(\frac{\overset{0}{\mu}_{l,n,j}}{R})^2+K_{33}(\lambda_k)^2]c_{11}}\,t]+$$

$$B_{l,n,j,k,0,r}J_{-b_{l,n}}(\frac{r\overset{0}{\mu}_{l,n,j}}{R})\cos[n\theta+a_{l,n}\ln(\frac{r\overset{0}{\mu}_{l,n,j}}{R})+\frac{k\pi}{L}z-\sqrt{[(\frac{\overset{0}{\mu}_{l,n,j}}{R})^2+K_{33}(\lambda_k)^2]c_{11}}\,t]-$$

$$B_{l,n,j,k,0,i}J_{-b_{l,n}}(\frac{r\overset{0}{\mu}_{l,n,j}}{R})\sin[n\theta+a_{l,n}\ln(\frac{r\overset{0}{\mu}_{l,n,j}}{R})+\frac{k\pi}{L}z-\sqrt{[(\frac{\overset{0}{\mu}_{l,n,j}}{R})^2+K_{33}(\lambda_k)^2]c_{11}}\,t]\Big\}$$

式中 $\overset{0}{\mu}_{l,n,j}$ 为 $Z_{\mathrm{i}p_{l,n}}(x)$ 的零点。

根据数学物理实数化原理，以上 $u(r,\theta,z,t)$ 可简化为

$$
\begin{aligned}
&u(r,\theta,z,t) = u_0(r,z,t) + u(r,\theta,t) + \\
&2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\Big\{A_{l,n,j,k,0,r}J_{-b_{l,n}}(\frac{r\mu^0_{l,n,j}}{R})\cos[n\theta + a_{l,n}\ln(\frac{r\mu^0_{l,n,j}}{R}) + \frac{k\pi}{L}z + \sqrt{[(\frac{\mu^0_{l,n,j}}{R})^2 + K_{33}(\lambda_k)^2]c_{11}}\,t] - \\
&A_{l,n,j,k,0,i}J_{-b_{l,n}}(\frac{r\mu^0_{l,n,j}}{R})\sin[n\theta + a_{l,n}\ln(\frac{r\mu^0_{l,n,j}}{R}) + \frac{k\pi}{L}z + \sqrt{[(\frac{\mu^0_{l,n,j}}{R})^2 + K_{33}(\lambda_k)^2]c_{11}}\,t] + \\
&B_{l,n,j,k,0,r}J_{-b_{l,n}}(\frac{r\mu^0_{l,n,j}}{R})\cos[n\theta + a_{l,n}\ln(\frac{r\mu^0_{l,n,j}}{R}) + \frac{k\pi}{L}z - \sqrt{[(\frac{\mu^0_{l,n,j}}{R})^2 + K_{33}(\lambda_k)^2]c_{11}}\,t] - \\
&B_{l,n,j,k,0,i}J_{-b_{l,n}}(\frac{r\mu^0_{l,n,j}}{R})\sin[n\theta + a_{l,n}\ln(\frac{r\mu^0_{l,n,j}}{R}) + \frac{k\pi}{L}z - \sqrt{[(\frac{\mu^0_{l,n,j}}{R})^2 + K_{33}(\lambda_k)^2]c_{11}}\,t]\Big\}
\end{aligned}
\tag{22-63}
$$

式（22－58）为柱坐标下三维各向异性波动方程（22－28）复数形式解，式（22－63）为三维各向异性波动方程（22－28）的实数形式解。

22.3　球坐标下球膜二维各向异性波动方程

球坐标 (r,φ,θ) 下的球膜二维各向异性波动方程为

$$
c_{22}\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + c_{33}\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}) + 2c_{23}\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\partial\theta} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{22-64}
$$

式中 $u(\theta,\varphi,t)$ 为球膜内物理场分布函数。c_{22}，c_{23}，c_{33} 为物理常数。方向 2 为球坐标方向角 φ（$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$）方向（地理纬线方向），方向 3 为球坐标 θ（$0<\theta<\pi$）高低角方向（地理经线方向）。r 为径向坐标，R 为球半径，球膜面上 $r=R$。

引入如下变换

$$
x = \cos\theta \tag{22-65}
$$

可将方程（22－64）变换为以下偏微分方程

$$
\frac{c_{22}}{(1-x^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + c_{33}[-2x\frac{\partial u}{\partial x} + (1-x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}] - 2c_{23}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\partial x} = R^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{22-66}
$$

边界条件设为

$$
\begin{cases}
x = x_1, u(x_1,\varphi,t) = 0 \\
x = x_2, u(x_2,\varphi,t) = 0
\end{cases} \tag{22-67}
$$

初始条件设为

$$
u(r,\theta,0) = f(r,\theta),\ \frac{\partial u(r,\theta,0)}{\partial t} = g(r,\theta) \tag{22-68}
$$

设方程（22－66）有以下形式解

$$
u(x,\varphi,t) = v(x,\varphi)\Gamma(\mathrm{t}) \tag{22-69}
$$

将式（22－69）代入到方程（22－66），再分离变量后可得

$$\frac{\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2}}{\sigma\Gamma} = \frac{\{\frac{c_{22}}{(1-x^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + c_{33}[-2x\frac{\partial u}{\partial x} + (1-x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}] - 2c_{23}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial x}\}\frac{1}{c_{33}}}{u} = -\lambda$$

(22－70)

式中 λ 为分离变量常数，$\lambda > 0$，$\lambda = l(l+1)$；$\sigma = \frac{c_{33}}{R^2}$。

本节引入以下无量纲变换

$$K_{33} = 1, K_{32} = K_{23} = \frac{c_{23}}{c_{33}}, K_{22} = \frac{c_{22}}{c_{33}} \tag{22-71}$$

将式（22－71）代入到式（22－70）可得

$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2} + \sigma l(l+1)\Gamma = 0 \tag{22-72}$$

$$\frac{K_{22}}{(1-x^2)}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + K_{33}[-2x\frac{\partial v}{\partial x} + (1-x^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}] - 2K_{23}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial x} + l(1+l)v = 0$$

(22－73)

根据方程（22－72），可得

$$\Gamma(t) = Ce^{i\sqrt{\lambda\sigma}t} + De^{-i\sqrt{\lambda\sigma}t} \tag{22-74}$$

式中 C，D 为复数常数。

方程（22－74）类似于文献［44］中的方程（17—8），方程（22－73）解可以沿用文献［44］中方程（17—8）的解

$$u(x,\varphi,t) = \sum_{m=-\infty, m\neq 0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} Z_{m,n}(x,\lambda_{m,n}^0)e^{im\varphi}(A_{m,0,n}e^{i\sqrt{\lambda_{m,n}^0\sigma t}} + B_{m,0,n}e^{-i\sqrt{\lambda_{m,n}^0\sigma t}}) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{0,n}\cos\sqrt{l_n^0(1+l_n^0)\sigma t} + b_{0,n}\sin\sqrt{l_n^0(1+l_n^0)\sigma t})Z_n(x,l_n^0)$$

(22－75)

式中 $\lambda_{m,n}^0$ 可由文献［44］中式（17—39a）

$$\{[Z_{s_1}(x_1,\lambda)]^2 + [Z_{s_2}(x_1,\lambda)]^2\}\{[Z_{s_3}(x_2,\lambda)]^2 + [Z_{s_1}(x_2,\lambda)]^2\} -$$

$$\{[Z_{s_1}(x_2,\lambda)]^2 + [Z_{s_2}(x_2,\lambda)]^2\}\{[Z_{s_3}(x_1,\lambda)]^2 + [Z_{s_1}(x_1,\lambda)]^2\} = 0$$

确定，l_n^0 可由文献［44］中式（17—39b）

$$L_1(x_1,l^0)L_2(x_2,l^0) - L_1(x_2,l^0)L_2(x_1,l^0) = 0$$

确定。根据文献［44］第 17 章定义，

$$\begin{cases} Z_{m,n}(x,\lambda) = \Omega_{m,n}^{(1)}(x,\lambda) - \frac{\Omega_{m,n}^{(1)}(x_1,\lambda)}{\Omega_{m,n}^{(2)}(x_1,\lambda)}\Omega_{m,n}^{(2)}(x,\lambda) \\ Z_n(x,l^0) = L_1(x,l^0) - \frac{L_1(x_1,l_n^0)}{L_2(x_1,l_n^0)}L_2(x,l^0) \end{cases} \tag{22-76}$$

将 $t=0$ 代入到式（22－75），再代入到初始条件（22－68），可得

$$\sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}Z_{m,n}(x,\lambda_{m,n}^{0})e^{im\varphi}(A_{m,0,n}+B_{m,0,n})+\sum_{n=1}^{\infty}a_{0,n}Z_{n}(x,l_{n}^{0})=f(x,\varphi)$$

(22-77)

$$\sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}Z_{m,n}(x,\lambda_{m,n}^{0})e^{im\varphi}i\sqrt{\lambda_{m,n}^{0}\sigma}(A_{m,0,n}-B_{m,0,n})+\sum_{n=1}^{\infty}b_{0,n}\sqrt{l_{n}^{0}(1+l_{n}^{0})\sigma}Z_{n}(x,l_{n}^{0})=g(x,\varphi)$$

(22-78)

根据文献 [44] 第 17 章中复数球带面函数展开定理，可以将 $f(x,\varphi)$ 和 $g(x,\varphi)$ 展开为

$$f(x,\varphi)=\sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}C_{m,0,n}Z_{m,n}(x,\lambda_{m,n}^{0})e^{im\varphi}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{0,n}Z_{n}(x,l_{n}^{0}) \tag{22-79}$$

$$g(x,\varphi)=\sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}D_{m,0,n}Z_{m,n}(x,\lambda_{m,n}^{0})e^{im\varphi}+\sum_{n=1}^{\infty}d_{0,n}Z_{n}(x,l_{n}^{0}) \tag{22-80}$$

式中 $C_{m,0,n}$，$D_{m,0,n}$ 为复数常数，记为 $C_{m,0,n}=C_{m,0,n,r}+iC_{m,0,n,i}$，$D_{m,0,n}=D_{m,0,n,r}+iD_{m,0,n,i}$。$C_{m,0,n}$，$D_{m,0,n}$，$c_{0,n}$，$d_{0,n}$ 可由文献 [44] 中式（17—47b）确定。

分别比较式（22-77）(22-78）和式（22-79（22-80）中 $J_0(\frac{r\mu_j^0}{R})$，$Z_{ip_{l,n}}(\frac{r\mu_{l,n,j}^0}{R})e^{i n\theta}$ 前系数，可得

$$\begin{cases}A_{m,0,n}+B_{m,0,n}=C_{m,0,n}\\ i\sqrt{\lambda_{m,n}^{0}\sigma}(A_{m,0,n}-B_{m,0,n})=D_{m,0,n}\\ a_{0,n}=c_{0,n}\\ b_{0,n}\sqrt{l_{n}^{0}(1+l_{n}^{0})\sigma}=d_{0,n}\end{cases} \tag{22-81}$$

求解式（22-81），可得待定常数 $A_{m,0,n}$，$B_{m,0,n}$，$a_{0,n}$ 和 $b_{0,n}$。根据文献 [44] 中式（17—27）和（17—40），可得

$$Z_{m,n}(x,\lambda)=Z_{m,n,r}(x,\lambda)+iZ_{m,n,i}(x,\lambda) \tag{22-82}$$

式中

$$\begin{cases}Z_{m,n,r}(x,\lambda)=Z_{s_1}(x,\lambda)+Z_{s_3}(x,\lambda)Z_{s_5}(x_1,\lambda)+Z_{s_4}(x,\lambda)Z_{s_6}(x_1,\lambda)\\ Z_{m,n,i}(x,\lambda)=Z_{s_2}(x,\lambda)-Z_{s_3}(x,\lambda)Z_{s_6}(x_1,\lambda)+Z_{s_4}(x,\lambda)Z_{s_5}(x_1,\lambda)\\ Z_{s_5}(x_1,\lambda)=\dfrac{-Z_{s_1}(x_1,\lambda)Z_{s_3}(x_1,\lambda)-Z_{s_2}(x_1,\lambda)Z_{s_4}(x_1,\lambda)}{[Z_{s_3}(x_1,\lambda)]^2+[Z_{s_4}(x_1,\lambda)]^2}\\ Z_{s_6}(x_1,\lambda)=\dfrac{Z_{s_2}(x_1,\lambda)Z_{s_3}(x_1,\lambda)-Z_{s_1}(x_1,\lambda)Z_{s_4}(x_1,\lambda)}{[Z_{s_3}(x_1,\lambda)]^2+[Z_{s_4}(x_1,\lambda)]^2}\end{cases} \tag{22-83}$$

根据式（22-82）(22-83)，式（22-75）可改写为

$$u(x,\varphi,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_{0,n}\cos\sqrt{l_n^0(1+l_n^0)\sigma t} + b_{0,n}\sin\sqrt{l_n^0(1+l_n^0)\sigma t})Z_n(x,l_n^0) +$$

$$\sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\{A_{m,0,n,r}[Z_{m,n,r}(x,\lambda_{m,n}^0)\cos(m\varphi+\sqrt{\lambda_{m,n}^0\sigma t}) - Z_{m,n,i}(x,\lambda_{m,n}^0)\sin(m\varphi+\sqrt{\lambda_{m,n}^0\sigma t})] -$$

$$A_{m,0,n,i}[Z_{m,n,i}(x,\lambda_{m,n}^0)\cos(m\varphi+\sqrt{\lambda_{m,n}^0\sigma t}) + Z_{m,n,r}(x,\lambda_{m,n}^0)\sin(m\varphi+\sqrt{\lambda_{m,n}^0\sigma t})]\}+$$

$$\sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\{B_{m,0,n,r}[Z_{m,n,r}(x,\lambda_{m,n}^0)\cos(m\varphi-\sqrt{\lambda_{m,n}^0\sigma t}) - Z_{m,n,i}(x,\lambda_{m,n}^0)\sin(m\varphi-\sqrt{\lambda_{m,n}^0\sigma t})] -$$

$$B_{m,0,n,i}[Z_{m,n,i}(x,\lambda_{m,n}^0)\cos(m\varphi-\sqrt{\lambda_{m,n}^0\sigma t}) + Z_{m,n,r}(x,\lambda_{m,n}^0)\sin(m\varphi-\sqrt{\lambda_{m,n}^0\sigma t})]\}$$

(22 - 84)

根据数学物理实数化原理，式（22 - 84）可简化为

$$u(x,\varphi,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_{0,n}\cos\sqrt{l_n^0(1+l_n^0)\sigma t} + b_{0,n}\sin\sqrt{l_n^0(1+l_n^0)\sigma t})Z_n(x,l_n^0) +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\{A_{m,0,n,r}[Z_{m,n,r}(x,\lambda_{m,n}^0)\cos(m\varphi+\sqrt{\lambda_{m,n}^0\sigma t}) - Z_{m,n,i}(x,\lambda_{m,n}^0)\sin(m\varphi+\sqrt{\lambda_{m,n}^0\sigma t})] -$$

$$A_{m,0,n,i}[Z_{m,n,i}(x,\lambda_{m,n}^0)\cos(m\varphi+\sqrt{\lambda_{m,n}^0\sigma t}) + Z_{m,n,r}(x,\lambda_{m,n}^0)\sin(m\varphi+\sqrt{\lambda_{m,n}^0\sigma t})]\}+$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\{B_{m,0,n,r}[Z_{m,n,r}(x,\lambda_{m,n}^0)\cos(m\varphi-\sqrt{\lambda_{m,n}^0\sigma t}) - Z_{m,n,i}(x,\lambda_{m,n}^0)\sin(m\varphi-\sqrt{\lambda_{m,n}^0\sigma t})] -$$

$$B_{m,0,n,i}[Z_{m,n,i}(x,\lambda_{m,n}^0)\cos(m\varphi-\sqrt{\lambda_{m,n}^0\sigma t}) + Z_{m,n,r}(x,\lambda_{m,n}^0)\sin(m\varphi-\sqrt{\lambda_{m,n}^0\sigma t})]\}$$

(22 - 85)

式（22 - 75）是二维球膜各向异性波动方程（22 - 64）的复数形式解，式（22 - 85）是方程（22 - 64）实数形式解。

22.4 球坐标系下三维各向异性波动方程

球坐标 (r,φ,θ) 下一种 A 类型三维各向异性波动方程可写为

$$c_{11}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r}) + c_{22}\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + c_{33}\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}) + 2c_{23}\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\partial\theta} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

(22 - 86)

式中 $0\leqslant r\leqslant r_2$，$\theta_1<\theta<\theta_2$，$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$。$u(r,\theta,\varphi,t)$ 代表球体内物理场分布函数。c_{22}，c_{23}，c_{33} 中下标 2 为球坐标方向角 φ（$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$）方向（地理纬线方向），方向 3 为球坐标 θ（$0<\theta<\pi$）高低角方向（地理经线方向）。c_{11} 中下标 1 代表径向坐标 r 方向。

引入以下变量代换

$$x = \cos\theta \tag{22 - 87}$$

代入方程（22 - 86）可得下式

$$\frac{1}{r^2}\{c_{11}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{c_{22}}{(1-x^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + c_{33}[-2x\frac{\partial u}{\partial x} + (1-x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}] - 2c_{23}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\partial x}\} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

(22 - 88)

边界条件设为

$$\begin{cases} x = x_1, u(r, x_1, \varphi, t) = 0 \\ x = x_2, u(r, x_2, \varphi, t) = 0 \end{cases} \tag{22-89}$$

$$r = r_2, u(r_2, x, \varphi, t) = 0 \tag{22-90}$$

初始条件设为

$$u(r, x, \varphi, 0) = h(r, x, \varphi)\ ,\ \frac{\partial u(r, x, \varphi, 0)}{\partial t} = g(r, x, \varphi) \tag{22-91}$$

设方程（22 - 88）解为

$$T(r, x, \varphi, t) = f(r, x, \varphi)\Gamma(\mathrm{t}) \tag{22-92}$$

将式（22 - 92）代入到方程（22 - 88），再分离变量可得

$$\frac{\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2}}{c_{11}\Gamma} = \frac{[c_{11}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{c_{22}}{(1-x^2)}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + c_{33}(-2x\frac{\partial f}{\partial x} + (1-x^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}) - 2c_{23}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \partial x}]\frac{1}{c_{11}}}{r^2 f}$$

$$= -\mu \tag{22-93}$$

其中 $\mu > 0$，μ 为分离常数。

本节引入以下无量纲量

$$K_{11} = \frac{c_{11}}{c_{11}}, K_{33} = \frac{c_{33}}{c_{11}}, K_{23} = \frac{c_{23}}{c_{11}}, K_{22} = \frac{c_{22}}{c_{11}} \tag{22-94}$$

将式（22 - 94）代入到式（22 - 93），可得

$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2} + \mu c_{11}\Gamma = 0 \tag{22-95}$$

$$K_{11}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{K_{22}}{1-x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + K_{33}[-2x\frac{\partial f}{\partial x} + (1-x^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}] - 2K_{23}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \partial x} + r^2\mu f = 0 \tag{22-96}$$

根据方程（22 - 95），可得

$$\Gamma(t) = C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\mu c_{11}}t} + D\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\mu c_{11}}t} \tag{22-97}$$

其中 C，D 为复数常数。

设

$$f(r, x, \varphi) = v(x, \varphi)R(r) \tag{22-98}$$

将式（22 - 98）代入方程（22 - 96），可得

$$\frac{\frac{K_{22}}{(1-x^2)}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + K_{33}[-2x\frac{\partial v}{\partial x} + (1-x^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}] - 2K_{23}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial x}}{v} = -\lambda \tag{22-99a}$$

$$\frac{(r^2\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}r^2} + 2r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r})}{R} + r^2\mu = \lambda \tag{22-99b}$$

其中 λ 为分离常数，$\lambda = l(l+1)$。

由此，可将方程（22-99a）写为

$$\frac{K_{22}}{(1-x^2)}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}+K_{33}\left[-2x\frac{\partial v}{\partial x}+(1-x^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]-2K_{23}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial x}+\lambda v=0 \tag{22-100a}$$

方程（22-99b）改写为

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}r^2}+2r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}+(r^2\mu-\lambda)R=0 \tag{22-100b}$$

方程（22-100b）为参数形式的球贝塞尔方程，其解为

$$R(r)=A\,\mathrm{j}_l(\sqrt{\mu}r)+B\,\mathrm{y}_l(\sqrt{\mu}r) \tag{22-101}$$

式（22-89）可写为

$$\begin{cases} x=x_1,v(x_1,\varphi)=0 \\ x=x_2,v(x_2,\varphi)=0 \end{cases} \tag{22-102a}$$

式（22-90）可写为

$$r=r_2,f(r_2,x,\varphi)=0 \tag{22-102b}$$

方程（22-96）与文献［44］中方程（22-11）类似，可引用文献［44］中方程（22-11）解

$$\begin{aligned} f_{m,n}(r,x,\varphi)=\\ &\sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty}\left[(A_{m,0,n,r}+\mathrm{i}A_{m,0,n,i})\overset{\wedge}{\Omega}{}^{(1)}_{m,n}(x,\lambda^0_{m,n})\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}+(A_{m,1,n,r}+\mathrm{i}A_{m,1,n,i})\overset{\wedge}{\Omega}{}^{(2)}_{m,n}(x,\lambda^0_{m,n})\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\right]j_{l^0_{m,n}}(r\sqrt{\mu})+\\ &\sum_{m=-\infty,m\neq}^{\infty}\left[(B_{m,0,n,r}+\mathrm{i}B_{m,0,n,i})\overset{\wedge}{\Omega}{}^{(1)}_{m,n}(x,\lambda^0_{m,n})\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}+(B_{m,1,n,r}+\mathrm{i}B_{m,1,n,i})\overset{\wedge}{\Omega}{}^{(2)}_{m,n}(x,\lambda^0_{m,n})\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\right]y_{l^0_{m,n}}(r\sqrt{\mu})+\\ &\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{0,n}L_1(x,l^0_n)+a_{1,n}L_2(x,l^0_n)\right]j_{k^0_n}(r\sqrt{\mu})+\sum_{n=1}^{\infty}\left[b_{0,n}L_1(x,l^0_n)+b_{1,n}L_2(x,l^0_n)\right]y_{k^0_n}(r\sqrt{\mu}) \end{aligned} \tag{22-103}$$

考虑到实心球体中心处物理场有限性，式（22-103）中 $B_{m,0,n}(B_{m,0,n}=B_{m,0,n,r}+\mathrm{i}B_{m,0,n,i})$ 和 $B_{m,1,n}(B_{m,1,n}=B_{m,1,n,r}+\mathrm{i}B_{m,1,n,i})$ 为 0，$b_{0,n}$ 和 $b_{1,n}$ 为 0。由此，式（22-103）可简化为

$$\begin{aligned} f_{m,n}(r,x,\varphi)=\\ &\sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty}\left[(A_{m,0,n,r}+\mathrm{i}A_{m,0,n,i})\overset{\wedge}{\Omega}{}^{(1)}_{m,n}(x,\lambda^0_{m,n})\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}+(A_{m,1,n,r}+\mathrm{i}A_{m,1,n,i})\overset{\wedge}{\Omega}{}^{(2)}_{m,n}(x,\lambda^0_{m,n})\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\right]j_{l^0_{m,n}}(r\sqrt{\mu})+\\ &\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{0,n}L_1(x,l^0_n)+a_{1,n}L_2(x,l^0_n)\right]j_{k^0_n}(r\sqrt{\mu}) \end{aligned} \tag{22-104}$$

综上所述，根据式（22-92）（22-97）（22-104），可得方程（22-86）的解为

$$u(r,x,\varphi,t)=$$
$$\sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[A_{m,0,n,k}e^{i\frac{s_{m,n,k}}{r_2}\sqrt{c_{11}}t}+E_{m,0,n,k}e^{-i\frac{s_{m,n,k}}{r_2}\sqrt{c_{11}}t}]\hat{Z}_{m,n}(x,\lambda_{m,n}^0)e^{im\varphi}j_{l_{m,n}^0}(s_{m,n,k}\frac{r}{r_2})+$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[a_{0,n,k}\cos(\frac{s_{n,k}}{r_2}\sqrt{c_{11}}t)+b_{0,n,k}\sin(\frac{s_{n,k}}{r_2}\sqrt{c_{11}}t)]j_{k_n^0}(s_{n,k}\frac{r}{r_2})\hat{Z}_n(x,l_n^0)$$
$$(22-105)$$

式中

$$\hat{Z}_{m,n}(x,\lambda)=\hat{\Omega}_{m,n}^{(1)}(x,\lambda)-\frac{\hat{\Omega}_{m,n}^{(1)}(x_1,\lambda)}{\hat{\Omega}_{m,n}^{(2)}(x_1,\lambda)}\hat{\Omega}_{m,n}^{(2)}(x,\lambda)\text{，}\hat{Z}_n(x,l^0)=L_1(x,l^0)-\frac{L_1(x_1,l_n^0)}{L_2(x_1,l_n^0)}L_2(x,l^0)$$

$\lambda_{m,n}^0$ 可由文献［44］中式（22－45）

$$\{[\hat{Z}_{s_1}(x_1,\lambda)]^2+[\hat{Z}_{s_2}(x_1,\lambda)]^2\}\{[\hat{Z}_{s_3}(x_2,\lambda)]^2+[\hat{Z}_{s_4}(x_2,\lambda)]^2\}-$$
$$\{[\hat{Z}_{s_1}(x_2,\lambda)]2+[\hat{Z}_{s_2}(x_2,\lambda)]^2\}\{[\hat{Z}_{s_3}(x_1,\lambda)]^2+[\hat{Z}_{s_4}(x_1,\lambda)]^2\}=0$$

确定。l_n^0 由文献［44］中式（22－46）

$$L_1(x_1,l^0)L_2(x_2,l^0)-L_1(x_2,l^0)L_2(x_1,l^0)=0$$

确定。$s_{m,n,k}$ 为 $j_{l_{m,n}^0}(z)$ 零点，$\lambda_{m,n}^0=l_{m,n}^0(l_{m,n}^0+1)$，$\sqrt{\mu}=\frac{s_{m,n,k}}{r_2}$。$s_{n,k}$ 为 $j_{k_n^0}(z)$ 零点，$k_n^0(k_n^0+1)=K_{33}l_n^0(l_n^0+1)$，$\sqrt{\mu}=\frac{s_{n,k}}{r_2}$。

将 $t=0$ 代入到式（22－105），再代入到初始条件（22－91），可得

$$\sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[A_{m,0,n,k}+E_{m,0,n,k}]\hat{Z}_{m,n}(x,\lambda_{m,n}^0)e^{im\varphi}j_{l_{m,n}^0}(s_{m,n,k}\frac{r}{r_2})+$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{0,n,k}j_{k_n^0}(s_{n,k}\frac{r}{r_2})Z_n(x,l_n^0)=h(r,x,\varphi)\qquad(22-106)$$

$$\sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}i\frac{s_{m,n,k}}{r_2}\sqrt{c_{11}}(A_{m,0,n,k}-E_{m,0,n,k})\hat{Z}_{m,n}(x,\lambda_{m,n}^0)e^{im\varphi}j_{l_{m,n}^0}(s_{m,n,k}\frac{r}{r_2})+$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_{n,k}}{r_2}\sqrt{c_{11}}b_{0,n,k}j_{k_n^0}(s_{n,k}\frac{r}{r_2})Z_n(x,l_n^0)=g(r,x,\varphi)$$
$$(22-107)$$

根据文献［44］第 22 章中复数缔合球体函数展开定理，可将 $h(r,x,\varphi)$ 和 $g(r,x,\varphi)$ 展开为

$$h(r,x,\varphi)=\sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}C_{m,0,n,k}\hat{Z}_{m,n}(x,\lambda_{m,n}^0)e^{im\varphi}j_{l_{m,n}^0}(s_{m,n,k}\frac{r}{r_2})+$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}c_{0,n,k}j_{k_n^0}(s_{n,k}\frac{r}{r_2})Z_n(x,l_n^0)\qquad(22-108)$$

$$g(r,x,\varphi)=\sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}D_{m,0,n,k}\hat{Z}_{m,n}(x,\lambda_{m,n}^0)e^{im\varphi}j_{l_{m,n}^0}(s_{m,n,k}\frac{r}{r_2})+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} d_{0,n,k} j_{k_n^0}\left(s_{n,k}\frac{r}{r_2}\right) Z_n(x,l_n^0) \tag{22-109}$$

式中 $C_{m,0,n,k}$ ，$D_{m,0,n,k}$ 为复数常数。$C_{m,0,n,k}$ ，$D_{m,0,n,k}$ ，$c_{0,n,k}$ ，$d_{0,n,k}$ 可分别由文献［44］中式（22－62）（22－64）确定。记 $C_{m,0,n,k}=C_{m,0,n,k,r}+\mathrm{i}C_{m,0,n,k,i}$ ，$D_{m,0,n,k}=D_{m,0,n,k,r}+\mathrm{i}D_{m,0,n,k,i}$。

分别比较式（22－106）（22－107）和式（22－108）（22－109）中 $\hat{Z}_{m,n}(x,\lambda_{m,n}^0)$ $\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} j_{l_{m,n}^0}\left(s_{m,n,k}\frac{r}{r_2}\right)$ ，$j_{k_n^0}\left(s_{n,k}\frac{r}{r_2}\right) Z_n(x,l_n^0)$ 前系数，可得

$$\begin{cases} A_{m,0,n,k}+E_{m,0,n,k}=C_{m,0,n,k} \\ \mathrm{i}\dfrac{s_{m,n,k}}{r_2}\sqrt{c_{11}}(A_{m,0,n,k}-E_{m,0,n,k})=D_{m,0,n,k} \\ a_{0,n,k}=c_{0,n,k} \\ \dfrac{s_{n,k}}{r_2}\sqrt{c_{11}}b_{0,n,k}=d_{0,n,k} \end{cases} \tag{22-110}$$

式中 $A_{m,0,n,k}=A_{m,0,n,k,r}+\mathrm{i}A_{m,0,n,k,i}, E_{m,0,n,k}=E_{m,0,n,k,r}+\mathrm{i}E_{m,0,n,k,i}$ 。

求解式（22－110），可得待定常数 $A_{m,0,n,k}, E_{m,0,n,k}, a_{0,n,k}$ ，$b_{0,n,k}$ 。

根据文献［44］中式（22－35a）（22－35b）（22－47），可得

$$\hat{Z}_{m,n}(x,\lambda)=\hat{Z}_{m,n,r}(x,\lambda)+\mathrm{i}\,\hat{Z}_{m,n,i}(x,\lambda) \tag{22-111}$$

式中

$$\begin{cases} \hat{Z}_{m,n,r}(x,\lambda)=\hat{Z}_{s_1}(x,\lambda)+\hat{Z}_{s_3}(x,\lambda)\hat{Z}_{s_5}(x_1,\lambda)+\hat{Z}_{s_4}(x,\lambda)\hat{Z}_{s_6}(x_1,\lambda) \\ \hat{Z}_{s_5}(x_1,\lambda)=\dfrac{-\hat{Z}_{s_1}(x_1,\lambda)\hat{Z}_{s_3}(x_1,\lambda)-\hat{Z}_{s_2}(x_1,\lambda)\hat{Z}_{s_4}(x_1,\lambda)}{[\hat{Z}_{s_3}(x_1,\lambda)]^2+[\hat{Z}_{s_4}(x_1,\lambda)]^2} \\ \hat{Z}_{s_6}(x_1,\lambda)=\dfrac{\hat{Z}_{s_{21}}(x_1,\lambda)\hat{Z}_{s_3}(x_1,\lambda)-\hat{Z}_{s_1}(x_1,\lambda)\hat{Z}_{s_4}(x_1,\lambda)}{[\hat{Z}_{s_3}(x_1,\lambda)]^2+[\hat{Z}_{s_4}(x_1,\lambda)]^2} \end{cases} \tag{22-112}$$

$$\begin{cases} \hat{Z}_{m,n,i}(x,\lambda)=\hat{Z}_{s_2}(x,\lambda)-\hat{Z}_{s_3}(x,\lambda)\hat{Z}_{s_6}(x_1,\lambda)+\hat{Z}_{s_4}(x,\lambda)\hat{Z}_{s_5}(x_1,\lambda) \\ \hat{Z}_{s_5}(x_1,\lambda)=\dfrac{-\hat{Z}_{s_1}(x_1,\lambda)\hat{Z}_{s_3}(x_1,\lambda)-\hat{Z}_{s_2}(x_1,\lambda)\hat{Z}_{s_4}(x_1,\lambda)}{[\hat{Z}_{s_3}(x_1,\lambda)]^2+[\hat{Z}_{s_4}(x_1,\lambda)]^2} \\ \hat{Z}_{s_6}(x_1,\lambda)=\dfrac{\hat{Z}_{s_{21}}(x_1,\lambda)\hat{Z}_{s_3}(x_1,\lambda)-\hat{Z}_{s_1}(x_1,\lambda)\hat{Z}_{s_4}(x_1,\lambda)}{[\hat{Z}_{s_3}(x_1,\lambda)]^2+[\hat{Z}_{s_4}(x_1,\lambda)]^2} \end{cases} \tag{22-113}$$

根据式（22－111）（22－112）（22－113），式（22－105）可改写为

$$u(r,x,\varphi,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{0,n,k}\cos\left(\frac{s_{n,k}}{r_2}\sqrt{c_{11}}t\right)+b_{0,n,k}\sin\left(\frac{s_{n,k}}{r_2}\sqrt{c_{11}}t\right)\right]j_{k_n^0}\left(s_{n,k}\frac{r}{r_2}\right)Z_n(x,l_n^0)+$$

$$\sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty}\sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_{m,0,n,k,r}\left[\hat{Z}_{m,n,r}(x,\lambda_{m,n}^0)\cos\left(m\varphi+\frac{s_{m,n,k}}{r_2}\sqrt{c_{11}}t\right)-\right.\right.$$

$$\left.\hat{Z}_{m,n,i}(x,\lambda_{m,n}^0)\sin\left(m\varphi+\frac{s_{m,n,k}}{r_2}\sqrt{c_{11}}t\right)\right]-$$

$$A_{m,0,n,k,i}\left[\hat{Z}_{m,n,i}(x,\lambda_{m,n}^0)\cos\left(m\varphi+\frac{s_{m,n,k}}{r_2}\sqrt{c_{11}}t\right)+\right.$$

$$\left.\left.\hat{Z}_{m,n,r}(x,\lambda_{m,n}^0)\sin\left(m\varphi+\frac{s_{m,n,k}}{r_2}\sqrt{c_{11}}t\right)\right]\right\}j_{l_{m,n}^0}\left(s_{m,n,k}\frac{r}{r_2}\right)+$$

$$\sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty}\sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{E_{m,0,n,k,r}\left[\hat{Z}_{m,n,r}(x,\lambda_{m,n}^0)\cos\left(m\varphi-\frac{s_{m,n,k}}{r_2}\sqrt{c_{11}}t\right)-\right.\right.$$

$$\left.\hat{Z}_{m,n,i}(x,\lambda_{m,n}^0)\sin\left(m\varphi-\frac{s_{m,n,k}}{r_2}\sqrt{c_{11}}t\right)\right]-$$

$$E_{m,0,n,k,i}\left[\hat{Z}_{m,n,i}(x,\lambda_{m,n}^0)\cos\left(m\varphi-\frac{s_{m,n,k}}{r_2}\sqrt{c_{11}}t\right)+\right.$$

$$\left.\left.\hat{Z}_{m,n,r}(x,\lambda_{m,n}^0)\sin\left(m\varphi-\frac{s_{m,n,k}}{r_2}\sqrt{c_{11}}t\right)\right]\right\}j_{l_{m,n}^0}\left(s_{m,n,k}\frac{r}{r_2}\right)$$

(22－114)

根据数学物理实数化原理，式（22－114）可简写为

$$u(r,x,\varphi,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{0,n,k}\cos\left(\frac{s_{n,k}}{r_2}\sqrt{c_{11}}t\right)+b_{0,n,k}\sin\left(\frac{s_{n,k}}{r_2}\sqrt{c_{11}}t\right)\right]j_{k_n^0}\left(s_{n,k}\frac{r}{r_2}\right)Z_n(x,l_n^0)+$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}2\left\{A_{m,0,n,k,r}\left[\hat{Z}_{m,n,r}(x,\lambda_{m,n}^0)\cos\left(m\varphi+\frac{s_{m,n,k}}{r_2}\sqrt{c_{11}}t\right)-\right.\right.$$

$$\left.\hat{Z}_{m,n,i}(x,\lambda_{m,n}^0)\sin\left(m\varphi+\frac{s_{m,n,k}}{r_2}\sqrt{c_{11}}t\right)\right]-$$

$$A_{m,0,n,k,i}\left[\hat{Z}_{m,n,i}(x,\lambda_{m,n}^0)\cos\left(m\varphi+\frac{s_{m,n,k}}{r_2}\sqrt{c_{11}}t\right)+\right.$$

$$\left.\left.\hat{Z}_{m,n,r}(x,\lambda_{m,n}^0)\sin\left(m\varphi+\frac{s_{m,n,k}}{r_2}\sqrt{c_{11}}t\right)\right]\right\}j_{l_{m,n}^0}\left(s_{m,n,k}\frac{r}{r_2}\right)+$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}2\left\{E_{m,0,n,k,r}\left[\hat{Z}_{m,n,r}(x,\lambda_{m,n}^0)\cos\left(m\varphi-\frac{s_{m,n,k}}{r_2}\sqrt{c_{11}}t\right)-\right.\right.$$

$$\left.\hat{Z}_{m,n,i}(x,\lambda_{m,n}^0)\sin\left(m\varphi-\frac{s_{m,n,k}}{r_2}\sqrt{c_{11}}t\right)\right]-$$

$$E_{m,0,n,k,i}\left[\hat{Z}_{m,n,i}(x,\lambda_{m,n}^0)\cos\left(m\varphi-\frac{s_{m,n,k}}{r_2}\sqrt{c_{11}}t\right)+\right.$$

$$\left.\left.\hat{Z}_{m,n,r}(x,\lambda_{m,n}^0)\sin\left(m\varphi-\frac{s_{m,n,k}}{r_2}\sqrt{c_{11}}t\right)\right]\right\}j_{l_{m,n}^0}\left(s_{m,n,k}\frac{r}{r_2}\right)$$

(22－115)

式（22－105）为球坐标下三维各向异性波动方程（22－86）复数形式解，式（22－115）

为波动方程（22－86）实数形式解。

22.5 极坐标系下圆薄膜二维各向异性波动方程

极坐标 (r,θ) 下薄膜二维各向异性波动方程为

$$c_{22}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+c_{11}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+2c_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r}+c_{12}\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (22-116)$$

式中 $u(r,\theta,t)$ 为各向异性圆薄膜内物理场分布函数。c_{11},c_{12},c_{22} 为物理常数。下标代表径向 r 方向，下标 2 代表切向 $\theta\,(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 方向。

设边界条件为

$$r=R,u(r,\theta,t)=0;r=0,u(0,\theta,t)\text{ 有限值} \quad (22-117)$$

设初始条件为

$$u(r,\theta,0)=f(r,\theta)\ ,\ \frac{\partial u(r,\theta,0)}{\partial t}=g(r,\theta) \quad (22-118)$$

设方程（22－116）解形式为

$$u(r,\theta,t)=v(\mathrm{r},\theta)\Gamma(\mathrm{t}) \quad (22-119)$$

将式（22－119）代入到方程（22－116），并分离变量可得

$$\frac{\frac{\partial^2\Gamma}{\partial t^2}}{c_{11}\Gamma}=\frac{\left[c_{22}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}+c_{11}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right)+2c_{12}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta\partial r}+c_{12}\frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right]\frac{1}{c_{11}}}{v}=-\lambda \quad (22-120)$$

式中 λ 为分离变量常数。

本节引入以下无量纲量和参数变换

$$K_{11}=1,K_{12}=\frac{c_{12}}{c_{11}},K_{22}=\frac{c_{22}}{c_{11}}\ ,\ x=r\sqrt{\lambda} \quad (22-121)$$

将式（22－121）代入到式（22－120），可得

$$\frac{\partial^2\Gamma}{\partial t^2}+\lambda c_{11}\Gamma=0 \quad (22-122)$$

$$K_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)+2K_{12}x\frac{\partial^2 v}{\partial\theta\partial x}+K_{12}\frac{\partial v}{\partial\theta}+x^2u=0 \quad (22-123)$$

根据方程（22－122），可得

$$\Gamma(t)=C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda c_{11}}t}+D\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda c_{11}}t} \quad (22-124)$$

式中 C，D 为复数常数。

边界条件（22－117）可写为

$$x=x_2,v(x,\theta)=0;x=0,v(0,\theta)\text{ 有限值} \quad (22-125)$$

式中 $x_2=R\sqrt{\lambda}$ 。

方程（22－123）解设为

$$v=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \quad (22-126)$$

其中 $i^2=-1$；n 为整数。

当 $n=0$，方程（22-123）简化为

$$\frac{d}{dx}(x^2\frac{dv}{dx})+x^2u=0 \tag{22-127}$$

方程（22-127）为 0 阶球贝塞尔方程，其解为

$$v(x)=c_0j_0(x)+d_0y_0(x) \tag{22-128}$$

其中 c_0,d_0 为实数待定常数，$j_0(x)$ 为第一类 0 阶球贝塞尔函数，$y_0(x)$ 为第二类 0 阶球贝塞尔函数。

当 $n\neq 0$，将式（22-126）代入到方程（22-123）并化简，可得

$$x^2\frac{d^2f_n}{dx^2}+2x\frac{df_n}{dx}(1+K_{12}in)+f_n(x^2-K_{22}n^2+iK_{12}n)=0 \tag{22-129}$$

方程（22-129）为球 Z_{ip} 微分方程，其解为

$$f_n(x)=A_{1,n,0}C_{ip_{1,n}}(x)+A_{2,n,0}C_{ip_{2,n}}(x) \tag{22-130}$$

式中 $A_{1,n,0}$，$A_{2,n,0}$ 为复数待定常数，$p_{l,n}=a_{l,n}+ib_{l,n}$（$l=1$，2）

$$\begin{cases}a_{1,n}=-nK_{12}\\ b_{1,n}=0.5+\sqrt{\frac{1}{4}+n^2[K_{22}-(K_{12})^2]}\\ a_{2,n}=-nK_{12}\\ b_{2,n}=0.5-\sqrt{\frac{1}{4}+n^2(K_{22}-(K_{12})^2]}\end{cases} \tag{22-131}$$

式（22-120）中的 λ 可根据式（22-130）的非平凡解条件确定，下面分情况求解。

根据中心物理场有限性，可以消减 $n>0$ 时对应 $l=1$ 的函数解项，式（22-130）简化为

$$f_n(x)=A_{l,n,0}C_{ip_{l,n}}(x) \tag{22-132}$$

式中 $l=2$。

边界条件（22-117）简化为

$$r=R,v(x,\theta)=0$$

其中 $x=R\sqrt{\lambda}$。

将 $f_n(x)=A_{l,n,0}C_{ip_{l,n}}(x)$ 代入上式，可得

$$C_{ip_{l,n}}(x)=0 \tag{22-133}$$

当 $n=0$，$v=c_0j_0(x)$ 为中心对称解。下面我们首先讨论对称解情况，其次讨论一般情况。

（1）对称波情况

根据线性偏微分方程的可叠加性，可得方程（22-116）对称解为

$$u(r,t)=\sum_{j=1}^{\infty}(A_j\cos\sqrt{c_{11}}\frac{\mu_j^0}{R}t+B_j\sin\sqrt{c_{11}}\frac{\mu_j^0}{R}t)j_0(\frac{r\mu_j^0}{R}) \tag{22-134}$$

式中 μ_j^0（$j=1$，2，…）为球贝塞尔函数 $j_0(x)$ 的零点，$\lambda=(\frac{\mu_j^0}{R})^2$。

式（22－134）为各向异性实心圆薄膜中对称波解。如果初始条件关于中心对称，该初始条件可写为

$$u(r,0)=f_0(r)\ ,\ \frac{\partial u(r,0)}{\partial t}=g_0(r)$$

由此，该物理场与角度 θ 无关。式（22－134）为该波动方程的解。将 $t=0$ 代入式（22－134），再代入初始条件，根据球贝塞尔函数正交性可确定待定常数 A_j ，B_j 。求解完毕。

（2）一般波情况

考虑到 $C_{ip_{l,n}}(x)=x^{ia_{l,n}}\sum_{m=0}^{\infty}C_{l,n,2m}x^{2m-b_{l,n}}$ ，$C_{ip_{l,n}}(x)$ 有无限多零点，记为 $\mu_{l,n,j}^{0}$ ，$j=1$，2，3，… 。

求解 $C_{ip_{l,n}}(x)=0$ ，可得 $\mu_{l,n,j}^{0}$

$$\mu_{l,n,j}^{0}=R\sqrt{\lambda} \tag{22-135}$$

根据式（22－119）（22－124）（22－132）（22－135），可得

$$\begin{aligned}&u(r,\theta,t)=\\&\sum_{n=-\infty,n\neq0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\Big[(A_{l,n,0,j,r}+\mathrm{i}A_{l,n,0,j,i})C_{ip_{l,n}}\Big(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R}\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{c_{11}}\frac{\mu_{l,n,j}^{0}}{R}t}+\\&(B_{l,n,0,j,r}+\mathrm{i}B_{l,n,0,j,i})C_{ip_{l,n}}\Big(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R}\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{c_{11}}\frac{\mu_{l,n,j}^{0}}{R}t}\Big]+\\&\sum_{j=1}^{\infty}\Big(A_j\cos\sqrt{c_{11}}\frac{\mu_j^{0}}{R}t+B_j\sin\sqrt{c_{11}}\frac{\mu_j^{0}}{R}t\Big)j_0\Big(\frac{r\mu_j^{0}}{R}\Big)\end{aligned} \tag{22-136}$$

将 $t=0$ 代入式（22－136），再代入初始条件（22－118）可得

$$\begin{aligned}&\sum_{n=-\infty,n\neq0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\Big[(A_{l,n,0,j,r}+\mathrm{i}A_{l,n,0,j,i})C_{ip_{l,n}}\Big(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R}\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}+\\&(B_{l,n,0,j,r}+\mathrm{i}B_{l,n,0,j,i})C_{ip_{l,n}}\Big(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R}\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\Big]+\sum_{j=1}^{\infty}A_jj_0\Big(\frac{r\mu_j^{0}}{R}\Big)=f(r,\theta)\end{aligned} \tag{22-137}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{n=-\infty,n\neq0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\Big[\mathrm{i}\sqrt{c_{11}}\frac{\mu_{l,n,j}^{0}}{R}(A_{l,n,0,j,r}+\mathrm{i}A_{l,n,0,j,i})C_{ip_{l,n}}\Big(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R}\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}-\\&\mathrm{i}\sqrt{c_{11}}\frac{\mu_{l,n,j}^{0}}{R}(B_{l,n,0,j,r}+\mathrm{i}B_{l,n,0,j,i})C_{ip_{l,n}}\Big(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R}\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\Big]+\\&\sum_{j=1}^{\infty}\sqrt{c_{11}}\frac{\mu_j^{0}}{R}B_j\cos\Big(\sqrt{c_{11}}\frac{\mu_j^{0}}{R}t\Big)\ j_0\Big(\frac{r\mu_j^{0}}{R}\Big)=g(r,\theta)\end{aligned} \tag{22-138}$$

根据复数球柱函数展开定理，可将 $f(r,\theta)$ 和 $g(r,\theta)$ 展开为以下两式

$$f(r,\theta)=\sum_{n=-\infty,n\neq0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}C_{l,n,0,j}C_{ip_{l,n}}\Big(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R}\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}+\sum_{j=1}^{\infty}c_jj_0\Big(\frac{r\mu_j^{0}}{R}\Big) \tag{22-139}$$

$$g(r,\theta)=\sum_{n=-\infty,n\neq0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}D_{l,n,0,j}C_{ip_{l,n}}\Big(\frac{r\mu_{l,n,j}^{0}}{R}\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}+\sum_{j=1}^{\infty}d_jj_0\Big(\frac{r\mu_j^{0}}{R}\Big) \tag{22-140}$$

式中 $C_{l,n,0,j}$ ，$D_{l,n,0,j}$ 为复数常数。$C_{l,n,0,j}$ ，$D_{l,n,0,j}$ ，c_j ，d_j 可分别根据式（10－78）（10－

80）确定。记 $C_{l,n,0,j} = C_{l,n,0,j,r} + \mathrm{i}C_{l,n,0,j,i}$ ，$D_{l,n,0,j} = D_{l,n,0,j,r} + \mathrm{i}D_{l,n,0,j,i}$ 。

比较式（22-137）（22-138）和式（22-139）（22-140）中 $j_0(\frac{r\mu_j^0}{R})$ ，$C_{ip_{l,n}}(\frac{r\mu_{l,n,j}^0}{R})e^{in\theta}$ 前系数，可得

$$\begin{cases} A_{l,n,0,j} + B_{l,n,0,j} = C_{l,n,0,j} \\ \mathrm{i}\sqrt{c_{11}}\frac{\mu_{l,n,j}^0}{R}(A_{l,n,0,j} - B_{l,n,0,j}) = D_{l,n,0,j} \\ A_j = c_j \\ \sqrt{c_{11}}\frac{\mu_j^0}{R}B_j = d_j \end{cases} \tag{22-141}$$

求解式（22-141），可得待定常数 $A_{l,n,0,j}, B_{l,n,0,j}, A_j$ ，B_j 。

根据 $C_{ip_{l,n}}(x) = x^{\mathrm{i}a_{l,n}} j_{-b_{l,n}}(x)$ ，可改写式（22-136）为

$$\begin{aligned} &u(r,\theta,t) = \\ &\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\{A_{l,n,0,j,r}\cos[n\theta + a_{l,n}\ln(\frac{r\mu_{l,n,j}^0}{R}) + \sqrt{c_{11}}\frac{\mu_{l,n,j}^0}{R}t] - \\ &A_{l,n,0,j,i}\sin[n\theta + a_{l,n}\ln(\frac{r\mu_{l,n,j}^0}{R}) + \sqrt{c_{11}}\frac{\mu_{l,n,j}^0}{R}t]\}j_{-b_{l,n}}(\frac{r\mu_{l,n,j}^0}{R}) + \\ &\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\{B_{l,n,0,j,r}\cos[n\theta + a_{l,n}\ln(\frac{r\mu_{l,n,j}^0}{R}) - \sqrt{c_{11}}\frac{\mu_{l,n,j}^0}{R}t] - \\ &B_{l,n,0,j,i}\sin[n\theta + a_{l,n}\ln(\frac{r\mu_{l,n,j}^0}{R}) - \sqrt{c_{11}}\frac{\mu_{l,n,j}^0}{R}t]\}j_{-b_{l,n}}(\frac{r\mu_{l,n,j}^0}{R}) + \\ &\sum_{j=1}^{\infty}(A_j\cos\sqrt{c_{11}}\frac{\mu_j^0}{R}t + B_j\sin\sqrt{c_{11}}\frac{\mu_j^0}{R}t)j_0(\frac{r\mu_j^0}{R}) \end{aligned} \tag{22-142}$$

根据数学物理实数化原理，式（22-142）可简化为

$$\begin{aligned} &u(r,\theta,t) = \\ &\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\{A_{l,n,0,j,r}\cos[n\theta + a_{l,n}\ln(\frac{r\mu_{l,n,j}^0}{R}) + \sqrt{c_{11}}\frac{\mu_{l,n,j}^0}{R}t] - \\ &A_{l,n,0,j,i}\sin[n\theta + a_{l,n}\ln(\frac{r\mu_{l,n,j}^0}{R}) + \sqrt{c_{11}}\frac{\mu_{l,n,j}^0}{R}t]\}j_{-b_{l,n}}(\frac{r\mu_{l,n,j}^0}{R}) + \\ &\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\{B_{l,n,0,j,r}\cos[n\theta + a_{l,n}\ln(\frac{r\mu_{l,n,j}^0}{R}) - \sqrt{c_{11}}\frac{\mu_{l,n,j}^0}{R}t] - \\ &B_{l,n,0,j,i}\sin[n\theta + a_{l,n}\ln(\frac{r\mu_{l,n,j}^0}{R}) - \sqrt{c_{11}}\frac{\mu_{l,n,j}^0}{R}t]\}j_{-b_{l,n}}(\frac{r\mu_{l,n,j}^0}{R}) + \\ &\sum_{j=1}^{\infty}(A_j\cos\sqrt{c_{11}}\frac{\mu_j^0}{R}t + B_j\sin\sqrt{c_{11}}\frac{\mu_j^0}{R}t)\mathrm{j}_0(\frac{r\mu_j^0}{R}) \end{aligned} \tag{22-143}$$

式（22-136）为各向异性波动方程（22-116）复数形式解。式（22-143）为波动方程（22-116）实数形式解。

22.6 球坐标系下球膜二维各向异性波动方程的缔合复数球带面函数解

球坐标 (r,φ,θ) 下球膜二维各向异性波动方程为

$$c_{22}\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+c_{33}\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta})+2c_{23}\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\partial\theta}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{22-144}$$

式中 $u(\theta,\varphi,t)$ 为球膜内物理场分布函数。c_{22},c_{23},c_{33} 为物理常数。方向 2 为球坐标方向角 φ $(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$ 方向（地理纬线方向），方向 3 为球坐标 $\theta\,(0<\theta<\pi)$ 高低角方向（地理经线方向）r 为径向坐标，R 为球半径，球膜面上 $r=R$。

引入如下变换

$$x=\cos\theta \tag{22-145}$$

可将方程（22-144）变换为以下偏微分方程

$$\frac{c_{22}}{(1-x^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+c_{33}[-2x\frac{\partial u}{\partial x}+(1-x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}]-2c_{23}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\partial x}=R^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{22-146}$$

边界条件设为

$$\begin{cases}x=x_1,u(x_1,\varphi,t)=0\\x=x_2,u(x_2,\varphi,t)=0\end{cases} \tag{22-147}$$

初始条件设为

$$u(r,\theta,0)=f(r,\theta),\ \frac{\partial u(r,\theta,0)}{\partial t}=g(r,\theta) \tag{22-148}$$

方程（22-146）解设为

$$u(x,\varphi,t)=v(x,\varphi)\Gamma(\mathrm{t}) \tag{22-149}$$

将式（22-149）代入到方程（22-146），再分离变量可得

$$\frac{\frac{\partial^2\Gamma}{\partial t^2}}{\sigma\Gamma}=\frac{[\frac{c_{22}}{(1-x^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+c_{33}(-2x\frac{\partial u}{\partial x}+(1-x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})-2c_{23}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\partial x}]\frac{1}{c_{33}}}{u}=-\lambda \tag{22-150}$$

其中 λ 为分离变量常数，$\lambda>0$，$\lambda=l(l+1)$；$\sigma=\frac{c_{33}}{R^2}$。

引入以下无量纲量

$$K_{33}=1,K_{23}=\frac{c_{23}}{c_{33}},K_{22}=\frac{c_{22}}{c_{33}} \tag{22-151}$$

将式（22-151）代入到式（22-150）可得

$$\frac{\partial^2\Gamma}{\partial t^2}+\sigma\lambda\Gamma=0 \tag{22-152}$$

$$\frac{K_{22}}{(1-x^2)}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}+K_{33}[-2x\frac{\partial v}{\partial x}+(1-x^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}]-2K_{23}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi\partial x}+l(1+l)v=0 \tag{22-153}$$

根据方程（22 - 152），可得

$$\Gamma(t) = C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda\sigma}t} + D\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda\sigma}t} \tag{22 - 154}$$

式中 C，D 为复数常数。

方程（22 - 153）与文献［44］中方程（21 - 8）一样，可应用文献［44］中方程（21 - 8）解

$$u(x,\varphi,t) = \sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\hat{Z}_{m,n}(x,\lambda_{m,n}^{0})\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}(A_{m,0,n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda_{m,n}^{0}\sigma}t} + B_{m,0,n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda_{m,n}^{0}\sigma}t}) +$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{0,n}\cos\sqrt{l_n^0(1+l_n^0)\sigma}t + b_{0,n}\sin\sqrt{l_n^0(1+l_n^0)\sigma}t)Z_n(x,l_n^0)$$

(22 - 155)

式中 $\lambda_{m,n}^{0}$ 由文献［44］式（21 - 39a）

$$\{[\hat{Z}_{s_1}(x_1,\lambda)]^2 + [\hat{Z}_{s_2}(x_1,\lambda)]^2\}\{[\hat{Z}_{s_3}(x_2,\lambda)]^2 + [\hat{Z}_{s_4}(x_2,\lambda)]^2\} -$$
$$\{[\hat{Z}_{s_1}(x_2,\lambda)]^2 + [\hat{Z}_{s_2}(x_2,\lambda)]^2\}\{[\hat{Z}_{s_3}(x_1,\lambda)]^2 + [\hat{Z}_{s_4}(x_1,\lambda)]^2\} = 0$$

确定。l_n^0 由文献［44］式（21 - 39b）

$$L_1(x_1,l^0)L_2(x_2,l^0) - L_1(x_2,l^0)L_2(x_1,l^0) = 0$$

确定。根据文献［44］第 20 章中定义，可得

$$\begin{cases} \hat{Z}_{m,n}(x,\lambda) = \hat{\Omega}_{m,n}^{(1)}(x,\lambda) - \dfrac{\hat{\Omega}_{m,n}^{(1)}(x_1,\lambda)}{\hat{\Omega}_{m,n}^{(2)}(x_1,\lambda)}\hat{\Omega}_{m,n}^{(2)}(x,\lambda) \\ Z_n(x,l^0) = L_1(x,l^0) - \dfrac{L_1(x_1,l_n^0)}{L_2(x_1,l_n^0)}L_2(x,l^0) \end{cases} \tag{22 - 156}$$

将 $t=0$ 代入式（22 - 155），再代入初始条件（22 - 148），可得

$$\sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\hat{Z}_{m,n}(x,\lambda_{m,n}^{0})\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}(A_{m,0,n} + B_{m,0,n}) + \sum_{n=1}^{\infty}a_{0,n}Z_n(x,l_n^0) = f(x,\varphi)$$

(22 - 157)

$$\sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\hat{Z}_{m,n}(x,\lambda_{m,n}^{0})\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{i}\sqrt{\lambda_{m,n}^{0}\sigma}(A_{m,0,n} - B_{m,0,n}) + \sum_{n=1}^{\infty}b_{0,n}\sqrt{l_n^0(1+l_n^0)\sigma}Z_n(x,l_n^0) = g(x,\varphi)$$

(22 - 158)

根据文献［44］第 20 章中的缔合复数球带面函数展开定理，可将 $f(x,\varphi)$ 和 $g(x,\varphi)$ 展开为下式

$$f(x,\varphi) = \sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}C_{m,0,n}\hat{Z}_{m,n}(x,\lambda_{m,n}^{0})\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} + \sum_{n=1}^{\infty}c_{0,n}Z_n(x,l_n^0) \tag{22 - 159}$$

$$g(x,\varphi) = \sum_{m=-\infty,m\neq 0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}D_{m,0,n}\hat{Z}_{m,n}(x,\lambda_{m,n}^{0})\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} + \sum_{n=1}^{\infty}d_{0,n}Z_n(x,l_n^0) \tag{22 - 160}$$

其中 $C_{m,0,n}$，$D_{m,0,n}$ 为待定复数常数。$C_{m,0,n}$，$D_{m,0,n}$，$c_{0,n}$，$d_{0,n}$ 可由文献［44］式（21 - 48）

确定。记 $C_{m,0,n}=C_{m,0,n,r}+\mathrm{i}C_{m,0,n,i}$ ，$D_{m,0,n}=D_{m,0,n,r}+\mathrm{i}D_{m,0,n,i}$ 。

分别比较式（22 - 157）（22 - 158）和式（22 - 159） （23 — 160）中 $\hat{Z}_n(x,l_n^0)$，$\hat{Z}_{ip_{l,n}}(\frac{r\mu_{l,n,j}^0}{R})\mathrm{e}^{in\theta}$ 前系数，可得

$$\begin{cases}A_{m,0,n}+B_{m,0,n}=C_{m,0,n}\\ \mathrm{i}\sqrt{\lambda_{m,n}^0\sigma}(A_{m,0,n}-B_{m,0,n})=D_{m,0,n}\\ a_{0,n}=c_{0,n}\\ b_{0,n}\sqrt{l_n^0(1+l_n^0)\sigma}=d_{0,n}\end{cases}\tag{22 - 161}$$

求解式（22 - 161），可确定待定系数 $A_{m,0,n},B_{m,0,n},a_{0,n}$ ，$b_{0,n}$ 。

根据文献［44］中式（21 - 31）（21 - 40）（21 - 41），可得

$$\hat{Z}_{m,n}(x,\lambda)=\hat{Z}_{m,n,r}(x,\lambda)+\mathrm{i}\,\hat{Z}_{m,n,i}(x,\lambda)\tag{22 - 162}$$

式中

$$\begin{cases}\hat{Z}_{m,n,r}(x,\lambda)=\hat{Z}_{s_1}(x,\lambda)+\hat{Z}_{s_3}(x,\lambda)\hat{Z}_{s_5}(x_1,\lambda)+\hat{Z}_{s_4}(x,\lambda)\hat{Z}_{s_6}(x_1,\lambda)\\ \hat{Z}_{m,n,i}(x,\lambda)=\hat{Z}_{s_2}(x,\lambda)-\hat{Z}_{s_3}(x,\lambda)\hat{Z}_{s_6}(x_1,\lambda)+\hat{Z}_{s_4}(x,\lambda)\hat{Z}_{s_5}(x_1,\lambda)\\ \hat{Z}_{s_5}(x_1,\lambda)=\dfrac{-\hat{Z}_{s_1}(x_1,\lambda)\hat{Z}_{s_3}(x_1,\lambda)-\hat{Z}_{s_2}(x_1,\lambda)\hat{Z}_{s_4}(x_1,\lambda)}{[\hat{Z}_{s_3}(x_1,\lambda)]^2+[\hat{Z}_{s_4}(x_1,\lambda)]^2}\\ \hat{Z}_{s_6}(x_1,\lambda)=\dfrac{\hat{Z}_{s_{21}}(x_1,\lambda)\hat{Z}_{s_3}(x_1,\lambda)-\hat{Z}_{s_1}(x_1,\lambda)\hat{Z}_{s_4}(x_1,\lambda)}{[\hat{Z}_{s_3}(x_1,\lambda)]^2+[\hat{Z}_{s_4}(x_1,\lambda)]^2}\end{cases}\tag{22 - 163}$$

根据式（22 - 162）（22 - 163），式（22 - 155）可改写为

$$\begin{aligned}u(x,\varphi,t)=&\sum_{n=1}^{\infty}(a_{0,n}\cos\sqrt{l_n^0(1+l_n^0)\sigma t}+b_{0,n}\sin\sqrt{l_n^0(1+l_n^0)\sigma t})\,Z_n(x,l_n^0)+\\ &\sum_{m=-\infty,m\neq0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\{A_{m,0,n,r}[\hat{Z}_{m,n,r}(x,\lambda_{m,n}^0)\cos(m\varphi+\sqrt{\lambda_{m,n}^0\sigma t})-\hat{Z}_{m,n,i}(x,\lambda_{m,n}^0)\sin(m\varphi+\sqrt{\lambda_{m,n}^0\sigma t})]-\\ &A_{m,0,n,i}[\hat{Z}_{m,n,i}(x,\lambda_{m,n}^0)\cos(m\varphi+\sqrt{\lambda_{m,n}^0\sigma t})+\hat{Z}_{m,n,r}(x,\lambda_{m,n}^0)\sin(m\varphi+\sqrt{\lambda_{m,n}^0\sigma t})]\}+\\ &\sum_{m=-\infty,m\neq0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\{B_{m,0,n,r}[\hat{Z}_{m,n,r}(x,\lambda_{m,n}^0)\cos(m\varphi-\sqrt{\lambda_{m,n}^0\sigma t})-\hat{Z}_{m,n,i}(x,\lambda_{m,n}^0)\sin(m\varphi-\sqrt{\lambda_{m,n}^0\sigma t})]-\\ &B_{m,0,n,i}[\hat{Z}_{m,n,i}(x,\lambda_{m,n}^0)\cos(m\varphi-\sqrt{\lambda_{m,n}^0\sigma t})+\hat{Z}_{m,n,r}(x,\lambda_{m,n}^0)\sin(m\varphi-\sqrt{\lambda_{m,n}^0\sigma t})]\}\end{aligned}\tag{22 - 164}$$

式中 $A_{m,0,n}=A_{m,0,n,r}+\mathrm{i}A_{m,0,n,i},B_{m,0,n}=B_{m,0,n,r}+\mathrm{i}B_{m,0,n,i}$ 。

根据数学物理实数化原理，式（22 - 164）简化为

$$u(x,\varphi,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{0,n}\cos\sqrt{l_n^0(1+l_n^0)\sigma}t+b_{0,n}\sin\sqrt{l_n^0(1+l_n^0)\sigma t}\right)Z_n(x,l_n^0)+$$
$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}2\{A_{m,0,n,r}[\hat{Z}_{m,n,r}(x,\lambda_{m,n}^0)\cos(m\varphi+\sqrt{\lambda_{m,n}^0\sigma}t)-\hat{Z}_{m,n,i}(x,\lambda_{m,n}^0)\sin(m\varphi+\sqrt{\lambda_{m,n}^0\sigma}t)]-$$
$$A_{m,0,n,i}[\hat{Z}_{m,n,i}(x,\lambda_{m,n}^0)\cos(m\varphi+\sqrt{\lambda_{m,n}^0\sigma}t)+\hat{Z}_{m,n,r}(x,\lambda_{m,n}^0)\sin(m\varphi+\sqrt{\lambda_{m,n}^0\sigma}t)]\}+$$
$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}2\{B_{m,0,n,r}[\hat{Z}_{m,n,r}(x,\lambda_{m,n}^0)\cos(m\varphi-\sqrt{\lambda_{m,n}^0\sigma}t)-\hat{Z}_{m,n,i}(x,\lambda_{m,n}^0)\sin(m\varphi-\sqrt{\lambda_{m,n}^0\sigma}t)]-$$
$$B_{m,0,n,i}[\hat{Z}_{m,n,i}(x,\lambda_{m,n}^0)\cos(m\varphi-\sqrt{\lambda_{m,n}^0\sigma}t)+\hat{Z}_{m,n,r}(x,\lambda_{m,n}^0)\sin(m\varphi-\sqrt{\lambda_{m,n}^0\sigma}t)]\}$$
$$(22-165)$$

式（22 - 155）为各向异性波动方程（22 - 144）复数形式解，式（22 - 165）为波动方程（22 - 144）实数形式解。

本章采用复数分离变量法和有关复数特殊函数求解各向异性波动方程。总的来看，复数分离变量法求解思路清晰，本书引入的复数特殊函数具有较好的适应性，可在不同的数学物理问题求解中发挥作用。

参考文献

[1] 王连祥，等. 数学手册［M］. 北京：高等教育出版社，1979.

[2] 叶其孝，沈永欢，主编. 实用数学手册（第二版）［M］. 北京：科学出版社，2006.

[3] 汪胡桢，主编. 现代工程数学手册（第1卷）［M］. 武汉：华中工学院出版社，1985.

[4] 梁昆淼. 数学物理方法［M］. 北京：高等教育出版社，1978.

[5] 王竹溪，郭敦仁. 特殊函数概论［M］. 北京：北京大学出版社，2000.

[6] 刘式适，刘适达. 特殊函数概论［M］. 北京：气象出版社，1988.

[7] 吴崇试. 数学物理方法（第二版）［M］. 北京：北京大学出版社，2003.

[8] 吴崇试. 数学物理方法专题—数理方程与特殊函数［M］. 北京：北京大学出版社，2012.

[9] 张善杰. 矢量分析、圆柱函数和球函数［M］. 南京：南京大学出版社，2011.

[10] 张善杰，金建铭. 特殊函数计算手册［M］. 南京：南京大学出版社，2011.

[11] 段志文，韩淑霞. 数学物理方程与特殊函数（第二版）［M］. 北京：高等教育出版社，2008.

[12] 周明儒. 数学物理方法［M］. 北京：高等教育出版社，2008.

[13] 姚端正，梁家宝. 数学物理方法（第二版）［M］. 武汉：武汉大学出版社，1997.

[14] 王有志，孙许玲. 汉英数学词汇［M］. 北京：清华大学出版社，2008.

[15] M. N. 奥齐西克，著. 热传导［M］. 俞昌铭，译. 北京：高等教育出版社，1983.

[16] 杨世铭，陶文铨. 传热学（第4版）［M］. 北京：高等教育出版社，1986.

[17] 列赫尼茨基，著. 各向异性板［M］. 胡海昌，译. 北京：科学出版社，1963.

[18] 刘锡礼，王秉权. 复合材料力学基础［M］. 北京：中国建筑出版社，1984.

[19] 王震鸣. 复合材料力学和复合材料结构力学［M］. 北京：机械出版社，1991.

[20] 何福保，沈亚鹏. 板壳理论［M］. 西安：西安交通大学出版社，1993.

[21] 杨耀乾. 薄壳理论［M］. 北京：中国铁道出版社，1981.

[22] 罗祖道，李思简. 各向异性材料力学［M］. 上海交通大学出版社，1994 .

[23] 陈樂年，洪清泉. 介质为各向异性的电磁场［M］. 王建成. 北京：科学出版社，2012.

[24] 郎道. 连续媒质电动力学［M］. 北京：人民教育出版社，1963.

[25] 张承宗. 复合材料板壳结构力学解析理论［M］. 北京：国防工业出版社，2009.

[26] 张承宗，杨光松. 各向异性板结构横向弯曲一般解析解［J］. 力学学报，19964（4）：429－440 .

[27] 张承宗. 复合材料板壳结构力学求解新体系［D］. 武汉：海军工程学院，1999.

[28] CARL M B，STEVEN A，O. Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers（Asymptotic Methods and Perturbation Theory）［M］. Beijing：World Publishing Beijing Corporation，2008.

[29] ZHANG C Z. A New Type Complex Series Method For Composite Structure Mechanics And Mathematical Physics［M］. Beijing：National Defense Industry Press，2009.

[30] NAKHLE H A. Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems（second Edition）［M］. Beijing：China Machine Press，2006.

[31] ANDREWS G E. ASKEY R. ROY R. Speacial Functions［M］. Cambridge University Press，1999.

[32] CHI H C. Some Eigenvalue Problems for Vectorial Sturm－Liuoville Equations with Eigenparameter Dependent Boundary Condition Value [J] . Transactions on the American Society, 2012 (364), No. 1, January, 119－136.

[33] JIANG X Y, QI H T. Thermal Wave Model of Biheat Transfer with Modified Riemann－Liouville Fractional Derivates [J] . Journal of Physics A: Mathematical and Theorical, 45 (2012) 485101.

[34] CHEN S, Li N, STEVEN V S. Generalized Ehrhart Polynomials [J] . Transactions on the American society, (364), No. 1, January 2012, 551－561.

[35] STAMATIS K, MARTIN L. The Zeros of Certain Lommel Function [J] . Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 140, No. 9, Sep 2012, 3091－3100.

[36] MOHAMMAD M J, WOLFRAM K. Two Classes of Special Functions Using Fourier Transforms of Generalized Ultraspherical and Generalized Hermite Polynomials [J] . Proceedings of the American Mathematical Society Vol. 140, No. 6, June 2012, 2053－2063.

[37] CARSLAW H. S, JAEGER J. C. Conduction of Heat in Solids (Second Edition) [M] . Clarendon Press, 1986.

[38] ZHANG X Z. Steady－State Temperatures in an Anisotropic Strip [J], J of Heat Transfer, February 1990, Vol. 112/19.

[39] MOHAMMAD M J, WOLFRAM K. Two Classes of Special Functions Using Fourier Transforms of Generalized Ultraspherical and Generalized Hermite Polynomials [J] . Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 140, No. 6 June 2012, 2053－2063.

[40] ZHANG Y Z. Exact Polynomials Solutions of Second Order Differential Equations and Their Applications [J] . J. Phys. A: Math. Theory. 45 (2012) 065206.

[41] TIMOSHENKO S. P, GOODIER J. N, Theory of Elasticity (Third Edition) [M] . Beijing: Tsinghua University Press, 2004.

[42] HEINZ－OTTO K, OMAR E O, PETESSON N A. Initial－boundary Value Problems for Second Order Systems of Partial Differential Equations [M] . Mathematical Modeling and Numerical Analysis, M2AN 46 (2012) 559－593.

[43] MICHAEL D G. Advanced Engineering Mathematics (Second Edition) [M] . China, Publishing House of Electronics Industry, 2004.

[44] ZHANG C Z. Anisotropic Mathematical Physics and Complex Special Functions [M] . Beijing: China Astronautic Publishing House, 2014.